



## ENSINO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS USANDO ÁLGEBRA LINEAR E PROGRAMAÇÃO: APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2022.4068

Fernando da Silva Araújo - fernando.araujo@cefet-rj.br  
CEFET RJ

Alexandre Luiz Pereira - alexluizp@gmail.com  
CEFETRJ

**Resumo:** *Este trabalho tem por objetivo aplicar uma estratégia de ensino para o estudo de transformação de tensão e tensões principais, na disciplina Resistência dos Materiais que compõe o ciclo profissionalizante de disciplinas da Graduação em Engenharia Mecânica, do CEFET/RJ Campus Angra dos Reis. Este tipo de metodologia ativa de aprendizagem proporciona motivação, interesse, autonomia e interação dos alunos diante de cada uma das etapas realizadas no trabalho. A trabalho proposto foi a determinação de tensões em planos representados por sistema de coordenadas rotacionado, tensões principais e direções principais no material utilizando os conceitos de matriz de rotação e autovalores/autovetores estudados em Álgebra Linear via software de programação (open source). Para a execução do trabalho, formou-se grupos de dois ou três alunos a fim de estimular o trabalho em equipe. Além disso, aplicou-se um questionário sobre os aspectos metodológicos da atividade. A partir das respostas ao questionário foi verificada a importância da estratégia de ensino empregada com a qual os alunos conseguiram assimilar o assunto e compreenderam fenômenos complexos de forma mais fácil e motivadora.*

**Palavras-chave:** : Aprendizagem ativa. Ensino de resistência dos materiais. Tensões principais. Autovalores



# **ENSINO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS USANDO ÁLGEBRA LINEAR E PROGRAMAÇÃO: APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES**

## **1 INTRODUÇÃO**

Segundo as novas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de Engenharia, uma das competências que o egresso deve apresentar é ser capaz de modelar os fenômenos, os sistemas físicos e químicos, utilizando diversos tipos de ferramentas, sejam elas matemáticas, estatísticas, computacionais e de simulação, entre outras. O conhecimento de conceitos como mudança de base de sistema de referência, autovalores/autovetores e cálculo matricial na disciplina de Álgebra Linear é fundamental e se encontra nos ciclos básicos dos cursos das Engenharias. Muitos fenômenos e problemas nas áreas da mecânica, metalúrgica, elétrica, civil e outras são modelados e resolvidos utilizando os conceitos de Álgebra Linear. Além disso, o uso de ferramenta computacional vem sendo bastante utilizada no processo de ensino aprendizagem de engenharia (CARVALHO *et al.*, 2020; SILVA *et al.*, 2020).

Ainda é comum o ensino no ciclo básico dos cursos focado apenas nos conceitos matemáticos e computacionais de forma isolada, sem trabalhar as aplicações dessas ferramentas na modelagem e resolução de problemas de engenharia. Ou seja, muito teórico e sem ter exemplos de aplicações, extremamente importantes para a motivação de alunos ingressantes das Engenharias. Sendo assim, os alunos se sentem desmotivados e ficam sem compreender a devida aplicação dos conteúdos aprendidos.

O ensino de engenharia por si só gera desafios ainda maiores devido à sua complexidade e peculiaridade no que tange os fenômenos físicos e ferramentas matemáticas associadas (GAVAZZA, 2011; SILVA, 2012; TEIXEIRA e NAKAO, 2012). Diante disso, atualmente, o Núcleo Docente Estruturante (NDE) do Curso de Engenharia Mecânica do CEFET/RJ Campus Angra dos Reis está estudando as necessidades que as disciplinas profissionalizantes e específicas esperam que os alunos aprendam (Exemplos: conceitos e ferramentas matemáticas ou físicas) do Ciclo Básico do curso para propor melhorias no processo de ensino-aprendizagem e proporcionar melhor interação entre os componentes curriculares do curso. Além disso, com esse estudo se espera uma interação maior entre docentes dos ciclos profissionalizantes e específicos com os docentes do ciclo das disciplinas básicas. Vale ressaltar que o aluno estuda primeiro a base da engenharia que são as disciplinas do ciclo básico para depois entrar nas disciplinas profissionalizantes e/ou específicas.

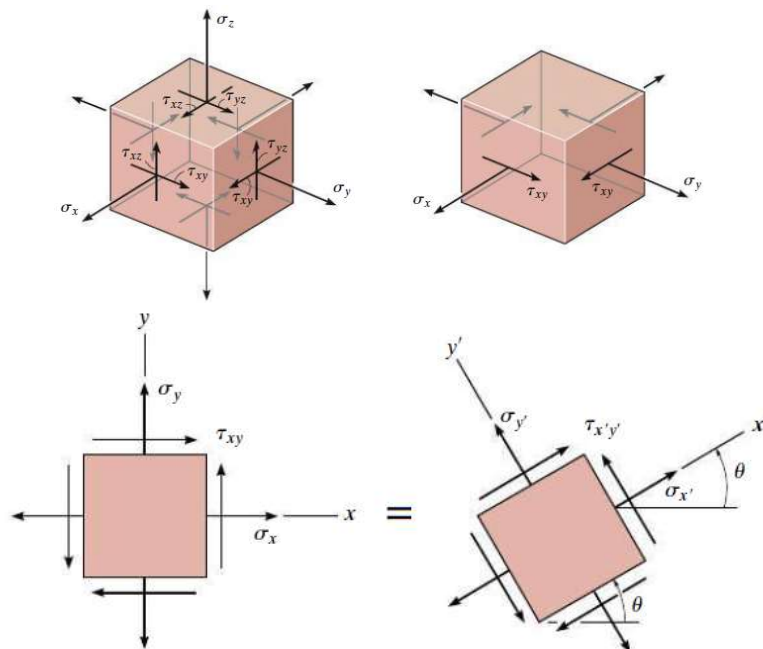
Diante do exposto, este trabalho tem por objetivo aplicar uma estratégia de ensino utilizando os conceitos de autovalores/autovetores e matriz de rotação estudados em Álgebra Linear via *software* de programação (*open source*), na solução de problemas de transformações de tensões e tensões principais que aparecem na disciplina de Resistência dos Materiais.

## 2 TRANSFORMAÇÃO DE TENSÕES E TENSÕES PRINCIPAIS NO PLANO

### 2.1 Transformação de tensão no plano

O estado geral de tensão em um elemento infinitesimal é caracterizado por seis componentes de tensão, normal e de cisalhamento, conforme mostra a Figura 1(a). Contudo, na maioria das aplicações na prática da engenharia as tensões agem apenas no plano visto na Figura 1(b). Diz-se que o material está sujeito ao estado plano de tensões.

Figura 1 – Representação das componentes de tensão para o estado geral (a) e estado plano de tensão (b). Representação do elemento plano no sistema de coordenadas (x-y) (c) e no sistema rotacionado (x'-y') (d).



Fonte: Hibbeler (2018)

O tensor tensão de Cauchy para o caso plano de tensão ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ) representado no sistema de coordenadas de referência (x, y) é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

O mesmo estado de tensão representado no sistema de coordenadas (x, y) (Figura 1.(c)) pode ser representado em outro sistema de coordenadas (x', y') rotacionado de um ângulo ( $\theta$ ) em torno do eixo- z no sentido anti-horário (Figura 1.(d)).

A matriz de rotação é representada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Por sua vez, o tensor tensão ( $\sigma'$ ) no sistema de coordenadas rotacionado ( $x', y'$ ) é obtido pela relação

$$\sigma' = Q\sigma Q^T \quad (3)$$

onde  $Q^T$  é a transposta de  $Q$ .

Foram consideradas matrizes de ordem 3x3, pois o problema de estado plano de tensão pode ser estendido para o caso geral de tensão (estado de tensão triaxial) e são prontamente programáveis nos *softwares*.

Substituindo as Equações (1) e (2) na Equação (3), as componentes de  $\sigma'$  são obtidas

$$\sigma_{x'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (4)$$

$$\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (5)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6)$$

## 2.2 Tensões principais no plano

Além disso, a partir da matriz do tensor tensão ( $\sigma$ ), representado no sistema de coordenadas de referência ( $x, y$ ), é possível obter os valores máximos e mínimos das tensões normais e suas respectivas direções principais ou sistema de coordenadas principal. O tensor tensão  $\sigma$  é uma transformação linear tal que

$$\sigma \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad (7)$$

em que o escalar  $\lambda$  é chamado autovalor de  $\sigma$ , e qualquer vetor  $\mathbf{v}$  que torne verdadeira a Equação 7 associado ao autovalor  $\lambda$ .

Sendo assim, os autovalores ou tensões principais de  $\sigma$  são calculados resolvendo a seguinte equação

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0 \quad (8)$$

Por sua vez, os autovetores  $\mathbf{v}$  (vetores que indicam as direções das tensões principais) podem ser obtidos substituindo-se o valor de  $\lambda$  na equação  $\sigma \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  e resolvendo o sistema linear homogêneo:

$$(\sigma - \lambda I)\mathbf{v} = (0, 0, 0) \quad (9)$$

Uma matriz é definida como simétrica se ela for igual à sua transposta. Se a matriz for simétrica, os autovalores são necessariamente reais. Esse é o caso da matriz do tensor tensão de Cauchy ( $\sigma$ ). Para matrizes simétricas, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais e os autovalores são necessariamente reais.



Todas as equações e operações matriciais foram implementados em *softwares* de programação, tais como Python, Octave, Scilab, etc que foram escolhidos a critério do aluno e por terem licenças livres.

### 3 METODOLOGIA

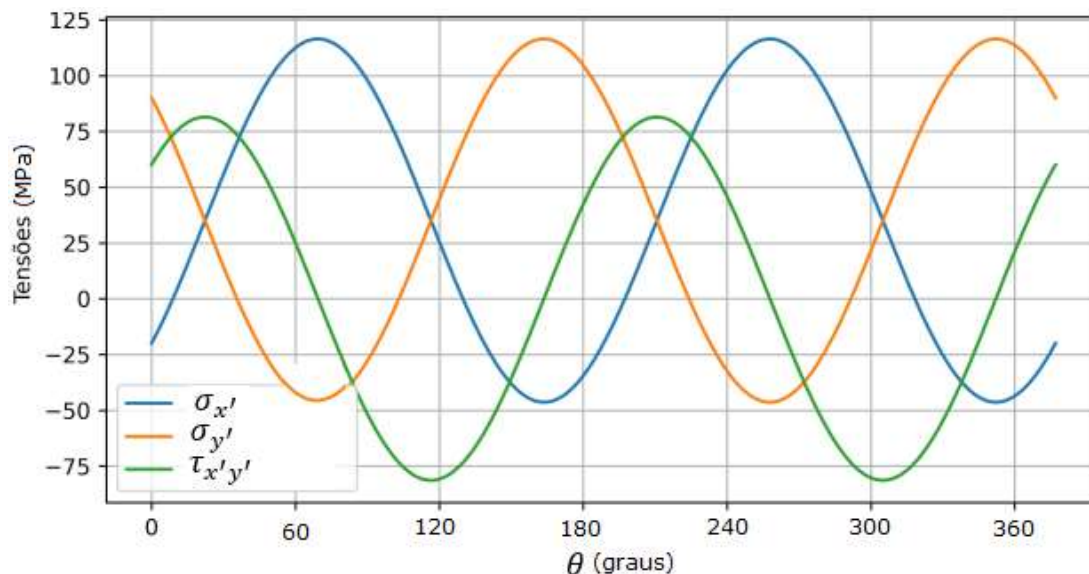
Foram mostradas para os alunos algumas aplicações do cálculo de transformação de tensões com o intuito de motivá-los sobre o tema. Como exemplos, tem-se soldas de chapas de vasos de pressão em ângulo, aplicações de engenharia de materiais compósitos em que a direção das fibras forma um ângulo com o sistema de coordenadas de referência, falha de materiais frágeis sob cisalhamento puro que ocorre a 45°, entre outras. Em seguida, foi trabalhado um exemplo no qual as componentes de tensão que representa o estado plano de tensão no elemento infinitesimal em relação ao sistema de coordenadas de referência ( $x$ ,  $y$ ) são conhecidas. Para fins de ilustração, foram considerados os seguintes valores:  $\sigma_x = -20$  MPa,  $\sigma_y = 90$  MPa e  $\tau_{xy} = 60$  MPa. Estes dados foram utilizados na rotina de programação elaborada pelos alunos nos *softwares* (*open source*) Python, Octave, etc. Para a execução do trabalho, formou-se grupos de dois ou três alunos a fim de estimular o trabalho em equipe e promover a troca de conhecimento entre eles.

Sabe-se que após o término da atividade, o aluno consegue comparar com clareza seu nível de conhecimento antes e depois da realização do trabalho. Então, foi elaborado um questionário para os alunos cujo objetivo foi verificar se a estratégia de ensino (estudo de aplicações da engenharia, utilizando conceitos de álgebra linear, através de *softwares* de programação) facilitou o processo de ensino aprendizagem sobre o assunto abordado. Então, as perguntas do questionário versaram sobre os aspectos positivos e negativos da metodologia do ensino empregada no trabalho. O formulário foi elaborado na plataforma Teams, disponibilizada pela instituição para os alunos e professores, por meio da ferramenta Microsoft *forms* e disponibilizado por meio de *link* no ambiente de postagens da turma.

### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O comportamento das tensões normais e de cisalhamento dadas pelas Equações 4 a 6 *versus* o ângulo de rotação ( $\theta$ ) considerando os dados  $\sigma_x = -20$  MPa,  $\sigma_y = 90$  MPa e  $\tau_{xy} = 60$  MPa é mostrado na Figura 2. Verifica-se que as tensões variam continuamente à medida que a orientação do elemento é alterada para toda faixa de 0° a 360°. Em determinados ângulos, a tensão normal atinge um valor máximo ou mínimo, em outros ângulos torna-se nula. Da mesma forma, a tensão de cisalhamento tem valores máximo, mínimo e zero em certos ângulos. A partir da análise do gráfico, o aluno consegue observar que as tensões de cisalhamento são nulas nos planos principais, nos quais as tensões normais são máximas e mínimas (tensões principais). O gráfico ajuda o aluno no entendimento do comportamento das tensões em todos os planos rotacionados do elemento e não apenas para um caso, como é comumente mostrado nos exemplos dos livros clássicos de Resistência dos Materiais. Além disso, um novo gráfico e/ou as componentes de tensão para um ângulo específico são obtidas rapidamente com o auxílio da programação, em que as entradas do programa podem ser alteradas livremente.

Figura 2 – Gráfico das tensões normais ( $\sigma_{x'}$  e  $\sigma_{y'}$ ) e tensão cisalhante ( $\tau_{x'y'}$ ) versus o ângulo de rotação ( $\theta$ ) do plano.



Fonte: Próprio autor

Em seguida, foram determinados os autovalores da matriz do tensor tensão utilizando a Equação 8. Os seguintes valores foram obtidos  $\lambda_1 = -46,4$  MPa e  $\lambda_2 = 116,4$  MPa. Para cada autovalor foi determinado o seu autovetor associado, resolvendo a Equação 9. Obteve-se os vetores  $v_1 = 0,915348192907307x - 0,402663241110145y$  e  $v_2 = -0,402663241110145x - 0,915348192907307y$ .

Os autovalores foram comparados com os valores máximos e mínimos das tensões normais observados no gráfico da Figura 2. Verifica-se também na Figura 2 que a orientação (ângulo) da direção principal coincide com aquela do autovetor. Constata-se que nessa orientação a tensão cisalhante é nula, como esperado.

Vale ressaltar a importância da determinação das tensões principais, uma vez que são utilizadas no projeto de componentes de material frágil, assim como, são utilizadas no cálculo da tensão de von Mises que é utilizada no projeto de peças de materiais dúcteis.

Com o objetivo de verificar a percepção dos alunos, foi utilizado um formulário online (*Forms office*) como estratégia de metodologia ativa na avaliação do trabalho. Todos os 17 alunos da turma responderam ao questionário cujo tempo médio para concluir foi de quatro minutos. A seguir, as respostas ao questionário indicam o sucesso da atividade obtido por meio da implementação da estratégia de ensino.

Primeiramente, perguntou-se acerca do nível de conhecimento dos alunos sobre ferramentas computacionais necessárias para execução do trabalho. 71% dos alunos não tinham ou tinham poucas habilidades em *softwares* de programação, conforme mostra o gráfico da Figura 3.

Figura 3 – Gráfico das respostas à pergunta: Como você classifica as suas habilidades na utilização de *softwares* de programação (Python, Octave, Scilab, etc) antes de realizar este tipo de trabalho?

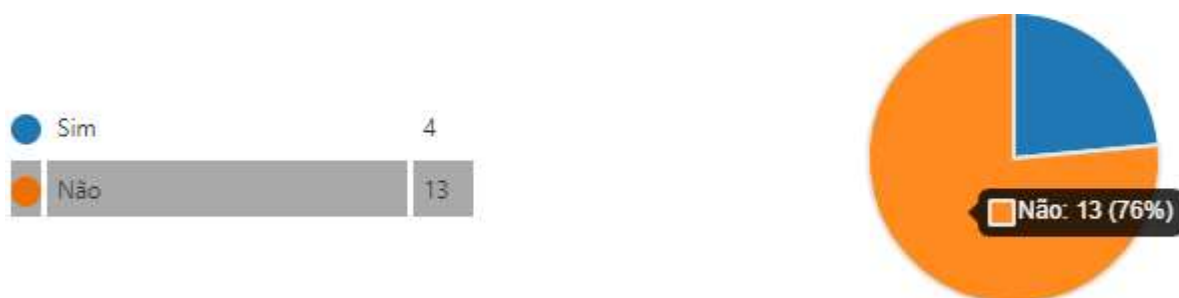


Fonte: Próprio autor

Uma das sugestões apontadas pelos alunos para contornar esta deficiência é a realização de atividades extracurriculares, como minicursos, de modo a introduzir aos alunos o uso de ferramentas de simulação/computação. Foram disponibilizados para os alunos tutoriais de *softwares* e vídeos com o passo a passo para programação de operações por matrizes e plotagem de gráficos a fim de ajudá-los nessa deficiência. Os alunos também tiraram dúvidas de programação ao longo da realização da atividade.

Outro ponto importante é que 76% da turma não conhecia aplicações de engenharia utilizando o cálculo de autovalor/autovetor de uma matriz, conforme aponta o gráfico da Figura 4. Os alunos foram questionados se durante o ciclo básico do curso de engenharia (Ex: disciplina de Álgebra linear), os professores comentaram sobre alguma aplicação de engenharia utilizando este tipo de cálculo (autovalor e autovetor).

Figura 4 – Gráfico das respostas à pergunta: Durante o ciclo básico do curso de engenharia (Ex: disciplina de Álgebra linear), os professores comentaram ou mostraram alguma aplicação de engenharia utilizando este cálculo (autovalor e autovetor)?



Fonte: Próprio autor

Verificou-se que 83% dos estudantes afirmam que o uso de programação e do cálculo matricial como ferramenta de ensino ajudou a motivá-los a estudar e facilitou o aprendizado do conteúdo, conforme mostra a Figura 5. Esta percepção mostra o quão importante a metodologia empregada se mostrou atrativa e eficiente no processo de ensino-aprendizagem.

Figura 5 – Gráfico das respostas à pergunta: O trabalho te motivou a estudar e facilitou o aprendizado do conteúdo?



Fonte: Próprio autor

Ressalta-se que 76% dos alunos indicaram que o trabalho ajudou muito ou satisfatoriamente a desenvolver outras habilidades e competências como, trabalho em equipe, comunicação, aprendizado de forma autônoma, liderança, planejamento, uso de ferramentas de simulação, etc. Vale ressaltar que os grupos de alunos se reuniam para discutir sobre a execução e andamento do trabalho. A ferramenta Teams permite que os alunos façam vídeo chamada para reunião de equipes ou utilizem o *chat* em grupo para discussão por mensagens.

Figura 6 – Gráfico das respostas à pergunta: O trabalho ajudou a você desenvolver outras habilidades como, programação, trabalho em equipe, comunicação, etc?



Fonte: Próprio autor

Todos os alunos apontam que o uso de *softwares* facilita e otimiza a análise do problema, porém o entendimento dos resultados da simulação ocorre somente quando se conhece previamente a teoria que descreve o fenômeno.

Vale destacar que os alunos puderam tirar dúvidas presencialmente com o professor ou por meio de "*chat*" na plataforma *Teams* ou *e-mail* institucional. Há horários específicos para atendimento aos alunos fora do horário de aula. Além disso, os estudantes podem enviar perguntas a qualquer momento via *chat* e, então, o professor responde-as quando acessa o sistema.

Por fim, os alunos também puderam opinar sobre os desafios e contribuições do trabalho para melhoria do processo de ensino-aprendizagem. A seguir serão destacados alguns relatos dos alunos.





"A contribuição da utilização de *software* é que as respostas ficam mais visíveis e nós conseguimos ver na prática a diferença que cada variável faz no resultado final. A dificuldade foi na parte de programar o software porque (eu particularmente) não tinha feito antes. Contudo, a experiência foi válida para acrescer conhecimento." (Aluno A).

"As maiores dificuldades foram: entender como funciona cálculos matriciais em *softwares* e aprender a linguagem do *software*." (Aluno B).

"A metodologia de usar códigos para facilitar é mais que essencial hoje em dia. Acredito que nós como engenheiros precisamos conhecer a teoria e deixar os computadores realizarem os cálculos com o intuito de poupar tempo. Ao saber também a teoria, se o computador nos entregar algum resultado errado teremos noção de que algo não aconteceu como deveria." (Aluno C).

"A maior dificuldade foi aprender a utilizar o programa do zero para realizar a tarefa a tempo de entregar." (Aluno D).

"A curiosidade em buscar informações (desde vídeos sobre álgebra linear até os focados em programação) para conseguir desenvolver os códigos e resolver os problemas." (Aluno E).

"Os desafios para atividades relacionadas a *softwares* requerem um tempo maior, pois cada linguagem possui uma maneira de ser escrita e isso requer um certo tempo para assimilação e aprendizagem." (Aluno F).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do projeto proposto na disciplina de Resistência dos Materiais II, foi possível determinar as tensões em diferentes orientações de um elemento utilizando a matriz de rotação, assim como, as tensões principais e suas direções utilizando o cálculo de autovalor e autovetor. Os cálculos matriciais, incluindo autovalor e autovetor, foram implementados em *software* de programação a exemplo do Python, Octave, etc. Para a execução do trabalho, formou-se grupos de dois ou três alunos a fim de estimular o trabalho em equipe. Além disso, aplicou-se um questionário para avaliar, sob o ponto de vista dos alunos, os aspectos metodológicos da atividade. A partir das respostas ao questionário foi verificada a importância da estratégia de ensino empregada, por meio do uso de cálculo matricial implementado em *software*, com a qual os alunos participaram ativamente do processo ensino aprendizagem e compreenderam conceitos complexos de forma mais fácil e motivadora. Esta estratégia pode ser aplicada em outros conteúdos da disciplina e em outras disciplinas de engenharia.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ), Campus Angra dos Reis, pela estrutura disponibilizada.

## REFERÊNCIAS

CARVALHO, A. S.; ALMEIDA, G. C. S.; SALLES, R. S. Aspectos da Utilização de uma Plataforma Tecnológica no Ensino de Pid Tuning. In: XLVIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia – COBENGE. Caxias do Sul, RS. **Anais**. 2020.

GAVAZZA, S. Dificuldades para o aprendizado de resistência dos materiais. In: XXXIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia – COBENGE. Blumenau, SC. **Anais**. 2011.

HIBBELER, R.C. Resistência dos Materiais. Pearson Education do Brasil, 2018.

TEIXEIRA, P. W. G. N.; NAKAO, O. S. Como ampliar a aprendizagem de resistência dos materiais em um curso de graduação de engenharia mecatrônica?. In: XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia – COBENGE. Belém, PA. **Anais**. 2012.

SILVA, A. D. C. et al. Desenvolvimento de uma interface gráfica para uso acadêmico do software openss. In: XLVIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia – COBENGE. Caxias do Sul, RS. **Anais**. 2020.

SILVA, J. C. S. Blended learning na disciplina resistência dos materiais. In: XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia – COBENGE. Belém, PA. **Anais**. 2012.

### **TEACHING MECHANICS OF MATERIALS USING LINEAR ALGEBRA AND PROGRAMMING: APPLICATION OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS**

**Abstract:** *This work aims to apply a teaching strategy for the study of stress transformation and main stresses, on the mechanics of materials subject that composes the professional cycle of disciplines of the Graduation in Mechanical Engineering, from CEFET/RJ Campus Angra dos Reis. This type of active learning methodology provides motivation, interest, autonomy and interaction of the students in each stage of the work. The proposed work was the determination of plane stress transformation, principal stresses and principal planes in the material using the concepts of rotation matrix and eigenvalues/eigenvectors studied in Linear Algebra via software open source. To carry out the work, groups of two or three students were formed in order to encourage teamwork. In addition, an online form was applied capture the student's perception about the methodological aspects of the activity. From the answers collected in the form, the importance of the teaching strategy used was verified, in which the students were able to assimilate the subject and understand complex phenomena in an easier and more motivating way.*

**Keywords:** *active learning, mechanics of materials, linear algebra, eigenvalues*