

UMA ABORDAGEM EDUCACIONAL ACERCA DO ELO ENTRE OS MODELOS TEÓRICOS FÍSICOS-MATEMÁTICOS E SOLUÇÕES DE ENGENHARIA

Natan Sian das Neves – natansian@ufrj.br

COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro

Av. Athos da Silveira Ramos, 149, Centro de Tecnologia

21941-909 – Ilha do Fundão – Rio de Janeiro

Resumo: As soluções de problemas físicos relacionados ao contexto de engenharia apresentam uma importância visível, devido carregarem intrinsecamente métodos, considerações, hipóteses simplificadoras e aplicações relevantes de interesse constante na elaboração de projetos de pesquisa científica-acadêmica e industrial. Sendo assim, essas soluções partem, em inúmeros casos, de modelos teóricos físicos-matemáticos descritos por equações diferenciais. Desta forma, o presente artigo busca realizar um estudo inicial acerca do elo entre os modelos teóricos e de solução, visando apresentar aspectos conceituais e aplicações. Para tanto, seguindo um escopo pedagógico e introdutório, usa-se como veículo de transmissão e exemplificação os procedimentos numéricos baseados na técnica de diferenças finitas. Os casos testes são direcionados com dois exemplos associados à análise de um sistema oscilatório livre amortecido e um problema de torção de barras retangulares. Em síntese, os resultados numéricos apresentaram o comportamento esperado, mostrando ser uma técnica de fácil aplicação e conceitualmente simples, sendo uma excelente ferramenta numérica para introduzir a utilização de métodos numéricos na engenharia aos discentes.

Palavras-chave: Engenharia. Diferenças Finitas. Educacional. Modelos teóricos.

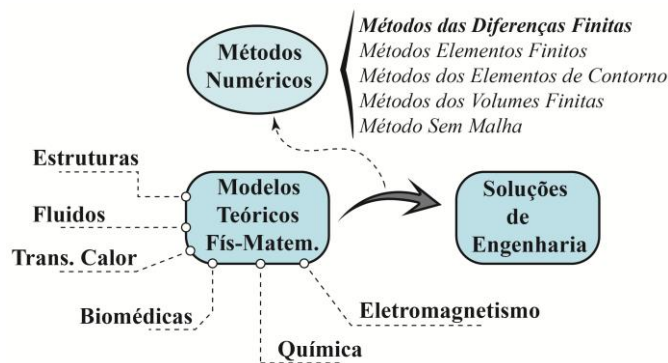
1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais com variados tipos de complexidades apresentam nos inúmeros fenômenos físicos podem transitar de diferentes naturezas como ordinária, parcial, linear, não linear, parabólica, hiperbólica, puramente difusiva e dentre outros aspectos que classificam um modelo diferencial. Neste contexto, os modelos diferenciais analíticos são baseados, em modo geral, em princípios físicos, relações constitutivas do material, condições de contorno, efeitos externos e dentre outros conceitos da física-matemática. Sendo assim, é possível fornecer soluções bem postas e fechadas para determinados problemas físicos específicos, com geometrias e processos físicos simplificados, que são frequentemente usados para validação parcial de um programa computacional (LAPIDUS; PINDER, 2011). Estes modelos fornecem uma previsão simplificada para a resposta do problema, construindo uma base inicial acerca do comportamento do fenômeno.

As ferramentas de solução de problemas de engenharia, em modo mais abrangente, podem ser divididas em dois grupos, os procedimentos teóricos e os experimentais. Direcionando a discussão aos métodos analíticos e numéricos que compõem basicamente o grupo dos métodos teóricos. Inicialmente, os problemas de engenharia possuem uma variedade de complexidades, a adoção de hipóteses de cálculo que objetivam simplificar o problema pode acarretar em soluções que não interpretem o comportamento real. A maioria dos problemas práticos de engenharia não apresentam comportamentos triviais, com

processos não lineares, geometrias não estruturadas, regime transiente, acoplamentos físicos e matemáticos, dentre outros aspectos, sendo quase improvável o conhecimento de uma solução analítica, direcionando as soluções destes problemas para a aplicação de técnicas numéricas. Deste modo, o uso de métodos aproximados é uma excelente alternativa, uma vez que os computadores estão com sua capacidade de processamento e armazenamento em crescente evolução, o que permite solucionar problemas com maior nível de complexidade (NEVES, 2019). Desta forma, dentre as técnicas aproximadas usuais na engenharia, cita-se o método de elementos finitos, volume finitos, elementos de contorno e como pioneiro nesse escopo, tem-se o método das diferenças finitas (MDF), destacando-se pela sua simplicidade e eficiência na solução, sendo por sua vez a técnica escolhida como guia para as análises e debates.

Figura 1 – Esquema didático geral acerca dos modelos analíticos e métodos numéricos.



Fonte: Acervo Pessoal.

A partir desse cenário, é notório o forte e direto elo entre os modelos teóricos físicos-matemáticos governantes de fenômenos e as soluções recorrentes na engenharia, interligados pelo uso de métodos numéricos que possibilitam realizar variadas investigações de parâmetros físicos, tipos de carregamentos, configurações geométricas e dentre outros. Para exemplificar essas interações entre os modelos analíticos que descrevem os diversos problemas físicos e métodos numéricos são esquematizados na Figura 1. Desta maneira, esse artigo visa apresentar de forma introdutória e pedagógica os procedimentos aproximados para alguns problemas de engenharia, a fim de expandir a visão dos discentes para a importância dos métodos numéricos na engenharia atual, uma vez que os programas comerciais majoritariamente utilizam essas técnicas para as soluções.

2 CONCEITOS E APLICAÇÕES DA TÉCNICA DE DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas é uma técnica de natureza diferencial que busca em sua essência aproximar as derivadas contidas nas equações diferenciais governantes dos fenômenos físicos de engenharia por meio de simples expressões algébricas de diferenças entre pontos adjacentes contidos no domínio discreto (ÖZISIK *et al.*, 2017). A formulação matemática do MDF é baseada na expansão em série de Taylor, conforme posto na Equação (1).

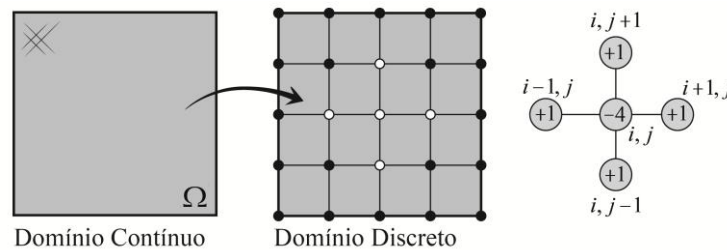
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n x_0}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{n+1}(\epsilon)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (1)$$

A partir da Equação (1) pode-se derivar as aproximações dos operadores diferenciais, como para as expressões de derivadas de segunda ordem com esquema de diferenças centrais e derivada de primeira ordem com esquema progressivo, conforme mostrado a seguir:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad \frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (2)$$

Onde Δx é o espaçamento espacial da malha numérica. Além disso, para equações diferenciais parciais localizadas em torno de domínio bidimensional, as expressões matemáticas apresentadas na Equação (2) podem ser expandidas naturalmente em cada direção cartesiana, conforme pode ser visto em detalhes no trabalho de Neves *et al.* (2018a). Na Figura 2 apresenta-se um esquema do processo de discretização do domínio conjunto com a representação da molécula computacional (ou usualmente conhecido como *stencils*) para os pontos centrais com espaçamento uniforme entre os nós.

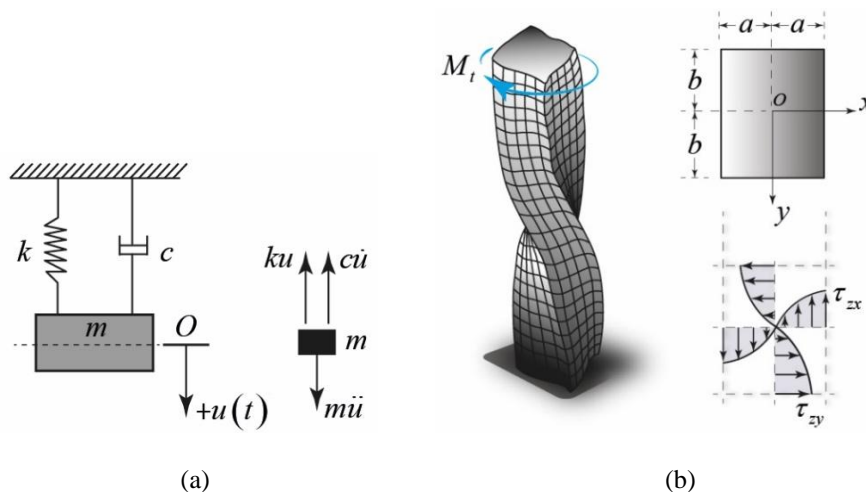
Figura 2 - Representação do domínio discreto bidimensional e *stencils*.



Fonte: Acervo Pessoal.

Uma etapa característica dos métodos numéricos é o processo de discretização, uma vez que a abordagem dessas técnicas é realizada em torno de um domínio finito de elementos, contrariando as premissas básicas das soluções analíticas definidas em um domínio com infinitos pontos, direcionando a solução de engenharia ao surgimento dos erros numéricos. Sendo assim, simplificada, quanto mais refinada for a malha numérica, o domínio tende a ser melhor representado, o que demanda conjuntamente um maior custo computacional.

Figura 3 - Características gerais dos casos estudados.



Fonte: Acervo Pessoal.



Para compreender os procedimentos numéricos de diferenças finitas estuda-se dois casos com um potencial didático, visando explorar algumas características do método. O primeiro caso é caracterizado por um sistema massa-mola amortecido livre, conforme representado do croqui na Figura 3(a). Aplicando a segunda lei de Newton, também conhecida frequentemente como princípio fundamental da dinâmica, é possível determinar a equação diferencial de movimento para sistemas de um grau de liberdade (KREYSZIG, 2009), conforme posta a seguir:

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + c \frac{du(t)}{dt} + ku(t) = f(t) = 0 \quad (3)$$

Onde as constantes m , c e k representam respectivamente a massa, coeficiente de amortecimento viscoso e de rigidez. Sendo assim, a aplicação do método das diferenças finitas é imediata, aproximando diretamente os operadores diferenciais de natureza temporal, resultando na expressão abaixo Equação (4).

$$m \left[\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} \right] + c \left[\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \right] + k[u_n] = 0 \quad (4)$$

Os fenômenos de oscilações de sistemas massa-mola descrito pelo Equação (3) não apresentam partes espaciais, somente operadores temporais de primeira e segunda ordem. Desta maneira, deve-se impor duas condições iniciais ao sistema, dadas por $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = V_0$. A partir disso, a solução numérica é construída de forma explícita, conforme dado a seguir:

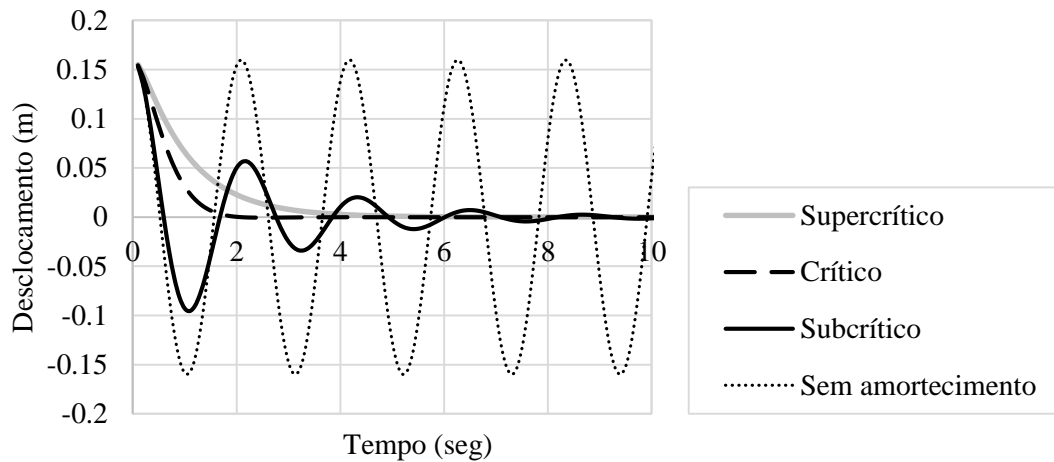
$$\left[\frac{c\Delta t}{m} + 1 \right] u_{n+1} = \left[2 + \frac{c\Delta t}{m} - \frac{\Delta t^2 k}{m} \right] u_n - u_{n-1} \quad (5)$$

A solução da Equação (5) é realizada com base em um processo numérico simples, a fim de avaliar o deslocamento em cada passo de tempo $n + 1$. Para os instantes iniciais, deve-se realizar um tratamento específico associado as aplicações das condições iniciais (SILVA; HELAYËL NETO, 2016), conforme apresentado na Equação (6).

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = [u_{n+1} - u_{n-1}]/2\Delta t = V_0 \end{cases} \quad (6)$$

Os parâmetros físicos adotados para a simulação computacional realizando no Matlab R2015a, $m = 10$ kg, $k = 90$ N/m e considera-se três configurações para a constante de amortecimento, sendo $c = 100$, 60 e 10 kg/s. Além disso, as condições iniciais são $u(0) = 0,16$ e $\dot{u}(0) = 0$. O passo no tempo é adotado igual a $0,1$ segundos e realiza-se um total de 100 iterações. Os resultados numéricos obtidos com a implementação do método das diferenças finitas são sintetizados na Figura 4.

Figura 4 - Deslocamento do sistema para resposta livre amortecida com diferentes propriedades de amortecimento do oscilador.



Fonte: Acervo Pessoal.

Observa-se que dependendo da propriedade de amortecimento escolhida, o sistema apresenta um comportamento diferente. Considerando o sistema sem amortecimento, $c = 0$, nota-se uma resposta periódica com amplitudes máximas iguais ao longo do movimento. Quando adota-se um coeficiente $c = c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km}$, o movimento não apresenta oscilações e o deslocamento tende assintoticamente a zero, define-se então que o sistema é dito como criticamente amortecido. Esse valor crítico do coeficiente de amortecimento viscoso é importante e serve como referência para análise dinâmica.

Considerando a configuração de amortecimento supercrítico, onde $c > c_{\text{crit}}$, o movimento retorna a configuração neutra em um tempo maior que o caso do amortecimento crítico, contudo, ainda não existe oscilação. Todavia, quando considera-se amortecimento subcrítico $c < c_{\text{crit}}$, o sistema massa-mola oscila com movimento não periódico e gradualmente retorna a sua posição de origem, sendo caracterizado usualmente como um oscilador subamortecido.

O segundo teste estudado é composto de um problema bidimensional governado pela equação de Poisson, definido como um importante fenômeno na área da engenharia estrutural, o problema em questão é a torção de barras de seção retangular, conforme esquematizado na Figura 3(b). Sendo assim, baseado nos conceitos da teoria da elasticidade conjunto com as propostas de Prandtl utilizando a função tensão ϕ e as ideias da analogia de membrana (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980), esse problema é descrito pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta = F \quad (7)$$

Onde G e θ são módulo de rigidez do material e o ângulo de rotação respectivamente. Além disso, é possível provar matematicamente que a função tensão deve ser constante ao longo do contorno, possibilitando adotar um valor nulo. Desta forma, a primeira etapa de cálculo do problema é determinar os valores da função tensão de Prandtl aplicando as expressões aproximadas de diferenças finitas, resultando na seguinte sentença.



$$\left(\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) = F \quad (8)$$

Tomando os espaçamentos cartersianos entre os pontos iguais, tem-se que $\Delta x = \Delta y = h$ e reagrupando os termos da Equação (8), chega-se na expressão matemática final do problema, conforme dado pela Equação (9).

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} = h^2 F \quad (9)$$

O *stencils* apresentado na Figura 1 é uma representação da Equação (9), a fim de facilitar o processo de construção da matriz do sistema. Em um segundo momento, busca-se determinar as variáveis secundárias do problema, onde são nesse problema o ponto de maior interesse da engenharia, uma vez que aproxima-se nessa etapa as tenões de cisalhamento do problema de torção, conforme posto a seguir:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2h} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h} \quad (10)$$

As simulações computacionais realizadas utilizam as propriedades físicas e as dimensões da seção sendo unitárias. Primeiramente realiza-se um teste de malha, a fim de verificar o comportamento da técnica numérica em relação à solução analítica do problema, conforme posto a seguir pela Tabela 1. Essa convergência da solução direcionada pelo teste de malha é uma estratégia interessante e recorrente na engenharia.

Contudo, vale destacar que usualmente não se tem a solução analítica do problema, disponível somente para casos com condições físicas e geométricas bem definidas. Desta forma, esse teste de malha auxilia o usuário verificar em qual momento os resultados não apresentam variações siginificativas, indicando a relação ótima entre a menor malha e os resultados com baixa oscilação. Importante mencionar que não existe uma ligação direta entre os resultados convergidos em relação ao teste de malha realizado e eles estarem adequados fisicamente, sendo papel do usuário verificar e ajustar (caso necessário) os resultados obtidos com comportamento físico do problema estudado.

Tabela 1 – Resultados quantitativos acerca da convergência dos resultados em relação ao refinamento da malha numérica.

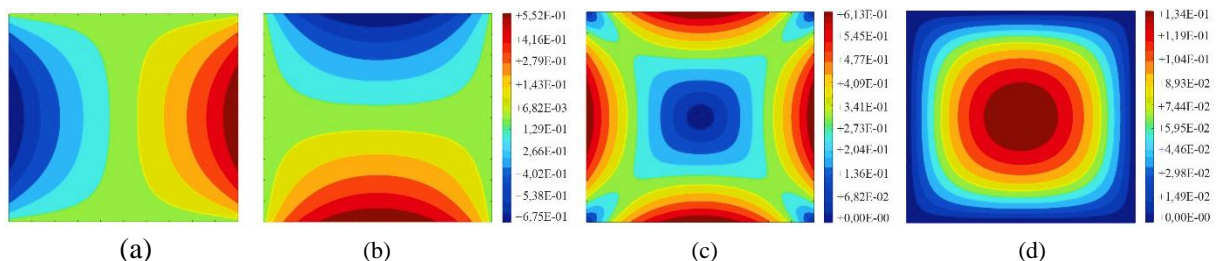
Malha	NPA	NPT	Erro Médio (%)	
			Função Tensão	Tensão Máximo
1	5	25	4,833	14,979
2	9	81	1,383	6,306
3	17	289	0,384	2,415
4	21	441	0,253	1,734
5	31	961	0,119	0,956
6	41	1681	0,069	0,675
7	51	2601	0,045	0,551
8	61	3721	0,032	0,476

Fonte: Acervo Pessoal.

Para quantificar esses níveis de erro médio e malhas numéricas, na Tabela 1 apresenta esses valores, sendo que NPA é o número de pontos por aresta do domínio e NPT é o número total de pontos. Na Tabela 1 é possível observar o decaimento do erro médio em relação ao aumento do número de pontos discretos no domínio. Ressalta-se que a solução analítica utilizada para as medições de performance numérica do MDF pode ser encontrada facilmente em Timoshenko e Goodier (1980).

A partir desses resultados é possível concluir que a técnica de diferenças finitas convergiu a solução, apresentado baixos níveis de erro percentual. Contudo, observa-se que a função tensão apresenta uma convergência mais acentuada em relação a tensão máxima de cisalhamento. Esse comportamento é devido ao acúmulo de erro das aproximações nas etapas de cálculo, ou seja, o cálculo de variáveis secundárias usualmente carregam maiores níveis de erro (Neves *et al.*, 2018b).

Figura 5 –Distribuição bidimensional das tensões de cisalhamento (a) ZY, (b) ZX, (c) resultante e (d) função tensão de Prandtl.



Fonte: Acervo Pessoal.

Adicionalmente, na Figura 5 mostra-se o campo bidimensional de algumas variáveis associados ao problema de torção. Esse tipo de visualização é importante pra engenharia, uma vez que nesses tipos de gráficos permitem localizar possíveis regiões críticas de projeto, como uma concentração de tensão, deslocamento máximo do elemento e dentre outros aspectos. Além disso, é possível verificar se as imposição das condições de contorno são feitas corretamentes em um código computacional.

Desta maneira, nas Figuras 5(a) e 5(b) mostram as tensões de cisalhamento cartesianas, onde pode-se verificar que as máximas tensões ocorrem nas arestas médias do domínio, seguindo o valor analítico de $\tau_{\max} = \bar{k}2G\theta a$, onde \bar{k} é um fator numérico que depende da razão b/a . Na engenharia, usualmente busca-se a combinação dos efeitos e solicitações, sendo assim, na Figura 5(c) mostra-se a tensão de cisalhamento resultante, ficando visível os pontos de interesse e locais críticos na seção transversal sob ação de torção.

3 ASPECTOS EDUCACIONAIS E DISCUSSÕES

A abordagem clássica de ensino em cursos de graduação de engenharia é composta por uma metodologia com uma forte base de cálculo, entendimento da modelagem física-matemática de fenomenos físicos da natureza, aplicação de técnicas e estratégias práticas utilizadas em prodimentos de cálculo em projetos de engenharia e dentre outros aspectos. Com avanço da tecnologia a utilização de programas computacionais de alto desempenho passaram a ser uma ferramenta recorrente na solução de problemas de engenharia. Devido a grande demanda técnica exigida aos engenheiros no mercado associado ao uso de ferramentas computacionais no processo de elaboração e verificação de projetos, alguns déficits e lacuna



teóricas podem ocorrer durante o processo de ensino nos cursos de engenharia, conforme é discutido a seguir.

Atualmente, as soluções de engenharia são usualmente definidas com base *softwares* comerciais, destaca-se ANSYS, ABAQUS, TQS e SAP2000. Todavia, existe um conflito entre as ferramentas computacionais que apresentam uma base de cálculo interna física-matemática-numérica avançada e o nível árido de conhecimento dos discentes em formação em cursos de engenharia, uma vez que as disciplinas específicas da área de engenharia apresentam conceitos gerais sobre os conteúdos. Deve-se destacar que a presente discussão não está direcionando para que os usuários tenham a obrigação de compressão por completo e detalhada das formulações por trás dos programas. Contudo, é papel do usuário ter conhecimento de conceitos e estratégias gerais para corrigir/interpretar possíveis (e prováveis) inadequados resultados nos projetos e simulações.

Neste cenário, contextualizações e questionamento apontados, o conhecimento básico de técnicas numéricas e modelagem física-matemática durante a formação em cursos de engenharia torna-se primordial e essencial para futuros projetistas, engenheiros e pesquisadores. Desta forma, questões relacionadas ao tema surgem de forma natural por meio dos discentes, por exemplo:

- Como adquirir esses conhecimentos na graduação ?
- Qual programa aprender ? Como interpretar os resultados ?
- O que é método numérico ? O que é discretização ?

Essas perguntas e dentre outras questões são recorrentes por parte dos alunos, uma vez que é um assunto amplo e complexo. Sendo assim, uma estratégia simples para expandir o conhecimento dos alunos e “abrir a cabeça” para esse mundo das ferramentas computacionais aplicadas na engenharia é o estudo inicial de métodos numéricos aplicados a uma área de interesse.

Conforme visto no item anterior do presente trabalho, a aplicação do método das diferenças finitas (MDF) em alguns problemas físicos simples já fornecem aos discentes um conhecimento acerca da solução de equações diferenciais, programação de algoritmos computacionais, soluções de sistemas lineares, interpretação física, sendo que todos esses fatores são contextualizados em problemas de engenharia, mesmo que ao nível elementar, contudo, fundamental para crescimento conceitual e matemático dos alunos, fornecendo no futuro um melhor entendimento e manipulação dos ferramentas computacionais avançadas disponíveis na engenharia. Cabe destacar que os *softwares* comerciais utilizam majoritariamente o método dos elementos finitos (MEF), então qual motivo de aprender MDF ? A resposta é simples, o MEF é uma técnica mais robusta para compressão em relação aos avançados aspectos matemáticos e numéricos, contudo, o MDF é uma técnica simples de entender que fornecer alguns conceitos gerais sobre métodos numéricos que são primordiais e aplicados em diferentes métodos numéricos.

Desta forma, o engajamento dos discentes ao longo dos cursos de engenharia, com projetos de extensão, iniciações científicas (IC), participação em congressos e em cursos complementares associados ao contexto de métodos computacionais na engenharia podem auxiliar na construção de uma base inicial para soluções de problemas mais complexos. Essas importantes ferramentas são potencializadoras do processo de ensino-aprendizagem, uma vez que fornecem conceitos sobre experimentação numérica associado à compreensão do comportamento dos problemas estudados.



4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho buscou apresentar ideias acerca da importância do conhecimento de modelos teóricos físicos-matemáticos e as soluções práticas de engenharia utilizando métodos numéricos. Para seguir o escopo pedagógico do debate, as aplicações de testes foram direcionadas pelo método das diferenças finitas em problemas conhecidos na engenharia, a fim de explorar os conceitos físicos associados aos problemas sem exagero de matemática complexa e abstrata.

Em síntese aos resultados numéricos obtidos com método numérico implementado apresentou um comportamento satisfatório para os problemas estudados. Além disso, em uma linha direcionada ao impacto e contexto acerca da importância do conhecimento de uma técnica aproximada atualmente na engenharia é imprescindível aos discentes, uma vez que projetos práticos, pesquisas acadêmicas e demais tarefas, usualmente necessitam da aplicação de programas comerciais que baseiam seus procedimentos de cálculos em métodos numéricos. É claro, que a utilização do MDF nesse trabalho é puramente didática, servindo como uma ponte para outros métodos mais robustos. Contudo, a técnica clássica de diferenças finitas fornece os conceitos gerais sobre métodos numéricos e exige aos discentes um preparo teórico inicial devido à multidisciplinaridade exigida, transitando do conhecimento de cálculo, física, linguagem de programação, disciplinas específicas da área de atuação e dentro outros requisitos.

Portanto, é fundamental para os discentes saber da importância e as ferramentas intrínsecas que ocorrem entre os processos de interação dos modelos analíticos, numéricos e as soluções de engenharia, que caminham juntos e possibilitam recursos poderosos para investigação dos fenômenos físicos.

REFERÊNCIAS

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009.

LAPIDUS, L.; PINDER, G. F. **Numerical solution of partial differential equations in science and engineering**. New York: John Wiley & Sons, 2011.

MATLAB, Version. 8.5. 0.197613 (R2015a). The MathWorks Inc., Massachusetts, 2015.

NEVES, Natan Sian. **Modelo computacional avançado para análise de estruturas sob ação de gradientes térmicos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

NEVES, Natan Sian. Uma introdução aos procedimentos numéricos do método diferenças finitas: um estudo do comportamento de vigas de fundação na engenharia civil. **Revista Tecnologia**, v. 41, n. 1, 2020.

NEVES, Natan Sian; SOUZA, Rovena Meirelles; PINHEIRO, Vitor Pancieri. A importância dos modelos teóricos e técnicas numéricas na construção de um elo com a prática da engenharia estrutural. **Revista eixo**, v. 7, n. 1, p. 26-35, 2018a.



NEVES, Natan Sian; PINHEIRO, Vitor Pancieri; CANDIDO; Daniel Carvalho de Moura, LOEFFLER NETO, Carlos Friedrich; BODART, Norminda Luiza. Uma estratégia didática para engenharia estrutural baseada na análise numérica de barras sob torção. In: XIII SIMMEC - Simpósio de Mecânica Computacional, 2018, Espírito Santo. **Anais**. Vitória, 2018b.

ÖZISIK, M. N.; ORLANDE, H. R.; COLAÇO, M. J.; COTTA, R. M. **Finite difference methods in heat transfer**. Boca Raton, 2nd Edition: CRC press, 2017.

SILVA, Adilson Costa da; HELAYËL NETO, José Abdalla. Simulador de Oscilações Mecânicas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 3, 2016.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Teoria da elasticidade**. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

AN EDUCATIONAL APPROACH ABOUT THE LINK BETWEEN PHYSICAL-MATHEMATICAL THEORETICAL MODELS AND ENGINEERING SOLUTIONS

Abstract: *The solutions of physical problems related to the engineering context are of visible importance, because they carry intrinsically methods, considerations, simplifying hypotheses and relevant applications of constant interest in the elaboration of scientific-academic and industrial research projects. Therefore, these solutions start, in many cases, from theoretical physical-mathematical models described by differential equations. Thus, this article seeks to carry out an initial study about the link between theoretical and solution models, aiming to present conceptual aspects and applications. For this purpose, following a pedagogical and introductory scope, numerical procedures based on the finite difference technique are used as a vehicle for transmission and exemplification. The test cases are addressed with two examples associated with the analysis of a damped free oscillatory system and a torsion problem of rectangular bars. In summary, the numerical results showed the expected behavior, being a technique of easy application and conceptually simple and an excellent numerical tool to introduce the use of numerical methods in engineering to the students.*

Keywords: *Engineering. Finite differences. Educational. Theoretical models.*