



## ESTUDO DA DEFLEXÃO EM PLACAS QUADRADAS TOTALMENTE ENGASTADAS POR MEIO DE METODOLOGIA ANALÍTICO-NUMÉRICA

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2023.4519

RADAMÉS RAMOS DE SOUSA - radamesramos@hotmail.com  
IFPB

IURI AUGUSTO ALVES LUSTOSA - iuri.lustosa@ifpi.edu.br  
Instituto Federal do Piauí

VALDEIR BALTAZAR DA SILVA - valdeir.baltazar@academico.ifpb.edu.br  
IFPB CAMPUS CAJAZEIRAS

João Vitor Nogueira Gomes - joaovitor963@gmail.com  
Instituto Federal da Paraíba

Sebastião Simão da Silva - sebastiao\_simao@yahoo.com.br  
IFPB

**Resumo:** O avanço tecnológico nas engenharias tem sido de grande importância para a análise e o dimensionamento de estruturas por meio de uma variedade de softwares. No entanto, é comum que projetistas que os utilizam desconheçam os processos de cálculos realizados por essas ferramentas. Neste contexto, o presente trabalho mostra a obtenção de coeficientes utilizados para determinação de uma expressão final de cálculo da deflexão, aplicada em placas quadradas totalmente engastadas, por meio do método da superposição e da solução de Levy. A formulação de um elemento finito de placa descrito por Reddy foi implementada fazendo uso da linguagem de programação livre Scilab. Os resultados foram obtidos por meio das formulações analíticas e comparados com aqueles calculados utilizando o código desenvolvido. Verificou-se que os valores encontrados, tem uma boa aproximação, e as máximas deflexões ocorrem no centro da placa. Portanto, este trabalho contribui com o ensino-aprendizagem da teoria flexional de placas. A implementação das formulações torna possível a aplicação das soluções em iniciação científica, contribuindo dessa forma para a solidificação e disseminação do conhecimento.

"ABENGE 50 ANOS: DESAFIOS DE ENSINO, PESQUISA E  
EXTENSÃO NA EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA"

18 a 20 de setembro  
Rio de Janeiro-RJ



**COBENGE**  
**2023**

51º Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia  
VI Simpósio Internacional de Educação em Engenharia

**Palavras-chave:** Placas quadradas totalmente engastadas, métodos numéricos.

Realização:



Organização:

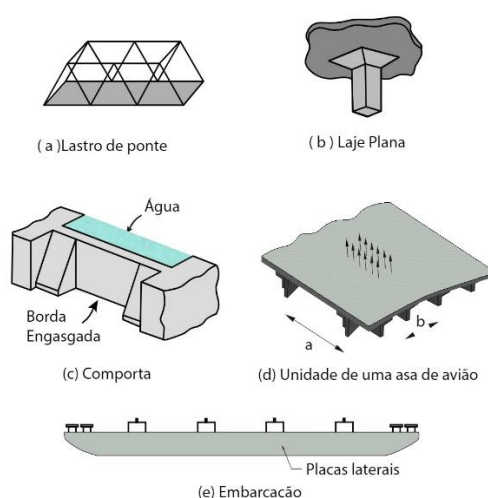


## ESTUDO DA DEFLEXÃO EM PLACAS QUADRADAS TOTALMENTE ENGASTADAS POR MEIO DE METODOLOGIA ANALÍTICO-NUMÉRICA

### 1 INTRODUÇÃO

A utilização de placas tem grande importância no projeto e análise de estruturas, sendo aplicáveis em vários campos da engenharia. Existem muitos exemplos de sistemas estruturais que podem ser concebidos com placas: lastro de pontes, lajes planas, estruturas hidráulicas, cascos de navios, aviões, etc., como mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Utilização das placas.

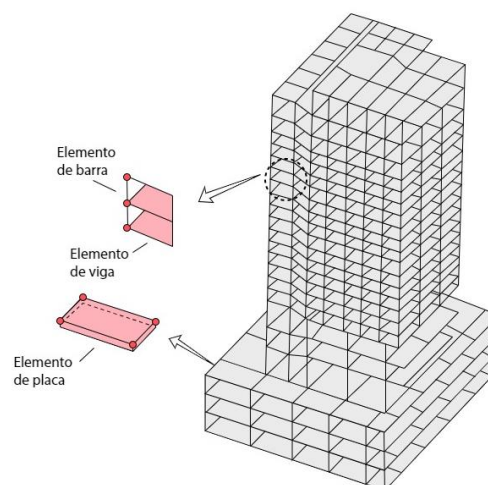


Fonte – Ventsel e Krauthammer, 2001, P.2 - Adaptado.

Quando se busca investigar o comportamento das placas, com relação às tensões e deformações, chega-se a equações muito complexas, sendo utilizada séries trigonométricas para se encontrar a resolução do problema. Por isso, na engenharia de estruturas são tão importantes os conceitos matemáticos que englobam desde a geometria analítica, passando pela álgebra linear, até o cálculo diferencial e integral (COSTA, 2010). Segundo Carvalho (2016), o avanço da informática, possibilitou a formulação de soluções utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF oferece grande flexibilidade para resolver problemas complexos com geometrias reais, com possibilidade de implementação numérica. Suas capacidades e limitações são amplamente conhecidas, tornando o método numérico mais utilizado na engenharia, atualmente (OTA, 2016). A correta aplicação desse conhecimento em projetos estruturais proporciona eficiência, levando em consideração as propriedades do material, bem como suas dimensões e geometria.

Voltando-se para a engenharia civil, é necessário ter noção de que, para construir uma edificação, é de suma importância a utilização das lajes. Com o passar do tempo, o avanço da tecnologia, juntamente com um conhecimento mais avançado, proporcionaram uma evolução que contribuiu para análises mais sofisticadas desses elementos estruturais. Figura 2. As lajes combinadas com vigas, pilares e fundações são responsáveis pela estabilidade e resistência da edificação.

Figura 2 – Tipos de elementos na estrutura.



Fonte - Ugural, 2018, p. 264 - Adaptado.

O entendimento sólido dos conceitos das equações que governam as soluções clássicas de placas permite um maior domínio das ferramentas numéricas. Entretanto, muitos trabalhos são feitos com esse intuito, porém a maioria deles não trazem o desenvolvimento completo das expressões, sendo difícil de encontrar os pormenores até nos livros clássicos.

Na graduação, mais especificadamente nas disciplinas de estruturas, muita das equações são utilizadas sem que, boa parte dos estudantes, não tenha ideia de como elas surgiram. Por exemplo, nas disciplinas de Estrutura de Concreto Armado, a rigidez é um termo bastante abordado, porém de forma quase automática, passando despercebido a sua ligação com outras equações.

O conhecimento da relação entre as soluções analíticas e numéricas, são de grande valia. Assim, este trabalho busca trazer todo esse desenvolvimento, facilitando a sua compreensão, objetivando a utilização de um algoritmo, construído com uma linguagem de programação livre. O principal objetivo desse artigo é realizar o estudo analítico e numérico de placas delgadas, por meio da formulação teórica clássica e utilizando um código de elementos finitos implementado com a linguagem Scilab versão 6.1.0.

## 2 TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS

Uma placa será considerada delgada, quando sua espessura é relativamente pequena, se comparado com as outras dimensões. Segundo Carvalho (2020), nesse tipo de placa, a razão entre a espessura e a menor das dimensões não é superior a 1/10.

No desenvolvimento das soluções da equação diferencial de placas delgadas é de suma importância enfatizar o trabalho de *Gustav R. Kirchhoff*, pois segundo Szilard (2004), foi através de suas observações que simplificações foram atribuídas à análise da teoria, resultando na conhecida equação de quarta ordem que rege o comportamento da deflexão nas placas, mostrada na Equação (1).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (1)$$

Para a solução da Equação (1) é necessário atribuição de condições de contorno e de um carregamento genérico  $p$ . Além disso, necessita-se das características geométricas e mecânicas da placa para que o módulo de rigidez à flexão  $D$  seja encontrado a partir da Equação (2).

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Os momentos fletores também estarão presentes, quando se analisa o comportamento da placa. A Equação (3) e Equação (4), representam esses esforços nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

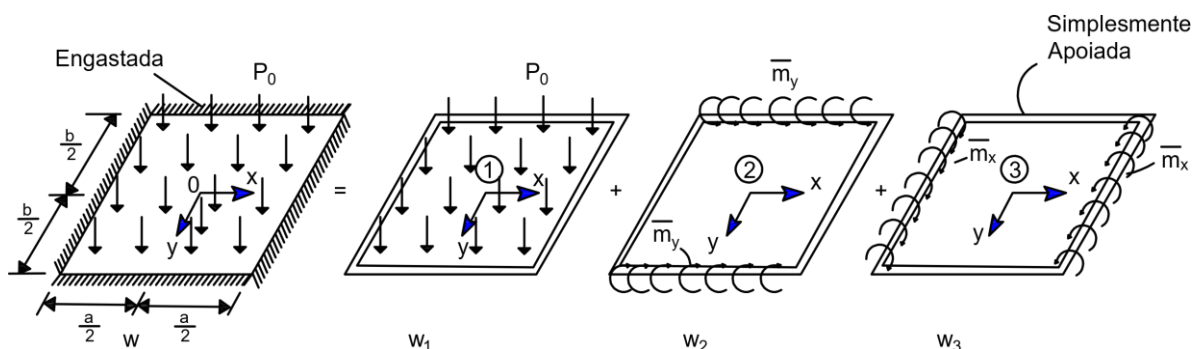
$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

Apesar do conhecimento da equação diferencial da placa, ainda assim, sua solução é complicada e muitas vezes não pode ser resolvida (EMIDIO SOBRINHO, 2012). Porém, quando as condições de contorno são pré-determinadas, pode-se encontrar, de forma mais rápida, a solução da equação, usando a solução de séries duplas de *Fourier* tal qual apresentado por *Navier* ou, então a solução de *Levy* que utiliza série de *Fourier* com apenas uma variável (TIMOSHENKO, 1959).

## 2.1 Solução para uma placa quadrada totalmente engastada

A solução é obtida através do método da superposição, no qual soma-se a equação de deflexão para uma placa simplesmente apoiada submetida à uma carga uniformemente distribuída com a deflexão encontrada quando a placa tem momentos distribuído, tanto no eixo  $x$ , quanto no eixo  $y$ , como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Superposição de placas.



Fonte – Autores, 2023.

Primeiramente encontra-se a deflexão quando a placa está submetida a um momento distribuído, tanto no eixo  $y$ , quanto no eixo  $x$ . O desenvolvimento do cálculo da deflexão pode ser encontrado em *Timoshenko* (1959). Os valores encontrados na

bibliografia citada é dada pela Equação (5), para os momentos distribuídos no eixo  $y$ . Para os momentos distribuídos ao longo do eixo  $x$ , utiliza-se a Equação (6).

$$w = \frac{a^2}{2D\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{m\pi x}{a})}{m^2 \cosh(\alpha_m)} E_m (\alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh(\frac{m\pi y}{a}) - \frac{m\pi y}{a} \sinh(\frac{m\pi y}{a})) \quad (5)$$

$$w = \frac{b^2}{2D\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{m\pi y}{b})}{m^2 \cosh(\alpha_m)} F_m (\beta_m \tanh(\beta_m) \cosh(\frac{m\pi x}{a}) - \frac{m\pi x}{a} \sinh(\frac{m\pi x}{a})) \quad (6)$$

Após determinar a deflexão para os momentos distribuídos, será necessário encontrar os coeficientes  $E_m$  e  $F_m$ , tendo em vista que o valor da deflexão para placas quadradas simplesmente apoiada também pode ser encontrado em *Timoshenko* (1959). Para calcular os coeficientes é necessário derivar a equação da deflexão utilizando os métodos de *Levy* ou de *Navier*, tanto no eixo  $x$ , quanto no eixo  $y$ . Escolhendo a solução de *Levy*, tem-se a Equação (7). Neste trabalho utilizou-se o método *Levy*, no entanto, algumas alterações foram feitas. Por exemplo, como a placa tem simetria dupla, se torna mais vantajoso mover a origem de coordenadas do sistema para o centro, tendo em vista que no método de *Levy* a origem não está no centro.

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos(\frac{m\pi x}{a}) (1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh(\frac{m\pi y}{a}) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh(\frac{m\pi y}{a})) \quad (7)$$

A partir da Equação (7), trabalha-se com as seguintes relações:

$$(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_3}{\partial x})_{\pm \frac{a}{2}} = 0 \quad (8)$$

$$(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial y})_{\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (9)$$

A partir das derivadas das Equações (8) e (9), obtém-se os seguintes resultados:

$$(\frac{\partial w_1}{\partial x})_{\pm \frac{a}{2}} = -\frac{4qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{m^4} (1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh(\frac{m\pi y}{a}) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh(\frac{m\pi y}{a})) \quad (10)$$

e

$$(\frac{\partial w_1}{\partial y})_{\pm \frac{b}{2}} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos(\frac{m\pi x}{a}) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (1 + \alpha_m \tanh(\alpha_m))] \quad (11)$$

As derivadas da deflexão em relação aos momentos distribuídos no eixo  $y$  são as seguintes:



$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{\pm \frac{a}{2}} = \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m}{m \cosh(\alpha_m)} \left[ \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \quad (12)$$

e

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \quad (13)$$

Quanto aos momentos no eixo  $x$ , tem como resultado das derivadas da deflexão, as seguintes equações:

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\right)_{\pm \frac{a}{2}} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{F_m (-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m) (\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)_{\pm \frac{b}{2}} = \frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{F_m}{m \cosh(\beta_m)} \left[ \frac{m\pi x}{b} \sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \right] \quad (15)$$

A partir das Equações (10) à (15), utiliza-se um sistema linear que resulta na Equação (16):

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_3}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_3}{\partial y} \quad (16)$$

Assim, utilizando a primeira parte da Equação (16), obtém-se:

$$\begin{aligned} & -\frac{4qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \\ & = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{E_m}{m \cosh(\alpha_m)} \left[ \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \\ & + \frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \frac{F_m (-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m) (\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \end{aligned} \quad (17)$$

Isolando  $E_m$  e considerando  $a = b$ , tem-se:

$$E_m = \left[ \frac{\frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{1}{2 \cosh(\alpha_m)} \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \cosh(\alpha_m)}{\left( \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)} + \frac{F_m (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) [\beta_m - \tanh(\beta_m) (\beta_m \tanh(\beta_m) - 1)] \cosh(\alpha_m)}{\left( \frac{m\pi y}{a} \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) - \alpha_m \tanh(\alpha_m) \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right)} \right] \quad (18)$$

Agora, utiliza-se a segunda parte da Equação (16) e, deixando  $F_m$  em função de  $E_m$ , obtém-se:

$$F_m = \frac{-\frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (1 + \alpha_m \tanh(\alpha_m))]}{\left[\frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right]} + \frac{E_m (-1)^{(m-1)/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) [\alpha_m - \tanh(\alpha_m) (\alpha_m \tanh(\alpha_m) - 1)] \cosh(\beta_m)}{\left[\frac{m\pi x}{a} \sinh\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \beta_m \tanh(\beta_m) \cosh\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right]} \quad (19)$$

Substituindo a Equação (18) na Equação (19) e colocando o termo  $m = 1$ , obtém-se:

$$E_m = \left[ \frac{\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)^2 \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right. \\ \left. \cdot \frac{4qa^2}{\pi^3 1^3} \left[ 2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\right)}{\left(-\frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(1 + \frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\pi}{2} - \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} \right] \right] \quad (20)$$

Após a resolução da Equação (20), chega-se no seguinte resultado:

$$E_m = -\frac{1,517qa^2}{\pi^3} \quad (21)$$

Assim, pode-se substituir a Equação (21) na Equação (5), já com os termos e os resultados das funções trigonométricas obtidos, produzindo, dessa forma, na Equação (22):

$$w_{2máx} = -0,00140 \frac{qa^4}{D} \quad (22)$$

O procedimento de obtenção da deflexão  $w_3$  é semelhante, tendo em vista que a placa é quadrada. Assim, pelo método da superposição, tem-se:

$$w = w_1 + w_2 + w_3 \quad (23)$$

O valor de  $w_1$  já é predefinido, assim, sendo utilizado junto com o valor da Equação (22). Sabendo que  $w_2$  e  $w_3$  são iguais, obtém-se:

$$w = (0,00406 - 0,00140 - 0,00140) \frac{qa^4}{D} \quad (24)$$



Finalmente, levando em conta todos os termos do lado direito da Equação (23), obtém-se a Equação (25) que possibilita determinar o valor total da deflexão da placa:

$$w = 0,00126 \frac{qa^4}{D} \quad (25)$$

## 2.2 ELEMENTOS FINITOS DE PLACA

A teoria das placas de Mindlin inclui o efeito das deformações de cisalhamento transversal (Reddy, 1997). Nela as normais ao plano médio não deformado da placa permanecem retas, mas não normal à superfície média deformada. O campo de deslocamento assumido para uma placa espessa (espessura  $h$ ) é definido por:

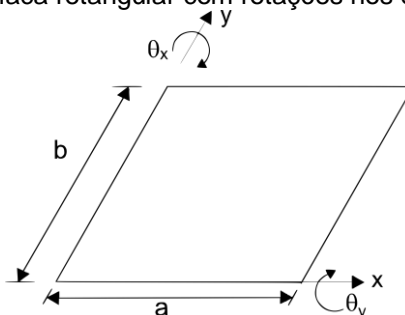
$$u = z\theta_x \quad (26)$$

$$v = z\theta_y \quad (27)$$

$$w = w_0 \quad (28)$$

em que  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  são as rotações da normal ao plano médio em relação a eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Placa retangular com rotações nos eixos.



Fonte – Autores, 2023.

As matrizes deformação-deslocamento  $\mathbf{B}$  para contribuições de flexão e cisalhamento são obtidas por meio da derivação das funções de forma. A matriz de rigidez da placa de Mindlin é então obtida como:

$$\mathbf{K}^e = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f |J| d\xi dn + \alpha h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c |J| d\xi dn \quad (29)$$

em que  $|J|$  é o determinante da matriz jacobiana. O vetor de forças nodais equivalente para as forças distribuídas  $p$  é definido como:

$$f^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N \cdot p \cdot d\xi dn \quad (30)$$

Tanto a matriz de rigidez quanto as integrais do vetor de força são calculadas por integração numérica.

### 3 METODOLOGIA

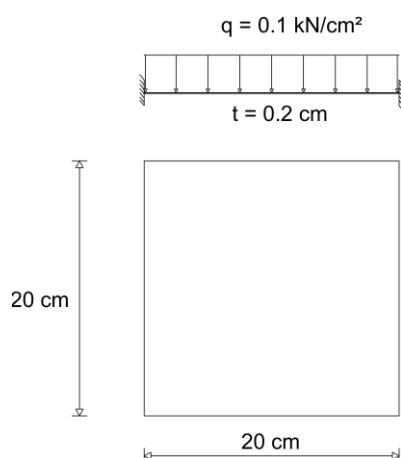
No desenvolvimento deste trabalho, utilizou-se o método Levy, no entanto, algumas alterações foram feitas, sendo elas: como a placa tem simetria dupla, se torna mais vantajoso mover a origem de coordenadas do sistema para o centro, e, assim, as deflexões na placa serão idênticas ao gráfico dos cossenos. Dessa maneira, posteriormente foram obtidos os coeficientes necessários para calcular a deflexão dos momentos distribuídos para uma placa quadrada totalmente engastada. Além disso, realizou-se a modelagem desta estrutura com um programa, escrito pela equipe de pesquisa, na linguagem Scilab versão 6.1.0. com o intuito de analisar a formulação e o código implementado, foi feita uma comparação entre a solução analítica com os resultados obtidos pela solução numérica, quando se varia o tamanho da malha. A deformada da placa é visualizada através do software livre *ParaView* versão 5.6.0.

### 4 APLICAÇÕES DAS SOLUÇÕES

#### 4.2 Solução analítica

Seja a placa quadrada totalmente engastada, conforme a Figura 5, para avaliar a mudança na deflexão.

Figura 5 – Placa totalmente engastada.



$$E = 2,1 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\nu = 0,29;$$

$$a = 20 \text{ cm}.$$

Fonte – Autores, 2023.

Obtendo a rigidez através da Equação (2) e aplicando na Equação (25), juntamente com o carregamento e as dimensões, obtém-se, para  $t = 0,2$  cm,  $t = 0,5$  cm e  $t = 1,0$ , os respectivos resultados:

$$w_{máx} = 1,318896 \text{ cm} \quad (31)$$

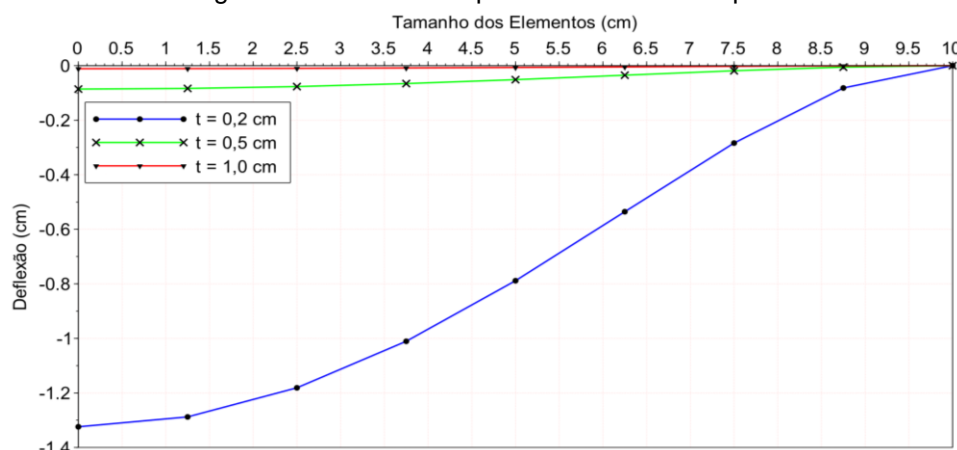
$$w_{máx} = 0,084409 \text{ cm} \quad (32)$$

$$w_{máx} = 0,010551 \text{ cm} \quad (33)$$

## 4.2 Solução numérica

A placa explorada analiticamente na seção anterior será analisada por meio de modelos numéricos. Dessa forma, obtém-se resultados de deflexão para variadas espessuras da placa e o erro percentual para diferentes tamanhos de malha, quando uma determinada espessura é fixada. Além disso, é mostrado a deformada da placa, feita a partir da utilização do programa *ParaView*. A Figura 6 mostra a deflexão da placa para as espessuras de  $t = 0,2$  cm;  $t = 0,5$  cm e  $t = 1,0$  cm.

Figura 6 – Deflexão em placas de variadas espessuras.



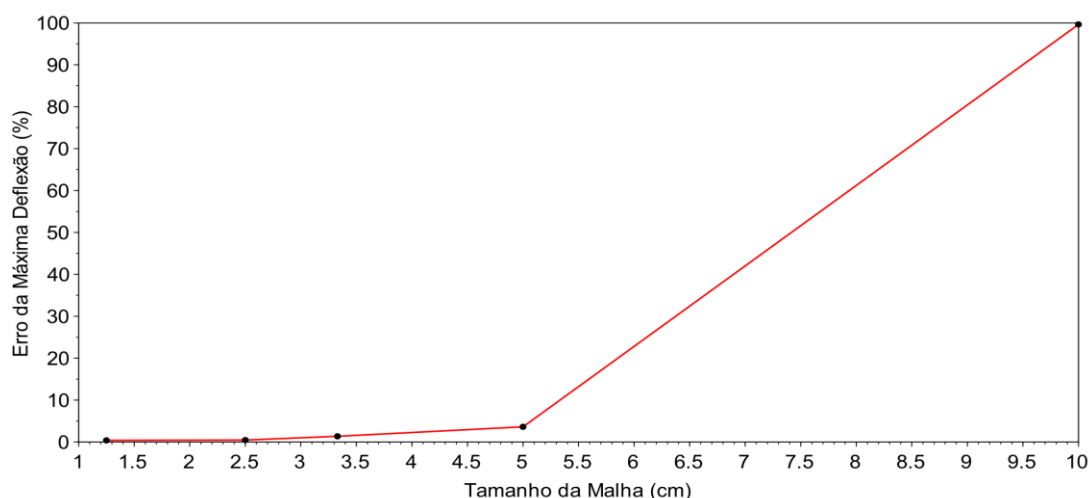
Fonte – Autores, 2023.

Para ver o erro percentual para as variadas malhas, fixou-se uma espessura de  $t = 0,2$  cm. O resultado obtido pode ser visto na Figura 7. A Tabela 1 traz o resultado do gráfico em valores absolutos e o erro relativo percentual. sendo possível perceber que o tamanho da malha é importante para encontrar os resultados mais exatos, ou seja, quanto menor o tamanho dos elementos, mais precisos serão os resultados. O erro relativo percentual é dado pela Equação (34).

$$E\% = \left| \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \right| \cdot 100\% \quad (34)$$

Em que  $x$  é o valor medido e  $\bar{x}$  é o valor de referência. Na tabela 1, o valor de  $x$  é representado por  $w_{scilab}$  e o valor de  $\bar{x}$  é dado pelo  $w_{analítico}$ .

Figura 7 – Deflexão em variados tamanhos de malhas.



Fonte – Autores, 2023.

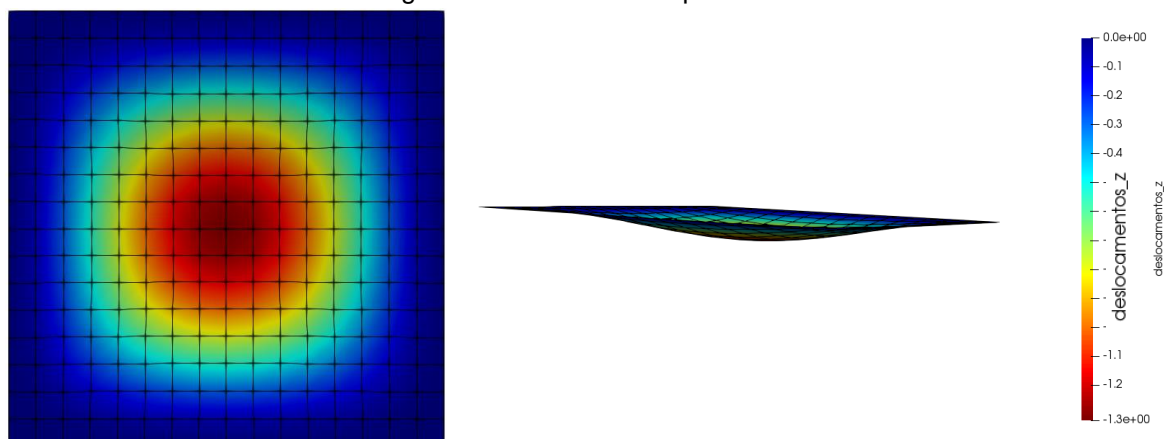
Tabela 1 – Erro percentual dos valores obtidos - MEF *versus* solução analítica.

Dimensões			Deflexão		Erro
Número de elem.	Tamanho dos elem.	malha	$w_{analítico}$	$w_{scilab}$	$erro_{scilab}$
4	10,00	$2 \times 2$	1,318896	0,004914	99,62742%
16	5,00	$4 \times 4$	1,318896	1,271097	3,62417%
36	3,33	$6 \times 6$	1,318896	1,30091	1,36372%
64	2,50	$8 \times 8$	1,318896	1,312668	0,47221%
256	1,25	$16 \times 16$	1,318896	1,324136	0,39730%

Fonte – Autores, 2023.

A Figura 8 mostra a deformada da placa obtida com a malha que apresentou menor erro percentual (malha  $16 \times 16$ ). Pode-se concluir que quanto maior a espessura da placa, menor será a deflexão e quanto menor o elemento de malha, menor será o erro percentual apresentado. Além disso, verifica-se que a maior flecha ocorrerá no centro da placa.

Figura 8 – Deformada da placa em cm.



Fonte – Autores, 2023.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho descreveu-se o desenvolvimento da equação da deflexão para placas quadradas totalmente engastadas, encontrando os coeficientes para os momentos distribuídos. Já no método numérico trabalhou-se com um programa implementado na linguagem de programação *Scilab* versão 6.1.0.

Para uma placa totalmente engastada a deflexão pode ser considerada pequena, isso se deve à restrição maior dos deslocamentos, diminuindo, também os graus de liberdade da estrutura. Verificou-se que a flecha maior ocorre no centro da placa, quando se analisa a ação de um carregamento distribuído. Esse resultado fica ainda mais visível ao analisar a Figura 8. Além disso, verifica-se que a espessura da placa tem grande influência no seu comportamento. Assim, quanto maior este parâmetro for, menor será a deflexão.

A análise por meio dos métodos numéricos usando um código implementado, mostra uma boa convergência dos resultados de deflexão. Verifica-se que, quanto mais refinada for a malha, mais próximo os valores das flechas nas placas serão daqueles obtidos analiticamente. Assim, pode-se concluir que tanto as soluções analíticas, quanto a solução numérica produzem respostas precisas dos deslocamentos para a placa analisada.

## REFERÊNCIAS

Carvalho, Matheus Santos de. **Uma Revisão dos Métodos Clássicos de Análise de Placas**. São Cristóvão, 2020. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2020. Disponível em: <http://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/15845>.

COSTA, R. de S. **Uma Estudo de Equações Diferenciais Aplicado à Deflexão de Vigas**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, outubro 2010. Disponível em: [http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306111/1/Costa\\_RicharddeSouza\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306111/1/Costa_RicharddeSouza_M.pdf).

EMIDIO SOBRINHO, B. **Estudo Analítico e Numérico de Placas Retangulares**. Graduação - Universidade Paulista, Brasília - DF, outubro 2012.

FERREIRA, A.J.M. **Matlab Codes for Finite Element Analysis**. V.157. G.M.L Gladwell Department of Civil Engineering University of Waterloo, Waterloo, Ontario – Canada 2008.

J. N. Reddy. **Mechanics of Laminated Composite Plates**. CRC Press, New York, 1997.

SZILARD, R. **Theory and Analysis of Plates: classical and numerical methods**. New Jersey: Prentice-Hall Inc. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, S. **Theory of Plates and Shells**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959.

Disponível em: < [http://www.cap-recifal.com/ccs\\_files/articles/cuveaqua1\\_denisio/Timoshenko\\_-\\_Theory\\_of\\_plates\\_and\\_shells.pdf](http://www.cap-recifal.com/ccs_files/articles/cuveaqua1_denisio/Timoshenko_-_Theory_of_plates_and_shells.pdf) >.

## STUDY OF DEFLECTION IN FULLY CLAMPED SQUARE PLATES BY MEANS OF ANALYTICAL-NUMERICAL METHODOLOGY

**Abstract:** *Technological advances in engineering have been of great importance for the analysis and design of structures through various software. However, it is common for designers who use them to be unaware of the formulations involved. In this context, the present work shows the obtainment of coefficients used to determine an expression for the calculation of the deflection, applied in fully clamped square plates, through the superposition method and Levy's solution. The formulation of a plate finite element described by Reddy was implemented using the free programming language Scilab. The results were obtained through the analytical formulations and compared with those calculated using the developed code. The values found have a good approximation, and the maximum deflections occur in the center of the plate. Therefore, this work contributes to the teaching-learning process of plate bending theory. The implementation of the formulations makes it possible to apply the solutions in scientific initiation, thus contributing to the solidification and dissemination of knowledge.*

**Keywords:** *fully clamped square plate, numerical methods.*