



COBENGE
2021

XLIX Congresso Brasileiro
de Educação em Engenharia
e IV Simpósio Internacional
de Educação em Engenharia
da ABENGE

28 a 30 de SETEMBRO

Evento Online

"Formação em Engenharia:
Tecnologia, Inovação e Sustentabilidade"

DEFLEXÃO DE VIGAS E EIXOS POR ESTUDO ANALÍTICO, NUMÉRICO E EMPÍRICO PAUTADO NA INTERDISCIPLINARIDADE DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2021.3571

Cristian Comin - cristiancomin@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Rua Santa Catarina 5890
85960-000 - Marechal Cândido Rondon - PR

Adabiel Oleone da Silva - adabielsilva@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Ramal Yotaka 158
85937-000 - Assis Chateaubriand - PR

Jocelaine Cargnelutti - jocelainecargnelutti@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Rua Santa Rosa 778
85905-510 - Toledo - PR

Vanderlei Galina - vanderleigalina@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Rua Santa Rosa 778
85905-510 - Toledo - PR

Resumo: A formação em engenharia demanda uma capacidade de promover a interdisciplinaridade, de modo a oferecer aos estudantes a competência de resolver problemas. Desse modo, a formação de profissionais qualificados, capazes de transcender os seus conhecimentos teóricos em situações práticas para a resolução de problemas é um dos maiores desafios das academias. O presente artigo tem por característica o uso de diferentes áreas de conhecimento da engenharia civil na avaliação de deflexão de vigas e eixos para pequenas deformações, situação recorrente na engenharia civil estrutural. Desse modo, por meio da solução de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, em contraponto com procedimentos experimentais e a modelagem numérica do estudo de caso, foi possível calcular o percentual de erro relativo entre o estudo

Promoção:



Realização:





COBENGE
2021

XLIX Congresso Brasileiro
de Educação em Engenharia
e IV Simpósio Internacional
de Educação em Engenharia
da ABENGE

28 a 30 de SETEMBRO

Evento Online

"Formação em Engenharia:
Tecnologia, Inovação e Sustentabilidade"

analítico, numérico e a prática. A análise experimental foi realizada por acadêmicos de engenharia civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Toledo, utilizando ferramentas de baixo custo e corriqueiros de obra, em vigas de madeira e barras de aço, amplamente empregados na engenharia civil, enfatizando a simulação dos conhecimentos técnicos. Observa-se que os resultados foram muito satisfatórios, com erros percentuais muito pequenos e uma bagagem de conhecimento para os membros do trabalho.

Palavras-chave: *Interdisciplinaridade. Deflexão de vigas. Equação Diferencial Ordinária. Cálculo Numérico. Práticas didáticas de ensino em Engenharia.*

Promoção:



Realização:



DEFLEXÃO DE VIGAS E EIXOS POR ESTUDO ANALÍTICO, NUMÉRICO E EMPÍRICO PAUTADO NA INTERDISCIPLINARIDADE DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA

1 INTRODUÇÃO

A Engenharia desempenha papel fundamental na sociedade, na criação e inovação de tecnologias, proporcionando desenvolvimento e progresso (PAVANELO; GERMANO; FREITAS-LEMES, 2017). Sendo assim, se torna muito importante devido seus impactos nas esferas social, econômica e ambiental, consequentemente na sustentabilidade, visando a utilização correta e planejada dos recursos naturais e financeiros, tendo em vista que altera o meio ambiente onde atuam (ROHAN et al., 2016).

Diante disso, um grande desafio das instituições de ensino superior de engenharia é formar engenheiros qualificados para enfrentar o mercado de trabalho, com base em conhecimentos sólidos e globais. Para alcançar este objetivo, a prática de realização de projetos de pesquisa com base na interdisciplinaridade vem sendo cada vez mais aplicada, sendo um exercício de relevância para exercer na prática os conhecimentos teóricos transmitidos pelos docentes de disciplinas diferentes, contribuindo para concretização do conhecimento abstraído pelos discentes (PAVANELO; GERMANO; FREITAS-LEMES, 2017). Além disso, segundo mesmo autor, essa iniciativa auxilia na formação tanto acadêmica quanto cidadã dos egressos, estimulando a busca por conhecimento, proatividade, tomada de decisões, trabalho em equipe, visando constante aperfeiçoamento em busca de otimização, planejamento e sustentabilidade, requisitos fundamentais na sociedade contemporânea.

Diante dessa perspectiva por maior qualificação, observa-se que dentre as disciplinas de formação básica de maior dificuldade dos cursos de engenharia, encontra-se as equações diferenciais, conforme Oliveira e Iglioni (2013), tanto na compreensão de conceitos e técnicas, quanto na aplicação contextualizada. Os autores ressaltam, com base em estudos anteriores, o uso da modelagem matemática e métodos numéricos para construção mais clara e eficiente do conhecimento, pois o uso de equações diferenciais para construção de modelos matemáticos é fundamental para representar o comportamento de fenômenos, principalmente na engenharia civil, e podem ser aplicados em projetos interdisciplinares.

Ainda no quesito da modelagem de equações, outra vertente de estudo extremamente importante no campo de estudo das engenharias é o cálculo numérico. A modelagem numérica permite que os engenheiros e matemáticos sejam capazes de encontrar a solução de equações complexas, de forma a solucionar problemas importantes para essas áreas como será apresentado no presente artigo (CUNHA, 2000).

Com base no exposto acima, este trabalho tem a finalidade de integrar principalmente os conhecimentos de equações diferenciais, mecânica dos sólidos, resistência dos materiais e cálculo numérico em uma atividade prática relacionada ao estudo da deflexão máxima suportada por uma viga engastada, por meio da comparação do resultado obtido no experimento com a resolução analítica e numérica.

Para análise foram selecionados a madeira e o aço como materiais de interesse. O aço devido a sua vasta utilização no ramo, diante de suas propriedades físicas e mecânicas, segundo Ferraz (2003). Já a madeira, conforme Júnior, Silva e Soares (2017), retorna ao mercado com alta utilização justamente com foco à sustentabilidade, devido à possibilidade de renovação, tendo em vista o controle dos recursos energéticos. Franzini, Toivonen e

Toppinen (2018), afirmam que existem várias iniciativas políticas nos Estados Unidos que se concentram em construções de grande porte, cuja estrutura principal é feita de madeira.

2 DESENVOLVIMENTO

O estudo sobre a deflexão de vigas é de extrema importância no âmbito da engenharia civil, sendo um dos fatores para elaboração de projetos. Aliando o conhecimento multidisciplinar teórico, baseado na análise de uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem que descreve a curvatura de um eixo ou viga, com a prática experimental, pode-se comparar e validar a utilização dos métodos de análise de deformações de vigas e eixos.

2.1 Modelagem matemática da linha elástica

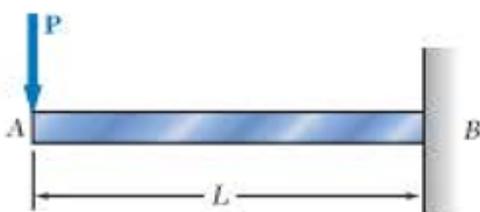
A teoria da linha elástica de vigas e eixos é uma ferramenta de muita utilidade na análise de deformações desses elementos. Sucintamente, linha elástica é o diagrama de deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centro de gravidade da viga ou eixo (HIBBELER, 2010). Segundo Fertis (1993), a lei de Euler-Bernoulli, representada na Equação (1), afirma que o momento fletor é inversamente proporcional ao raio de curvatura da curva produzida pela ação do carregamento na viga,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

Na expressão em (1), x indica a distância da seção analisada a partir da extremidade engastada da viga, M é o momento fletor, E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra e ρ representa o raio de curvatura da linha elástica na deformação da viga (BEER et al., 2015).

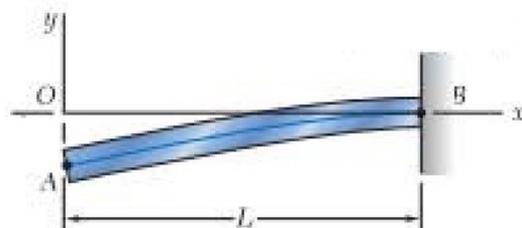
Considerando a situação apresentada na Figura 1, representa-se um esquema semelhante ao que será analisado no estudo de caso, uma viga engastada de comprimento L , com um carregamento concentrado P , na extremidade livre do eixo longitudinal da viga, usualmente denominada viga em balanço. Ao aplicar o carregamento mostrado na Figura 1, a viga irá se deformar em formato de um arco, conforme ilustrado na Figura 2, que pode ser esboçado a partir de sua linha elástica.

Figura 1 - Viga engastada



Fonte: Beer et al. (2015)

Figura 2 – Deformação da viga engastada



Fonte: Beer et al. (2015)

Segundo Beer et al. (2015), a deflexão pode ser determinada a partir da seguinte equação diferencial não linear de segunda ordem,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2)$$

Conforme Hibbeler (2010), a inclinação, representada por dy/dx , observada na linha elástica da maioria das vigas é muito pequena, conseqüentemente seu quadrado é desprezível, tornando o denominador da Equação (2) igual a 1. Substituindo este resultado na Equação (1), obtém-se a relação desejada que governa a linha elástica, a qual é representada pela equação diferencial ordinária linear de segunda ordem seguinte (BEER et al., 2015),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3)$$

Pela Equação (3), pode-se determinar o deslocamento vertical da viga ao longo de sua extensão longitudinal. O produto EI , denominado rigidez à flexão, é inversamente proporcional à deflexão, conforme Mott e Untener (2018).

2.2 Módulo de Young e Momento de Inércia

O Módulo de Young, ou Módulo de Elasticidade, e o Momento de Inércia, são propriedades intrínsecas à peça em análise. De acordo com Beer et al. (2015), os materiais em engenharia são projetados para que sofram deformações pequenas. O módulo de Young, representado pela letra E é a razão entre tensão e deformação. De forma prática, Mott e Untener (2018) afirmam que o módulo de elasticidade quantifica a rigidez do material, ao passo que o momento de inércia é a rigidez da geometria da seção transversal da viga.

O momento de inércia ou momento de segunda ordem em relação ao eixo x (linha neutra), considerando um elemento diferencial de área dA , é dado por,

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (4)$$

Para uma seção retangular, de base b e altura a , aplicando a Equação (4) com intervalo de integração de $y=-a/2$ até $y=a/2$, tem-se,

$$I_x = \frac{ba^3}{12} \quad (5)$$

Em uma seção circular, a integral de base utilizada é a mesma, como na Equação (4). Porém, os limites de integração são diferentes, o que resulta na Equação (6),

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} \quad (6)$$

2.3 Métodos de Runge-Kutta de Quarta Ordem

Os métodos de Runge-Kutta (RK) são os mais utilizados dentre aqueles apropriados para resolução de problemas de valor inicial da forma,

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (7)$$

por apresentarem simplicidade, alta precisão e versatilidade nas aplicações. Além de produzirem resultados equivalentes aos obtidos por métodos da série de Taylor de ordens superiores. A vantagem sobre os métodos da série de Taylor é que nos métodos de RK não é necessário o cálculo de derivadas da função $f(x, y)$ (CUNHA, 2000).

Todos os métodos de RK têm algoritmo da forma,

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k, h); \quad k \geq 0 \quad (8)$$

onde a função φ é denominada de função incremento e representa uma aproximação para $f(x, y)$ em cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ da malha computacional.

Os métodos RK mais utilizados são os de quarta ordem, o qual apresenta várias versões. A forma seguinte é a utilizada de forma geral e denominada de Método de RK de quarta ordem clássico.

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + h/2, y_k + hk_1/2) \\ k_3 &= f(x_k + h/2, y_k + hk_2/2) \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + hk_3) \end{aligned} \quad (9)$$

Este método utiliza múltiplas estimativas de inclinações obtida pela função f para chegar a uma inclinação média melhorada no intervalo de resolução.

Para aplicar o método em equações de ordens superiores, é preciso escrever o PVI na forma da equação (7). Assim, se a equação diferencial que representa o problema em estudo for de segunda ordem, com PVI,

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = c_0 \end{cases} \quad (10)$$

se torna o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\begin{cases} y' = z = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0; z(x_0) = c_0 \end{cases} \quad (11)$$

O método de RK é aplicado no sistema de equações diferenciais de primeira ordem em (5) para aproximar a solução $y(x)$ do PVI de segunda ordem em (10).

2.4 Análise de Erros

Para analisar o erro cometido na comparação dos valores obtidos de forma teórica com os dados coletados do experimento, utiliza-se o erro relativo, devido a sua maior precisão considerando a ordem de grandeza envolvida, segundo Hoffman (2001), dado por,

$$E_r = \left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| \quad (12)$$

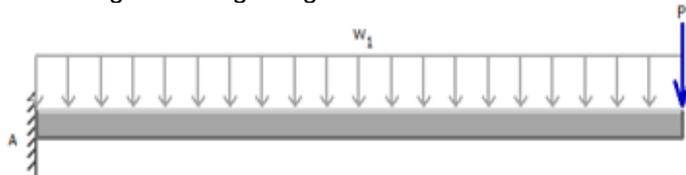
onde x representa, neste estudo, o valor analítico e numérico da deflexão da viga obtido por meio da EDO, e \bar{x} é o valor obtido pelo experimento.

2.5 Estudo de Caso

Este estudo concentra-se em vigas e eixos engastados, solicitados por um carregamento concentrado na extremidade livre da peça, com o intuito de avaliar quantitativamente sua deflexão. Essa situação é comumente encontrada nas denominadas vigas em balanço, que fazem parte da estrutura de sacadas e marquises, ou ainda em escadas com degraus engastados.

Desse modo, faz-se necessário encontrar a equação da linha elástica que governa o estudo de caso. De forma geral, estuda-se uma viga em balanço de comprimento L , como na Figura 3, em que w_1 representa o peso próprio da viga por unidade de comprimento e P_1 a força externa.

Figura 3 - Viga Engastada do Estudo de Caso



Fonte: Beer et al. (2015)

Na análise mecânica da viga engastada, são utilizadas as equações de equilíbrio de corpos, em que o somatório das forças e dos momentos devem, necessariamente, ser nulos. Como não há carregamento no eixo horizontal, a reação do engaste (ponto A) em x é nulo. Para a reação no eixo vertical y vale a Equação (13),

$$R_{Ay} = w_1 L + P_1 \quad (13)$$

e para o momento no ponto A, vale a Equação (14),

$$M_{RA} = \frac{w_1 L^2}{2} + P_1 L \quad (14)$$

Para determinar o momento fletor em função de x é necessário realizar uma análise de corpo livre de uma seção da viga (HIBBELER, 2010). Pela análise das equações de equilíbrio da estática, tem-se a Equação (15) que governa o momento fletor da viga,

$$M(x) = \frac{w_1 L^2}{2} + P_1 L - w_1 Lx - P_1 x + \frac{w_1 x^2}{2} \quad (15)$$

Com a equação do momento fletor escrita em função da variável independente x , basta substituir a Equação (15) na Equação (3), multiplicando ambos os lados da equação resultante por EI e integrando em relação a x para obter a Equação (16),

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{w_1 L^2 x}{2} + P_1 Lx - \frac{w_1 Lx^2}{2} - \frac{P_1 x^2}{2} + \frac{w_1 x^3}{6} + C_1 \quad (16)$$

Integrando a Equação (16) em relação a variável x , obtém-se a Equação (17),

$$EIy(x) = \frac{w_1 L^2 x^2}{4} + \frac{P_1 Lx^2}{2} - \frac{w_1 Lx^3}{6} - \frac{P_1 x^3}{6} + \frac{w_1 x^4}{24} + C_1 x + C_2 \quad (17)$$

As constantes C_1 e C_2 são determinadas a partir das condições de contorno, as quais estão intrínsecas às situações de apoio e carregamento da viga. Sabe-se, na Figura 3, que a inclinação da linha elástica é zero na extremidade A, portanto $dy/dx=0$ quando $x=0$; assim como em $x=0$ tem-se que $y=0$, portanto $C_1=0$ e $C_2=0$. Então, a equação da linha elástica da viga engastada é,

$$EIy(x) = \frac{w_1 L^2 x^2}{4} + \frac{P_1 Lx^2}{2} - \frac{w_1 Lx^3}{6} - \frac{P_1 x^3}{6} + \frac{w_1 x^4}{24} \quad (18)$$

O valor crítico se encontra na extremidade livre da viga ou eixo em balanço, isto é, no ponto B onde $x=L$. Substituindo $x=L$ na Equação (18) e realizando as manipulações algébricas necessárias, obtém-se o valor de y que representa a deflexão máxima da viga em análise,

$$y_{\text{máx}} = \frac{-1}{EI} \left(\frac{w_1 L^4}{8} + \frac{P_1 L^3}{3} \right) \quad (19)$$

2.6 Análise Experimental

Com o objetivo de simular diferentes aplicações da equação diferencial de linha elástica, foram realizados dois ensaios distintos. A aplicabilidade desta teoria é vasta e procurou-se explorá-la com materiais e seções transversais diversos, de modo a traçar um comparativo de resultados, avaliando os possíveis erros envolvidos e possibilitando constatar algumas considerações acerca da teoria.

Para o primeiro ensaio os materiais explorados foram: vigas de madeira Tauari (*Couratari spp.*, segundo Instituto de Pesquisa Tecnológica do Estado de São Paulo (2013) - IPT) de seção transversal retangular de base igual a 4,8 cm e altura de 2,4 cm; anilhas de 3, 5 e 10 kg; prego e arames para dependurar as anilhas na viga; régua de 1 m e trena de 50 m.

Com os materiais dispostos, foram ensaiadas vigas com 50 e 75 cm de comprimento, afixadas em um suporte de madeira, com parafusos de modo a impedir o deslocamento e rotação do engaste nos eixos x , y e z . Assim configurado, foram dependuradas as anilhas na extremidade livre das vigas, respectivamente, configurando cargas de 3, 5, 15 e 18 kgf (quilograma-força). Com o uso da régua, foi comparada a altura da extremidade da viga sem carga, e posteriormente, com os pesos afixados, determinando a devida deflexão do ponto mais crítico (extremidade livre). A Figura 4 e a Figura 5 ilustram o experimento.

Figura 4 - Viga de madeira de 50 cm
com 3 kg de carregamento

Fonte: dos Autores

Figura 5 - Viga de madeira de 50 cm com 18
kg de carregamento

Fonte: dos Autores

Outro ensaio foi realizado com barras de aço CA 50 5/16" (8 mm de diâmetro). Os materiais utilizados foram: barras de aço de 8 mm de diâmetro; anilhas de 3, 5 e 10 kg; arames; régua de 1 m e trena.

O estudo foi realizado com diferentes comprimentos de barra: 40, 50, 25 e 12,5 cm. Estas foram afixadas em um muro de arrimo e solicitadas com os pesos na extremidade, como explicitado no estudo de caso. Com cada comprimento diferente, foram colocadas situações com 3, 5 e 10 kgf, e aferida a deflexão com a régua, como observado na Figura 6 e Figura 7.

Figura 6 - Barra de 40 cm com 5 kg de
carregamento

Fonte: dos Autores

Figura 7 - Barra de 40 cm com 3 kg de
carregamento

Fonte: dos Autores

3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para a aplicação da Equação (14), faz-se necessário o conhecimento das características físicas dos materiais empregados nos ensaios, como o Módulo de Elasticidade e a massa específica. Essa última é importante para determinar, a partir do volume das peças usadas, o peso próprio do material por unidade de comprimento da viga ou eixo (w_1). Vale ressaltar que são variáveis muito importantes na análise de estruturas, visto que levam em consideração as propriedades específicas de serviço de cada material empregado e seu próprio peso.

Para a madeira utilizada foi adotado o Módulo de Elasticidade à flexão de 10591 MPa e densidade de 610 kg/m³ (IPT, 2013). Do mesmo modo, a fim de converter a massa da viga para peso, unidade Newtons (N), foi adotada a aceleração da gravidade como 9,807 m/s². Sendo assim, aplicando a Equação (19) e a Equação (12), para o cálculo analítico através da EDO, e a análise de erros, respectivamente, apresenta-se um comparativo na Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados da Viga Engastada de Madeira.

Tamanho da Viga (mm)	Carga concentrada (kgf)	Deflexão Teórica (mm)	Deflexão Numérica (mm)	Deflexão Exp. (mm)	Erro Relativo (%)
500	3	2,1851	2,1851	2,1000	3,8946
	5	3,5806	3,5806	4,0000	11,7131
	10	7,0693	7,0693	6,2000	12,2968
	15	10,5580	10,5580	10,7000	1,3450
	18	12,6513	12,6513	13,4000	5,9180
750	3	7,5299	7,5299	6,1000	18,9896
	5	12,2397	12,2397	10,5000	14,2136
	10	24,0141	24,0141	23,0000	4,2229
	15	35,7884	35,7884	34,5000	3,6000
	18	42,8531	42,8531	42,0000	1,9908

Fonte: dos Autores.

Para os cálculos de deflexão das barras de aço (CA 50 de 8 mm de diâmetro), configurando uma situação de deflexão de eixos, a NBR 7480:2007 especifica a densidade linear dos vergalhões utilizados para concreto armado com 0,395 kg/m. Utilizando este dado e o Módulo de Elasticidade com o valor de 200 GPa (BEER et al., 2010), foi possível realizar a comparação dos resultados expostos na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados do Eixo de Aço.

Tamanho da barra (mm)	Carga concentrada (kgf)	Deflexão Teórica (mm)	Deflexão Numérica (mm)	Deflexão Exp. (mm)	Erro Relativo (%)
125	3	0,4793	0,4793	0,5000	4,3188
	5	0,7968	0,7968	1,0000	25,5020
	10	1,5907	1,5907	2,0000	25,7308
250	3	3,8576	3,8576	5,0000	29,6143
	5	6,3980	6,3980	8,0000	25,0391
	10	12,7491	12,7491	16,0000	25,4991
400	3	15,9163	15,9163	16,0000	0,5259
	5	26,3218	26,3218	29,5000	12,0744
	10	52,3357	52,3357	57,0000	8,9123
500	3	31,2369	31,2369	31,0000	0,7584
	5	51,5602	51,5602	58,1000	12,6838
	10	102,3685	102,3685	140,6000	37,3469

Fonte: dos Autores.

Para a resolução numérica, a implementação foi realizada no software Scilab, onde utilizou-se 10 subintervalos na malha computacional em todas as combinações de tamanho de viga e carga concentrada descritas nas Tabelas 1 e 2. Observa-se que o valor da deflexão obtido de forma numérica é o mesmo que o resultado analítico, isso ocorre por conta da alta precisão do método de Runge-Kutta de quarta ordem, e também, pela pequena deflexão ocorrida nos casos estudados.

Analisando os resultados, observa-se que a viga de 750 mm apresentou comportamento padrão, com decrescente erro relativo ao passo em que se acrescenta maior carga, mostrando resultados satisfatórios a partir de 10 kgf, cujo erro relativo foi abaixo de 5% em comparação dos dados teóricos com os experimentais. Já a viga de 500 mm não mostrou a mesma regularidade, resultando erros relativos menores que 6% quando aplicadas cargas de 3, 15 e 18 kgf, e acima de 10% com aplicação de 5 e 10 kgf.

Levando em consideração os possíveis erros no experimento, verifica-se que a viga de 500 mm de comprimento apresentou valores de deflexão mais próximos dos resultados da equação diferencial, quando aplicados pesos menores que 10 kgf. Além disso, os resultados extremos (menor e maior percentual) foram melhores para a viga de 500 mm. Contudo a viga de 750 mm apresentou deflexão máxima regular e progressiva, sendo mais próxima da EDO com aplicação de carga de 10 e 18 kgf.

Sobre as barras de aço, pode-se notar que os eixos de maior comprimento, 400 e 500 mm, tiveram resultados satisfatórios com pesos de 3 e 5 kgf, apresentando erros relativos semelhantes e progressivos; quanto maior o peso, maior o erro. Já as vigas menores, 125 e 250 mm, revelaram erros semelhantes, porém, maiores na maioria dos casos, quando aplicado pesos de 5 e 10 kgf. Na maioria das vigas, com exceção de 400 mm, verificou-se precisão entre as deflexões máximas registradas e as teóricas quando aplicado 3 kgf de carregamento.

Em comparação com as vigas de madeira, as vigas de aço exibiram disparidade maior na comparação entre a deflexão máxima teórica e a experimental, além de não apresentar um comportamento padrão.

4 CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos, observa-se que a diferença percentual entre os dados analíticos e os experimentais aumentaram, na maioria dos casos, conforme houve o aumento da carga aplicada nas barras de aço, quando a deflexão é relativamente grande em relação à dimensão do material, visto que a Equação (3) é aplicada apenas para pequenas deformações, como fora adotado na sua modelagem.

Vale ressaltar a possível ocorrência de fontes de erro na parte experimental do estudo. Por se tratar muitas vezes de deformações diminutas, frações de milímetro fazem diferença no erro percentual. A menor precisão das ferramentas de medida, nesse caso, impede uma leitura precisa e minuciosa da deflexão dos materiais. Uma evidência disso, é o fato de que na deflexão de vigas de madeira, os menores erros relativos de cada comprimento ocorreram com as cargas de 15 kgf e 18 kgf, ou seja, pesos que permitem uma leitura melhor, por não provocar uma deflexão tão diminuta, e ao mesmo tempo obedece à aplicação da teoria.

Além disso, deve-se atentar para o tamanho da seção da viga em relação ao seu comprimento, visto que a efetividade da EDO se aplica para elementos de barra, ou seja, nos quais as dimensões da seção transversal são relativamente menores que seu comprimento.

Deve-se destacar a precisão dos cálculos através dos Métodos de Runge-Kutta de Quarta Ordem, que por mais que se trata de método numérico, que trabalha com aproximações, os resultados para a deflexão da viga no estudo de caso foram exatos em relação à EDO deduzida, que descreve a linha elástica dos elementos estruturais na engenharia civil. Ilustrando de forma muito satisfatória a comunicação entre as vertentes de resolução de problemas.

Ademais, a interdisciplinaridade no desenvolvimento do projeto motivou os alunos a buscar por conhecimento, auxiliando na concretização dos conceitos e técnicas adquiridas em sala de aula, no trabalho em equipe e no planejamento.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer aos professores orientadores pelo apoio técnico e científico, e ao Sr. Dirceu Eloi Comin, ao conceder material e experiência para o estudo prático em vigas.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7480**: Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação. Rio de Janeiro, 2007.

BEER, Ferdinand P. *et al.* **Mecânica dos Materiais**. 7ª edição, Porto Alegre: AMGH Editora LTDA. 2015.

CUNHA, M. C. C. **Métodos Numéricos**, 2. ed. São Paulo: Unicamp, 2000.

FERRAZ, Henrique. **O Aço na Construção Civil**. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

FERTIS, D. G. **Nonlinear Mechanics**. Florida: CRC Press. 1993.

FRANZINI, Florencia; TOIVONEN, Ritva; TOPPINEN, Anne. Why Not Wood? Benefits and Barriers of Wood as a Multistory Construction Material: Perceptions of Municipal Civil Servants from Finland. **Buildings**, 8, 159, 2018.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2010.

HOFFMAN, Joe D. **Numerical Methods for Engineers and Scientists**. 2ª edição, Nova Iorque: Marcel Dekker, Inc., 2001.

INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Catálogo de madeiras brasileiras para a construção civil**. São Paulo: IPT. 2013.

JÚNIOR, Carlos Roberto Cordeiro; SILVA, Wendna Cristina Rocha; SOARES, Paulo de Tarso Machado Leite. **USO DA MADEIRA NA CONSTRUÇÃO CIVIL**. Rio de Janeiro: Projectus, v. 2, n. 4, p. 79-93, 2017.

MOTT, Robert L; UNTENER, Joseph A. **Applied Strength of Materials**. 6ª edição, Boca Raton: Taylor & Francis, CRC Press, 2018.

OLIVEIRA, Eliane Alves de; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. **ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: Um levantamento preliminar da produção científica. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco. v. 4, n. 2, 2013.

PAVANELO, Elisângela; GERMANO, José Silvério Edmundo; FREITAS-LEMES, Priscila Lourenço. **A interdisciplinaridade em cursos de engenharia**. Belo Horizonte: Rev. Docência Ens. Sup, v. 7, n. 2, p. 130-148. 2017.

ROHAN, Ubiratan; SOARES, Carlos Alberto Pereira; FRANÇA, Sergio Luiz Braga; MEIRIÑO, Marcelo Jasmim. **A FORMAÇÃO DO ENGENHEIRO CIVIL INOVADOR BRASILEIRO FRENTE AOS DESAFIOS DA TECNOLOGIA, DO MERCADO, DA INOVAÇÃO E DA SUSTENTABILIDADE**. In: XII Congresso Nacional de Excelência em Gestão e III INOVARSE – Responsabilidade Social Aplicada, 2016, Rio de Janeiro. Anais. Rio de Janeiro, 2016.

DEFLECTION OF BEAMS AND AXLES BY ANALYTICAL, NUMERICAL AND EMPIRICAL STUDY BASED ON THE INTERDISCIPLINARITY OF ENGINEERING PROBLEM SOLVING – COBENGE 2021

Abstract: *Engineering training requires an ability to promote interdisciplinarity, in order to offer students the ability to solve problems. Thus, the training of qualified professionals, capable of transcending their theoretical knowledge in practical situations for problem solving is one of the greatest challenges facing academies. This article is characterized by the use of different areas of knowledge of civil engineering in the evaluation of deflection of beams and axes for small deformations, a recurrent situation in structural civil engineering. Thus, by solving a second order linear ordinary differential equation, in contrast to experimental procedures and the numerical modeling of the case study, it was possible to calculate the percentage of relative error between the analytical, numerical study and the practice. The experimental analysis was carried out by civil engineering students at the Federal Technological University of Paraná, Toledo campus, using low-cost and common construction tools, on wooden beams and steel bars, widely used in civil engineering, emphasizing the simulation of knowledge technical. It is observed that the results were very satisfactory, with very small percentage errors and a lot of knowledge for the members of the work.*

Keywords: *Interdisciplinarity. Deflection of beams. Ordinary Differential Equation. Numerical calculation. Didactic practices of teaching in Engineering.*