APLICABILIDADE DO LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL UTILIZANDO SIMETRIAS COM ÊNFASE EM ENGENHARIA

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2023.4621

Jozelita Maria dos Santos Neta - jmsn2@aluno.ifal.edu.br
Instituto Federal de Alagoas

Alberto Heleno Rocha da SIlva - alberto.silva@ifal.edu.br
Instituto Federal de Alagoas

Camila Ferro de Oliveira Farias - cfof1@aluno.ifal.edu.br
Instituto Federal de Alagoas-IFAL

Mariana Farias Vital dos Santos - mfvs1@aluno.ifal.edu.br
IFAL

Vitória Beatriz Silva Souza - vbss2@aluno.ifal.edu.br
Instituto Federal de Alagoas

Resumo: *O Limite Exponencial Fundamental (L.E.F) é uma ferramenta matemática que permite simplificar sistemas complexos ao identificar padrões de simetrias. Assim, esse teorema viabiliza soluções de problemas inerentes ao âmbito das engenharias. No entanto, é visto que os discentes dessa graduação não identificam aplicações do cálculo na área de atuação profissional. Como consequência, o processo de aprendizagem se torna mecanizado - com base na memorização de fórmulas e roteiros. Nesse contexto, este artigo objetiva evidenciar e demonstrar o L.E.F - fundamentando-se no uso de simetrias. No mais, busca-se mostrar que esse limite é utilizado no exercício da profissão, respaldando-se na metodologia de ensino Project Based Learning (PBL). Para isso, realizou-se revisões sistemáticas para compor o suporte acadêmico, assim como se usou softwares para elaboração de gráficos, os quais destacam e simplificam os parâmetros simétricos. Dessa maneira, foi possível demonstrar o limite analisado neste artigo, viabilizando aos discentes verificarem os princípios matemáticos que o regem. Aliado ao exposto, exemplificou-se um problema usual nas demandas de engenheiros que é solucionado utilizando o L.E.F. Nessa perspectiva, mostrou-se aos acadêmicos aplicações reais do cálculo, em uma abordagem baseada em problemas. Portanto, nota-se que o L.E.F é fundamental para o perfil profissional* *dos engenheiros, haja vista que viabiliza e simplifica processos matemáticos. Por fim, enfatiza-se que o uso de aplicações práticas nas áreas exatas é essencial para que os estudantes possam aprender de forma efetiva, desmistificando as concepções comuns apresentadas neste artigo.*

Palavras-chave: *Aplicabilidade, Engenharia, Limite Exponencial Fundamental, Otimização, Simetrias.*

APLICABILIDADE DO LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL UTILIZANDO SIMETRIAS COM ÊNFASE EM ENGENHARIA

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do cálculo diferencial tem sua trajetória baseada na busca por resoluções de problemas inerentes ao cotidiano social (LIVIO, 2011). Desse modo, inúmeras descobertas matemáticas ocorreram despretensiosamente, como é o caso das simetrias, as quais foram evidenciadas em um cenário turbulento entre notáveis cientistas que intentavam descobrir as raízes das equações quínticas – até o momento vistas como insolúveis (STEWART, 2012). Nessa perspectiva, viu-se o caráter principal das relações simétricas: a viabilidade e a facilidade para resolver cálculos mais complicados.

Em paralelo, tem-se o cálculo diferencial e integral aplicado na grade curricular dos cursos de Engenharia, como fundamento para o desenvolvimento das matérias concernentes ao perfil do engenheiro – fato que retorna ao conceito primordial das ciências exatas: a resolução de problemas. Assim, os discentes dos cursos de engenharias têm contato com os princípios da matemática desde o início da graduação, utilizando esses princípios como ferramentas durante todo o percurso acadêmico e sua vida profissional.

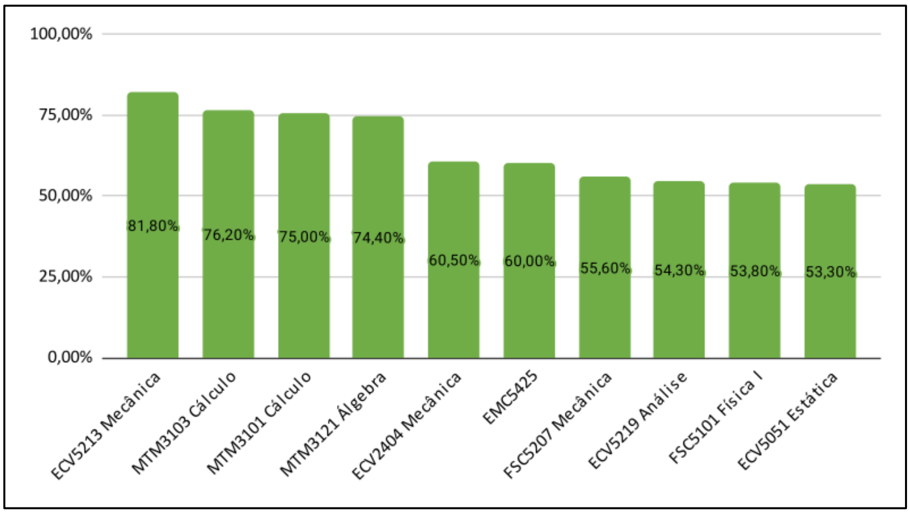
Todavia, é comum ver os estudantes memorizarem equações e teoremas na tentativa de aplicá-los, com o objetivo de obter êxito nas avaliações, sem que haja o conhecimento efetivo dos fundamentos que acarretam tais preceitos e sem perspectiva de utilização além do instrumento avaliativo. Como consequência, fomenta-se a aplicação inconsistente desses princípios matemáticos, muitas vezes pelos próprios professores de cálculo, suscitando diversos déficits no percurso acadêmico e profissional dos discentes, haja vista que a superficialidade do conteúdo impossibilita que os discentes compreendam problemas mais sofisticados e aplicados, como os que são encontrados em disciplinas específicas das diversas engenharias, as quais aplicam o cálculo em problemas reais, como é o caso de disciplinas como a Engenharia Econômica, a Mecânica dos Sólidos, dentre outras. Em específico, a Mecânica dos Sólidos usa equações matemáticas como fundamento para o dimensionamento de estruturas (vigas, pilares e estruturas afins).

Essa problemática é acentuada pelo pensamento errôneo de não haver aplicações da área do cálculo específica para engenharias. Dessa maneira, os alunos acreditam que os teoremas e equações não irão agregar no perfil profissional e, portanto, não há necessidade de aprendê-los de forma adequada. Consequentemente, suscitam-se níveis altos de reprovação e desistência do curso, como apresentado pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), a qual apresenta um dossiê sobre os índices de reprovação no curso de engenharia civil em sua grande curricular (Figura 1), identificando que a maior dificuldade dos discentes do curso está justamente na área de matemática, cálculo, física e mecânica.

Diante do exposto, este artigo alinha o estudo das simetrias aplicadas ao cálculo diferencial à compreensão dos fenômenos matemáticos (LIVIO, 2011) vistos no âmbito das engenharias, a fim de que o discente compreenda os modos e justificativas que levam às aplicações das equações, em um modelo de ensino baseado em problemas – PBL (*Project Based Learning*). Em específico, este estudo versa acerca da análise do Limite Exponencial Fundamental (L.E.F), o qual é amplamente utilizado nos problemas aplicados à engenharia, principalmente no cálculo de limites e no cálculo diferencial e integral. Desse modo, o L.E.F.

será analisado através dos parâmetros de simetrias que possibilitam e explicam o supracitado teorema e, por sua vez, como esse é usado na esfera profissional.

Figura 1 - Índice de Reprovações dos Alunos da Engenharia Civil nas Disciplinas Curriculares 2022 – 1.



Fonte: PET ENG. CIVIL – UFSC.

2 METODOLOGIA

Com a finalidade de analisar os modelos matemáticos que dão sustentação aos teoremas do cálculo, aplicados usualmente nos cursos de graduação em Engenharia – em específico, o uso do L.E.F. como requisito para resolução de problemas –, foi realizada uma revisão bibliográfica. Essa, se deu por meio de consultas literárias aos livros de cálculo, de cálculo aplicado e de aplicações matemáticas inerentes ao contexto deste artigo. Somado ao exposto, a fim de obter um maior embasamento teórico, foram realizadas leituras complementares de materiais indispensáveis à construção do conhecimento voltado às simetrias, haja vista que esse princípio é essencial para a aprendizagem efetiva do limite em estudo, leitura essa que nos permite afirmar que um modelo matemático (uma equação, um teorema, etc.) é uma simetria aplicada diretamente no contexto teórico e social.

Nessa perspectiva, iniciou-se as análises com o conteúdo de simetria alinhado aos limites. Esse, respaldou-se na aplicação de definições, propriedades e teoremas. Em conjunto, utilizou-se o software matemático Geogebra, para modelagem de gráficos e visualização das simetrias nos gráficos das funções. Dessa maneira, tornou-se viável conhecer o L.E.F. e suas aplicações no âmbito profissional.

2.1 Demonstração do limite exponencial fundamental com ênfase nas simetrias

Sabe-se que algumas expressões numéricas não possuem valores predeterminados, sendo denominados como indeterminações, principalmente as que envolvem limites. Dentre essas, apresenta-se o caso 1^{∞} (um elevado ao infinito). Em específico, trata-se da seguinte expressão, quando se toma n suficientemente grande, ou seja, $n \to \infty$:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \tag{1}$$

Note que, se o valor de n for suficientemente grande (por exemplo, da ordem de 10^9), o quociente $\frac{1}{n}$ tenderá ao zero $\left(\frac{1}{n} = 0{,}000000\dots00001\right)$ e, como consequência, $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ é um número ligeiramente maior que 1 $\left(1+\frac{1}{n} = 1{,}000000\dots00001\right)$, cujo limite é exatamente 1; ao mesmo tempo em que a potência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para o mesmo valor de n se torna na seguinte indeterminação 1^∞ (IEZZI et al, 2005). Percebe-se que para encontrar algum resultado é necessário realizar uma avaliação por meio do cálculo de limites.

Dessa forma, para calcular os limites que envolvem esse tipo de expressão usam-se parâmetros de simetrias, os quais encontram-se presentes na análise da convergência dessas funções. Assim, será demonstrado o limite da equação $(\mathbf{1})$ quando $n \to \infty$.

A priori, a referida expressão pode ser analisada como um binômio de Newton do tipo $(a+b)^n$, em que $a = 1\ e\ b = \frac{1}{n}$. Dessa maneira, tomando $n \in \mathbb{N}$ e realizando a expansão desse binômio e considerando que $\left(1+\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^*$ quando $n \to 0^+$, temos que:

$$\begin{gathered}
\left(1+\frac{1}{0}\right)^0 = 1 \\
\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 1+\frac{1}{1} \\
\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{1}{2^2} \\
\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{1}{3^3} \\
\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot 1^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4^0}+\frac{4}{4^1}+\frac{6}{4^2}+\frac{4}{4^3}+\frac{1}{4^4} \\
\dots
\end{gathered} \tag{2}$$

É importante observar aqui, que o padrão da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ consiste em $n+1$ termos, cada um deles na forma $a^{n-k}\cdot b^k$, onde $k = 0,1,2,\dots,n$. Além disso, observe que os coeficientes dos termos formam um triângulo $(\mathbf{3})$, conhecido como Triângulo de Pascal (LIMA, 1987b), que é o triângulo formado pelos coeficientes numéricos do desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$, em que cada coeficiente é resultado de $\binom{n}{k} = C_n^k$ – note também que, esse triângulo $(\mathbf{3})$ é, por si só, dotado de simetria axial em relação ao eixo vertical principal (SILVA, 2014), ou seja, se traçarmos um segmento de reta vertical que passa pelos números 1, 2, 6, ..., é possível observar que os números têm igual valor tanto à esquerda do segmento traçado, como à direita (como se tivessem sido refletidos num espelho, mas sem inverter à imagem):

$$\begin{gathered}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1
\end{gathered} \tag{3}$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$
$$\dots$$

Com base no observado, para viabilizar o cálculo dos coeficientes binomiais usa-se a fórmula seguinte (LIMA, 1987b), obtida da análise combinatória

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k \tag{4}$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Aplicando a equação $(\mathbf{4})$ na equação $(\mathbf{1})$ obtém-se:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \tag{5}$$

Realizando as simplificações matemáticas necessárias, chega-se à seguinte igualdade:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots + \frac{1}{n^n} \tag{6}$$

Aplica-se limite em ambos os lados da igualdade expressa na equação $(\mathbf{6})$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots + \frac{1}{n^n}\right) \tag{7}$$

Usando as propriedades adequadas se encontra:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \tag{8}$$

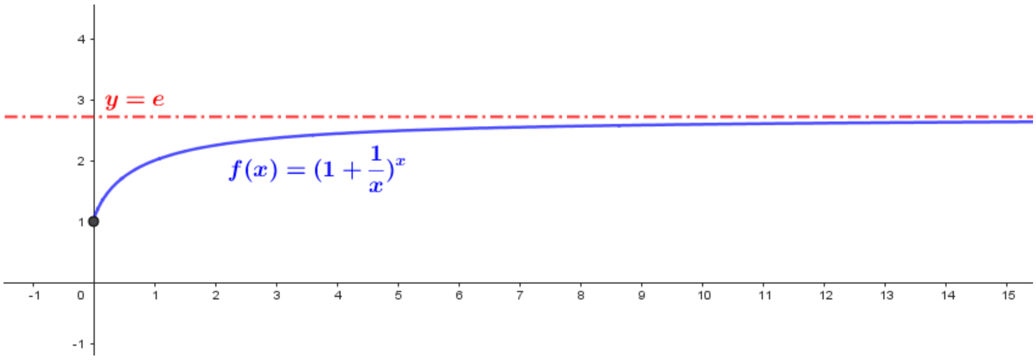
Note que o Limite Exponencial Fundamental pode ser reescrito como uma série (STEWART, 2016), a qual converge para o número de Euler (e). Dessa forma, encontramos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{9}$$

e, consequentemente, podemos definir que (LIMA, 1987a; IEZZI, et al, 2005):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \tag{10}$$

Figura 2 - Gráfico do Limite Exponencial Fundamental



Fonte: Elaboração própria utilizando o software Geogebra, 2023.

O resultado obtido (Figura 2) é fundamental para o cálculo dos limites exponenciais, fazendo algumas manipulações na função original $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, a fim de encontrar essa expressão e tornar possível o cálculo do limite. Todavia, é comum aos discentes apenas memorizar esse resultado, sem que haja o conhecimento efetivo das causas que ocasionam sua existência. Desse modo, esta demonstração proporciona aos estudantes visualizar os parâmetros matemáticos que fomentam o uso do L.E.F., bem como é possível verificar como que os tópicos do cálculo se relacionam.

É bom salientar aqui também que (IEZZI et al, 2005),

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \tag{11}$$

e para demonstrarmos tal limite vamos nos utilizar da poderosa ferramenta de simetria (STEWART, 2012) aplicando uma congruência de limites que nos permite identificar o L.E.F. da equação $(\mathbf{10})$ (SILVA, 2014).

Observe que se fizermos a seguinte substituição

$$x\to-\infty \Leftrightarrow x=-\infty=-y \Leftrightarrow y\to+\infty$$
$$\therefore x=-y$$

a equação $(\mathbf{11})$ fica

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\equiv\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y-1}+\frac{1}{y-1}\right)^{y} \tag{12}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

Fazendo a seguinte substituição

$$y \to +\infty \Leftrightarrow y-1 = +\infty = z \Leftrightarrow z \to +\infty$$
$$\therefore y-1 = z \Rightarrow y = z+1$$

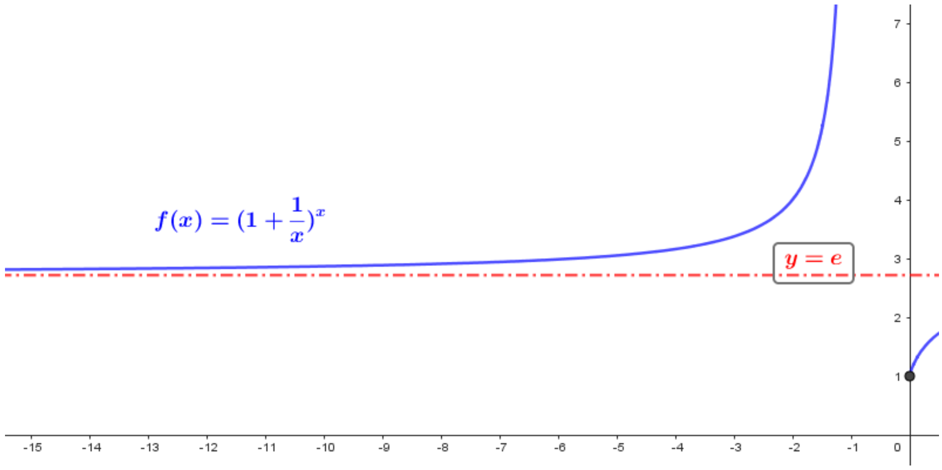
a equação $(\mathbf{12})$ fica

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} \equiv \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)$$
$$= \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot(1+0) = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} \quad (13)$$

Note que o último limite na variável z é uma simetria (STEWART, 2012; LIVIO, 2011) do limite da equação (10), ou seja, é equivalente ao L.E.F. (SILVA, 2014). Consequentemente, temos

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \equiv \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} \equiv \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e \quad (14)$$

Figura 2 - Gráfico do Limite Exponencial fazendo x→-∞



Fonte: Elaboração própria utilizando o software Geogebra, 2023.

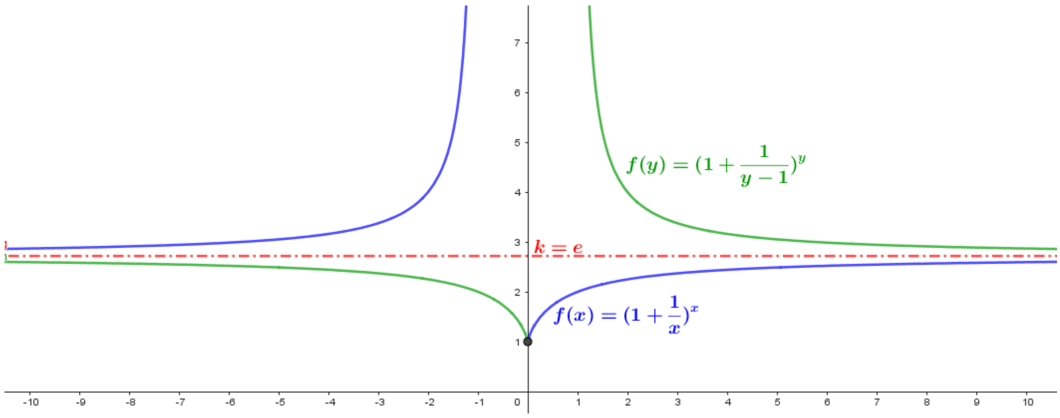
Com isso provamos que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad (15)$$

Observe que as transformações feitas para alterar as variáveis nos limites das funções altera também os gráficos, mas o limite se mantém. Isso ocorre porque temos aqui uma simetria (SILVA, 2014) aplicada à topologia, que permite mudar uma forma (no nosso caso o gráfico) sem alterar as quantidades (que nesse caso são os limites que são mantidos inalterados). A figura 3 mostra a simetria dos gráficos das funções cujos limites são representados em $(\mathbf{10})$, $(\mathbf{11})$ e $(\mathbf{12})$.

Observe, de acordo com Silva (2014), que $f(y) = S[f(x)]$, ou seja, a função $f(y)$ corresponde a uma simetria de reflexão em relação ao eixo vertical do gráfico (Figura 3).

Figura 3 – Simetrias das funções $\mathrm{f(x)} = \left(1+\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^{\mathrm{x}}$ e $\mathrm{f(y)} = \left(1+\frac{1}{\mathrm{y}-1}\right)^{\mathrm{y}}$



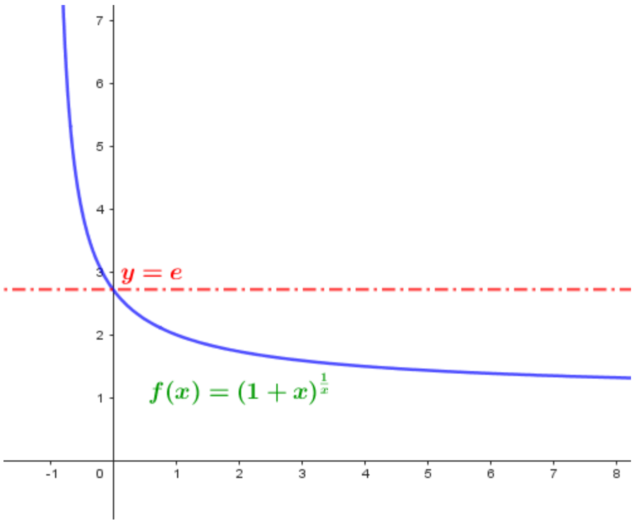
Fonte: Elaboração própria utilizando o software Geogebra, 2023.

Outro limite importante, que também decorre do L.E.F. é o seguinte:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x} = e \qquad (16)$$

Esse limite é confirmado pelo gráfico (Figura 4), contudo sua demonstração se baseia nos requintes de simetria dada pela equação $(\mathbf{10})$. Vejamos:

Figura 4 – Limite de $\mathrm{f(x)} = \sqrt[\mathrm{x}]{1+\mathrm{x}}$ quando $\mathrm{x} \to 0$.



Fonte: Elaboração própria utilizando o software Geogebra, 2023.

Para provar que $(\mathbf{16})$ é verdadeiro, deve-se primeiramente provar que

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt[x]{1+x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{1+x}.$$

Calculando, inicialmente

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt[x]{1+x} = \lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{17}$$

fazendo a seguinte substituição

$$x \to 0^- \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\infty = v \Leftrightarrow v \to -\infty$$
$$\therefore \frac{1}{x} = v \Rightarrow x = \frac{1}{v}$$

e aplicando a substituição acima em $(\mathbf{17})$ temos pelo resultado $(\mathbf{15})$

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt[x]{1+x} = \lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} \equiv \lim_{v\to -\infty} \left(1+\frac{1}{v}\right)^v = e$$

E, agora vamos calcular

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{1+x} = \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{18}$$

fazendo a seguinte substituição

$$x \to 0^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x} = +\infty = w \Leftrightarrow w \to +\infty$$
$$\therefore \frac{1}{x} = w \Rightarrow x = \frac{1}{w}$$

Aplicando a substituição acima em (18) temos pelo resultado (10)

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{1+x} = \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \equiv \lim_{w\to +\infty} \left(1+\frac{1}{w}\right)^w = e$$

Finalmente, como $\lim_{x\to 0^-} \sqrt[x]{1+x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{1+x} = e$, podemos concluir, pelo teorema da condição de existência de um limite (IEZZI et al, 2005), que $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x} = e$.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Conforme dados fornecidos pela Organização das Nações Unidas – ONU, no ano de 2022, a população mundial ultrapassou 8 bilhões de pessoas. Entretanto, verifica-se que tal crescimento afeta diretamente na infraestrutura urbana, uma vez que existem recursos finitos e limites físicos no planeta (ONU, 2022). Desse modo, vê-se que há a necessidade de adaptar os espaços urbanizados, a fim de atender às demandas crescentes dos indivíduos (GUITARRARA). Nesse sentido, destaca-se o papel desempenhado pela engenharia civil no viés de resolução de tal déficit urbano.

Com isso, os engenheiros dispõem de modelos matemáticos e de expertises para atuar no planejamento, no projeto e na execução de infraestruturas que satisfaçam às necessidades da população em expansão. O primeiro passo para a resolução de problemas que se fundamentam na quantidade de indivíduos do corpo social – tais como o dimensionamento de sistemas de abastecimento, esgotamento sanitário, redes de drenagem pluvial, sistemas monetários, entre outros aspectos – e estimar o crescimento populacional.

Nesse contexto, encontramos uma boa aplicação do L. E. F., uma vez que, de acordo com Lima (1987a), a função exponencial descreve matematicamente a evolução de uma grandeza, cuja taxa de crescimento é proporcional à quantidade atual do processo. Exemplificando essa problemática, é possível estimar o número de habitantes no mundo em 2030 e em 2050. Para esse cálculo, usa-se a fórmula da função exponencial (equação 19), dada por:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + c)^t \tag{19}$$

onde, $P(t)$ é a população estimada, P_0 é a população inicial, c é a taxa de crescimento expressa de forma decimal e t é o número de anos decorridos desde o ano inicial.

Sabe-se que em 2022 o número de habitantes é de 8 bilhões – como informado anteriormente – e a taxa de crescimento da população mundial é de 1,1% (GUITARRARA). Observe também que $t = t_1 = 8$ anos para 2030 e $t = t_2 = 28$ anos para 2050. Aplicando esses valores na equação (19), obtemos:

$$P(t_1) = P_0(1 + c)^{t_1} \Rightarrow P(8) = 8 \cdot 10^9(1 + 0{,}011)^8 = 8{,}732 \cdot 10^9 \tag{20}$$

e

$$P(t_2) = P_0(1 + c)^{t_2} \Rightarrow P(28) = 28 \cdot 10^9(1 + 0{,}011)^{28} = 1{,}097 \cdot 10^{10} \tag{21}$$

Portanto, segundo os cálculos, a população estimada para os anos de 2030 e 2050 é de, respectivamente, $8{,}7$ bilhões e 10 bilhões de habitantes. Enquanto isso, a ONU projeta que em 2030 haja $8{,}5$ bilhões de indivíduos e em 2050 esse valor alcance $9{,}7$ bilhões (GUITARRARA). Ressalta-se que esses valores são inexatos, como mencionado anteriormente, haja vista que se trata de uma estimativa. Assim, como os valores encontrados estão próximos aos dados fornecidos pela ONU, tem-se que esse resultado é satisfatório.

Uma aplicação mais direta do L.E.F. é apontada por Leithold (1994) quando o assunto é economia, na avaliação de certas decisões. Considere a seguinte fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} \tag{22}$$

que determina A, o número de quantidades monetárias da quantia após t anos, se P unidades monetárias forem investidas a uma taxa anual de $100i\%$, compostos m vezes por ano. Suponha a situação na qual os juros sejam continuamente compostos, ou seja, considere a fórmula (22), onde fazemos o período de juros por ano crescer indefinidamente. Assim, aplica-se limite a fórmula fazendo $m \to +\infty$ e manipula-se de tal modo que

$$A = \lim_{m \to +\infty} P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = P \cdot \lim_{m \to +\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = P \cdot \lim_{m \to +\infty}\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{it} \quad (23)$$

Fazendo a seguinte substituição

$$m \to +\infty \Leftrightarrow m = +\infty = ni \Leftrightarrow n \to +\infty$$
$$\therefore m = ni$$

na igualdade (23), tem-se

$$A = P \cdot \left[\lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{i}{ni}\right)^{\frac{ni}{i}}\right]^{it} = P \cdot \left[\lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{it} = P \cdot e^{it} \quad (24)$$

e assim, a equação (22) se torna

$$A = Pe^{it} \quad (25)$$

Fazendo t variar em $\mathbb{R}_+^*$ é fácil ver pela equação (25) que A é uma função contínua em t.

Uma outra maneira de considerar a mesma situação é supondo que o investimento de P unidades monetárias cresça a uma taxa proporcional ao seu tamanho. Essa lei é conhecida como **lei do crescimento natural** (LEITHOLD, 1994). Então, se A unidades monetárias forem a quantia em t anos, teremos

$$\frac{dA}{dt} = kA \quad (26)$$

onde k é uma constante e $A = P$ para $t = 0$, de acordo com a equação (25); consequentemente

$$A = Pe^{kt} \quad (27)$$

Comparando o resultado em (27) com o resultado em (25) é fácil ver que $k = i$. Desse modo, se um investimento cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho, dizemos que os juros foram **compostos continuamente** e que a taxa anual de juros é a própria constante de proporcionalidade (LIMA 1987b).

Por exemplo, se $R\$ \ 5.000{,}00$ forem investidos a uma taxa de 12% ao ano, compostos continuamente, e A unidades monetárias for o montante do investimento em 1 ano, tem-se

$$A = 5.000 \cdot e^{0{,}12} = 5.000 \cdot 1{,}1275 = 5.637{,}50$$

ou seja, a pessoa deverá receber $R\$ \ 5.637{,}50$. Se j for a taxa de juros efetivos, temos

$$5.000 \cdot (1+j) = 5.000 \cdot e^{0{,}12} \Rightarrow 1 + j = e^{0{,}12} \Rightarrow j = 1{,}1275 - 1 = 0{,}1275 = \frac{12{,}75}{100} = 12{,}75\%$$

que resulta numa taxa anual efetiva de juros de $12{,}75\%$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo visou ressaltar a importância do cálculo diferencial e das simetrias para o desenvolvimento dos modelos matemáticos aplicados às engenharias, bem como para a solução de problemas cotidianos, haja vista que a matemática pode facilitar e viabilizar cálculos, sendo as funções exponenciais e o L.E.F. modelos matemáticos utilizados em problemas recorrentes nas engenharias. Entretanto, verificou-se que muitos estudantes acabam memorizando conceitos sem compreender de fato como aplicá-los em situações reais.

Nessa perspectiva, a utilização da metodologia *Project Based Learning* é uma alternativa para tornar o ensino de cálculo mais atrativo e eficaz, possibilitando o aprendizado por meio da aplicação em problemas do âmbito profissional, como se viu nos exemplos propostos por este artigo – em que houve a aplicação da função exponencial para se obter o crescimento populacional, e tornar possível, por exemplo, o dimensionamento das redes de abastecimento e drenagem através de modelos exponenciais e também do L. E. F. para o cálculo de investimentos à juros contínuos. Para mais, essa ferramenta de ensino viabiliza a desmistificação do senso comum em que não é visto aplicações no viés da engenharia para o cálculo.

Por fim, ressalta-se que o cálculo diferencial deve ser estudado de maneira aplicada aos problemas reais, para que os discentes – futuros profissionais da engenharia – possam compreender com clareza os conteúdos e, por consequência, o utilizem adequadamente. Assim, evita-se a superficialidade no aprendizado, proporcionando uma formação acadêmica completa e satisfatória.

REFERÊNCIAS

GUITARRARA, Paloma. População mundial. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/a-populacao-mundial.htm. Acesso em: 06 mai. 2023.

IEZZI, Gelson, MURAKAMI, Carlos e MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar, 8.** Limites, derivadas, noções de integral. 6.ed. São Paulo: Atual, 2005.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** v.1. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, Elon. **A matemática do Ensino Médio.** v.1. Rio de Janeiro: SBM, 1987a.

LIMA, Elon. **A matemática do Ensino Médio.** v.2. Rio de Janeiro: SBM, 1987b.

LIVIO, Mario. **A equação que ninguém conseguia resolver. Como um gênio da matemática descobriu a linguagem da simetria.** São Paulo: Record, 2011.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS (ONU). População mundial chegará a 8 bilhões em novembro de 2022. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/189756-popula%C3%A7%C3%A3o-mundial-chegar%C3%A1-8-bilh%C3%B5es-em-novembro-de-2022. Acesso em: 06 mai. 2023.

SILVA, Alberto. **Simetrias para o ensino de equações e funções na educação básica.** 2014. Dissertação de Mestrado – curso de Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014. Disponível em: http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/6197. Acesso em: 22 abr. 2022.

STEWART, Ian. **Uma História da Simetria na Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1.** 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

UFSC. PET ENG. CIVIL UFSC. Gráfico de barras: Índice de reprovações dos alunos da engenharia civil nas disciplinas curriculares 2022-1. Disponível em: https://petecv.ufsc.br/indice-de-reprovacoes/ . Acesso em: 03 de jun. de 2023.

APPLICABILITY OF THE FUNDAMENTAL EXPONENTIAL LIMIT USING SYMMETRIES WITH AN EMPHASIS ON ENGINEERING

Abstract: *The Fundamental Exponential Limit (F.E.L) is a mathematical tool that allows for the simplification of complex systems by identifying symmetrical patterns. Thus, this theorem enables solutions to problems inherent in the field of engineering. However, it is observed that undergraduate students in this discipline fail to recognize the applications of calculus in their professional area of practice. As a consequence, the learning process becomes mechanized, relying on the memorization of formulas and procedures. In this context, this article aims to highlight and demonstrate the F.E.L, based on the use of symmetries. Furthermore, it seeks to demonstrate that this limit is employed in professional practice, supported by the Project-Based Learning (PBL) teaching methodology. To achieve this, systematic reviews were conducted to provide academic support, and software was utilized for the creation of graphs, which emphasize and simplify symmetrical parameters. In this manner, it was possible to demonstrate the limit discussed in this article, enabling students to verify the underlying mathematical principles. In addition, a typical problem encountered in the demands of engineers, which can be solved using the F.E.L, was exemplified. From this perspective, real-world applications of calculus were demonstrated to students in a problem-based approach. Therefore, it is evident that the F.E.L is fundamental to the professional profile of engineers, as it enables and simplifies mathematical processes. Finally, it is emphasized that the use of practical applications in the exact sciences is essential for effective student learning, dispelling common misconceptions presented in this article.*

Keywords: *Applicability, Engineering, Fundamental Exponential Limit, Optimization, Symmetries.*