CÁLCULO DA DENSIDADE POPULACIONAL DE LAGARTAS UTILIZANDO O MÉTODO DE SÉRIE DE TAYLOR DE SEGUNDA ORDEM

Resumo: *O objetivo deste artigo é apresentar o cálculo da densidade populacional de algumas lagartas por meio do método de série de Taylor de segunda ordem. A densidade populacional dessas lagartas é governada por um problema de valor inicial (PVI). Então, com o uso do método de série de Taylor as derivadas parciais do PVI serão expandidas e encontrada a função que rege este crescimento. Assim, será possível realizar a plotagem dos gráficos por meio de um algoritmo implementado na linguagem de programação C e verificar o comportamento da curva que, tem o mesmo aspecto segundo a literatura consultada.*

Palavras-chave: *Método numérico. Série de Taylor. Crescimento populacional de lagartas.*

1 INTRODUÇÃO

Segundo o décimo levantamento de safra de grãos, da Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB), publicado em julho de 2020, a previsão para a safra 2019/20 vem confirmando as expectativas iniciais de crescimento, estabelecendo mais um recorde. Estimada em 251,4 milhões de toneladas, 3,9% ou 9,3 milhões de toneladas superior ao colhido no período anterior 2018/19. Com área das culturas de primeira safra totalmente colhida, e as de segunda com a colheita avançada, ainda depende da conclusão do plantio das culturas de inverno e do comportamento climático que podem influenciar na produtividade dessas culturas. Para a obtenção desse resultado, ainda passível de alteração, a área semeada totaliza 65,8 milhões de hectares, o que representa um crescimento de 4% ou 2,53 milhões de hectares sobre a safra passada (CONAB, 2020).

Para manter índices de crescimentos como os atuais, o manejo integrado de pragas tem sido uma ferramenta de suma importância, para se evitar perdas abruptas na produção por ataques de insetos. A Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa) destaca que a lagarta Helicoverpa armigera (Hübner) (Lepidoptera: Noctuidae) é a principal causadora de danos às culturas de soja, feijão, milho, algodão e hortaliças. Desde o seu primeiro registro na safra 2012/2013 no território brasileiro, estima-se que os prejuízos causados aos agricultores ultrapassam mais de dez bilhões de reais. A identificação correta da espécie, técnicas efetivas de amostragem de ovos e lagartas, ou até mesmo pupas, são essenciais, como subsídios para as tomadas de decisão sobre as melhores táticas de controle nas culturas afetadas (CZEPAK et. al., 2013).

O primeiro procedimento para efetuar o controle adequado das lagartas consiste em quantificar a densidade populacional, ou seja, dimensionar o tamanho da amostra, número de pontos amostrais (STÜRMER et. al., 2013). A exemplo da cultura da soja que está suscetível ao ataque de lagartas, um dos métodos para determinar a densidade populacional consiste no pano-de-batida vertical. Este dispositivo é feito com um tecido branco com 1 m de comprimento, sustentado por duas hastes que ultrapassam o comprimento do pano e são fixadas em ambas as extremidades (GUEDES et. al., 2006).

Uma alternativa para determinar essa densidade populacional das lagartas, está no uso de métodos numéricos que, são técnicas matemáticas usadas na solução de problemas que não podem ser resolvidos ou que são difíceis de se resolverem analiticamente (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008). Este trabalho demonstra que é possível desenvolver a solução de um dado Problema de Valor Inicial (PVI) da densidade populacional de lagartas usando método de série de Taylor de segunda ordem.

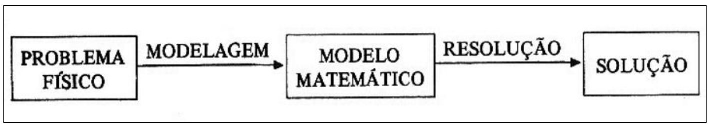
O uso do método de série de Taylor implica em expandir uma função que rege o PVI de uma equação diferencial de segunda ordem e determinar a densidade populacional de algumas lagartas. Esse PVI consiste em dois termos: o primeiro termo refere-se à predação da população de lagartas e o segundo termo refere-se ao modelo que descreve o crescimento populacional conforme descrito por (STEWART, 2013). Com a linguagem de programação C foi automatizado o processo de calcular o valor da função nos pontos determinados e a realização da plotagem dos gráficos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A grande capacidade de processamento que os computadores proporcionam torna-se notável e vantajoso para os diferentes ramos da ciência. Um desses ramos refere-se a solução de problemas nas diferentes áreas das engenharias por meio de métodos numéricos. Esses métodos matemáticos são formulados por operações aritméticas (CHAPRA e CANALE, 2011). Gilat e Subramaniam (2008) destacaram que as soluções numéricas são aproximações, mas que são precisas. Esses cálculos são realizados de maneira iterativa até que a precisão desejada seja alcançada.

Para a solução de um problema na ciência e na engenharia, Gilat e Subramaniam (2008) recomendaram seguir alguns passos para resolvê-lo: como identificação do problema real, formulação da solução por meio de um modelo matemático, implementação da solução numérica em uma linguagem de programação e interpretação da solução numérica. Quando se propõe solucionar esse problema por meio de métodos numéricos, Barroso et. al. (1987) indica o fluxograma apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Processo de solução de um problema físico.



Fonte: Barroso et. al. (1987).

Segundo Barroso et. al. (1987) duas fases são identificadas no fluxograma da Figura 1. A primeira fase é concebida pela modelagem do comportamento do sistema físico em questão que irá gerar um modelo matemático. E a segunda fase é a resolução desse modelo matemático por meio de métodos numéricos que irá gerar uma solução aproximada para o problema físico identificado.

Uma das características que marca os diversos métodos numéricos está no fato deles envolverem grande número de cálculos aritméticos onerosos (CHAPRA e CANALE, 2011). Um desses métodos numéricos consistem na redução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem ou de ordem superior a um problema de valor inicial (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008). Nesse ponto pode-se usar a série de Taylor para expandir a função que rege o PVI e encontrar um valor aproximado ou exato cuja soma dos termos é uma série convergente (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

O método de série Taylor não é exatamente um método numérico, mas pode ser combinado com expressões numéricas. Esse método tem aplicabilidade quase que geral independente da quantidade de termos (FRANCO, 2006). Em alguns casos onde a função é um polinômio, a série de Taylor pode fornecer o valor exato. Os métodos que usam a expansão em série de Taylor de uma dada função $y(x)$ fornecem a solução para diversas equações diferenciais, contudo o cálculo das derivadas parciais envolvidas torna-se complicado (RUGGIERO e LOPES, 1996).

De acordo com as aproximações $y_1, y_2, \dots, y_n$ para $y(x)$, nos pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$, se y for suficientemente suave (regular), a série de Taylor em termos do valor da função $y(x)$ e suas derivadas no ponto x_n é dada por:

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + y''(x_n)\frac{(x - x_n)^2}{2!} + \dots \\ + \frac{y^{(k)}(x_n)}{k!}(x - x_n)^k + \frac{y^{k+1}(\xi_x)}{(k+1)!}(x - x_n)^{k+1} \end{aligned} \quad (1)$$

em que ξ_x é um valor que está entre x_n e x. Logo:

$$y(x_{n+1}) \cong y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \cdots + y''(x_n)\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} + \ldots + y^{(k)}(x_n)\frac{(x_{n+1} - x_n)^k}{k!} \quad (2)$$

Se $y_{(n)}^{(j)}$ representa a aproximação para a *j*-ésima derivada da função *y(x)* em x_n: $y^{(j)}(x_n)$ $h = x_{n+1} - x_n$, tem-se:

$$y(x_{n+1}) \simeq y_{n+1} = y_n + y_n' h + y_n'' \frac{h^2}{2} + \ldots + y_n^{(k)} \frac{h^k}{k!} \quad (3)$$

e o erro de truncamento é dado por

$$e(x_n) = \frac{y^{(k+1)} \xi_{x_n}}{(k+1)!} h^{k+1} \quad (4)$$

Observa-se que, se *y(x)* tem derivada de ordem *(k+1)* contínua num intervalo fechado *I* que contém os pontos sobre os quais está fazendo a discretização, então, existe $M_{k+1} = máx|y^{(k+1)}(x)|$, com $x \in I$; assim tem-se uma majorante para o erro de truncamento pois,

$$|y^{(k+1)}(\xi_x)| \leq Mk + 1 \forall \xi_x \in I$$
$$\Rightarrow |e(x_n)| \leq máx.|e(x)| \leq \frac{M_{k+1} h^{k+1}}{(k+1)!} = Ch^{k+1} \quad (5)$$

em que o comprimento do intervalo, h, é o tamanho do passo. Um método numérico é dito de ordem *p* se existe uma constante *C* tal que $|e(x_{n+1})| < Ch^{p+1}$ onde C pode depender das derivadas da função que define a equação diferencial. Portanto, os métodos de série de Taylor são de ordem *k*. Para aplicar o método Taylor de ordem k: $y_{n+1} = y_n + y_n' h + \frac{y_n''}{2!} h^2 + \ldots + \frac{y_n^{(k)}}{k!} h^k$.

Tem-se que calcular as derivadas $y_n'', y_n''', \ldots, y_n^{(k)}$. Agora:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (6)$$

Para a segunda derivada em uma notação simplificada obtém-se a Equação (7):

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) y'(x) = f_x + f_y f \quad (7)$$

Portanto, para o método de Taylor de 2ª ordem obtém-se a Equação (8):

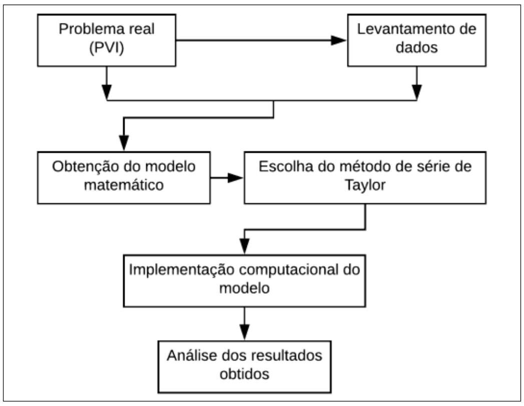
$$y_{n+1} = y_n + y_n' h + \frac{y_n''}{2} h^2 \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)], n = 0,1,2, \ldots \quad (9)$$

3 METODOLOGIA

Para as etapas do projeto, foi definido um fluxograma, conforme Figura 2:

Figura 2 – Fluxograma de aplicação do método de Taylor.



Fonte: Adaptada de Ruggiero e Lopes (1996).

De acordo Figura 2, a princípio foi identificada uma equação (PVI) que rege o crescimento populacional de algumas lagartas e que serve como modelo matemático para descrever o crescimento. O levantamento de dados consistiu em arbitrar valores às variáveis da população inicial, da taxa de reprodução das lagartas e da quantidade de folhas disponíveis. Para a solução do modelo matemático foi utilizado o método de série de Taylor de segunda ordem e posteriormente com implementação da solução na linguagem de programação C. A análise dos resultados consistiu em avaliar a curva de crescimento da densidade populacional de lagartas.

Este trabalho teve o propósito de determinar a densidade populacional de lagartas após um tempo, *t*, descrita pelo PVI dado pela Equação (10):

$$\frac{dP}{dt} = rp(1 - \frac{p}{k}) - \frac{p^2}{1 + p^2} \qquad (10)$$
$$p(0) = p_0$$

em que p_0 é a população inicial (no instante $t = 0$), r está relacionado à taxa de reprodução da lagarta e k à quantidade de folhas disponíveis na planta. O termo $(rp(1 - p/k))$ faz parte de um modelo que descreve o crescimento populacional conhecido como a equação diferencial da logística. E o termo $(p^2/(1 + p^2))$ descreve a predação da lagarta. Por meio da derivação implícita deu-se início a obtenção do modelo matemático que rege o PVI da Equação (10):

$$f(t,p) = rp(1 - \frac{p}{k}) - \frac{p^2}{1 + p^2} \qquad (11)$$

Mas, como $P' = f(t,p)$ obtém-se

$$P' = rp(1 - \frac{p}{k}) - \frac{p^2}{1 + p^2} \qquad (12)$$

Para a derivada segunda tem-se $f_t(t,p) = 0$. Logo,

$$P'' = f_p f \qquad (13)$$

e

$$f_p(t,p) = r - \frac{2rp}{k} - \frac{2p}{(1+p^2)^2} \tag{14}$$

Então, as Equações (11) e (14) são substituídas na Equação (13). Assim, obteve-se a Equação (15) para a derivada segunda.

$$P'' = [r - \frac{2rp}{k} - \frac{2p}{(1+p^2)^2}][rp(1-\frac{p}{k}) - \frac{p^2}{1+p^2}] \tag{15}$$

Portanto, a Equação (16) torna-se responsável pelo cálculo da densidade populacional de lagartas a cada iteração. Nesta Equação (16) $P_n = p_0$ e o subscrito n significa o número máximo de iterações, ou seja, $0 \leq t \leq n$.

$$P_{n+1} = P_n + h(rp(1-\frac{p}{k}) - \frac{p^2}{1+p^2}) + \frac{h^2}{2}[r - \frac{2rp}{k} - \frac{2p}{(1+p^2)^2}][rp\left(1-\frac{p}{k}\right) + \cdots - \frac{p^2}{1+p^2}] \tag{16}$$

A Equação (16) representa o método de Taylor de 2ª ordem. Os dados que foram usados na simulação são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados usados nos cálculos da densidade populacional de lagartas.

Iterações (t)	População inicial (p_0)	Taxa de reprodução (r)	Quantidade de folhas (k)
10	0,1	2	1
20	0,1	2	1
30	0,1	2	1

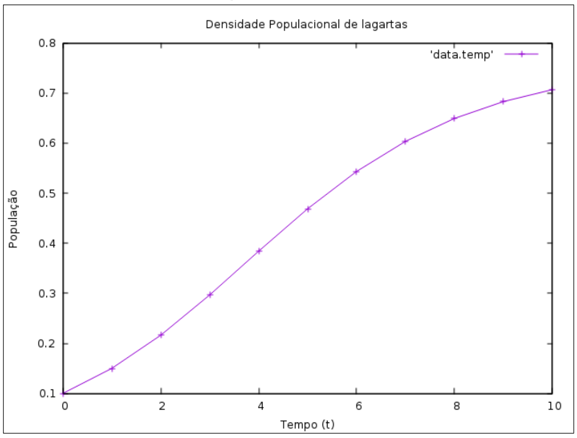
Fonte: Autoria própria.

Observa-se na Tabela 1 que somente as iterações sofreram variações para verificar o comportamento do gráfico ao longo do tempo. A implementação do modelo computacional deu-se pela utilização da linguagem de programação C. Cada parte da Equação (16) foi dividida em sub-rotinas e somadas em uma sub-rotina que realizou a soma e a plotagem dos gráficos por meio do programa Gnuplot que, é um programa de plotagem controlado por comando. Ele pode ser usado interativamente para plotar funções e pontos de dados em gráficos bidimensionais e tridimensionais em muitos estilos e formatos de saída diferentes.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

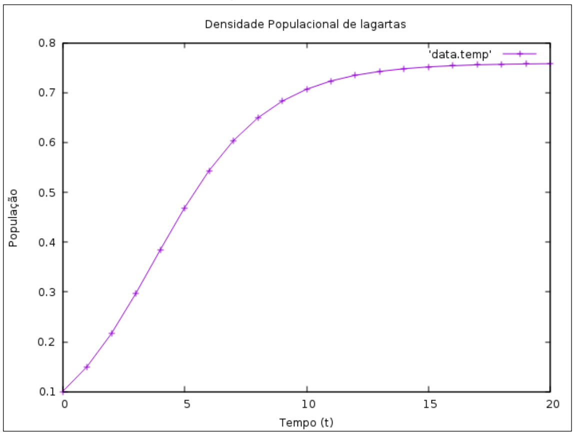
Para execução computacional do modelo que representa a Equação (16), o tamanho do passo h foi igual a 0,25. Com isso obteve-se os resultados apresentados nos gráficos das Figuras 3, 4 e 5 com 10, 20 e 30 iterações, respectivamente.

Figura 3 – Gráfico da densidade populacional
de lagartas em t = 10.



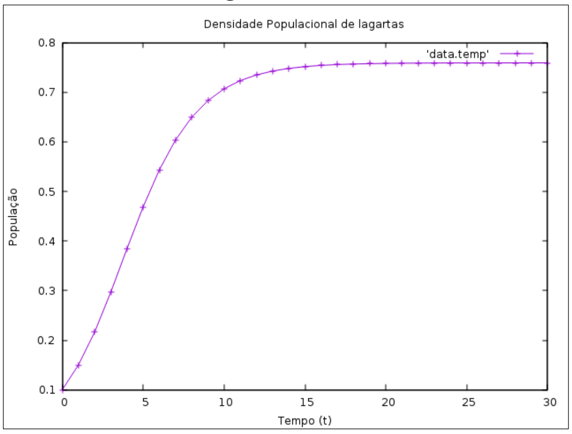
Fonte: Autoria própria.

Figura 4 – Gráfico da densidade populacional
de lagartas em t = 20.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5 – Gráfico da densidade populacional
de lagartas em t = 30.



Fonte: Autoria própria.

Observa-se que à medida que aumentava-se o número de iterações, a densidade populacional de lagartas tornava-se constante. Esse fato foi observado a partir da trigésima nona iteração, ou seja, os valores convergiam. Essa convergência significa que a população de lagartas se estabilizou e se aproximou de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Essa capacidade de suporte é a população máxima que um ambiente é capaz de sustentar a longo prazo.

5 CONCLUSÃO

Por meio da simulação realizada nesse projeto, foi possível verificar o comportamento da curva de crescimento da densidade populacional de algumas lagartas pelo seu modelo matemático. O comportamento da curva de crescimento foi o esperado conforme apontado pela literatura consultada. Por meio do método de série de Taylor foi possível demonstrar a simplificação de um problema real e posteriormente calcular a função nos pontos definidos, e assim, gerar informação que poderia ser útil para o correto controle de lagartas que afetam as lavouras.

Quando os problemas de valor inicial envolvem derivadas de ordem maior que dois, o método de série de Taylor torna-se oneroso, pois implica em encontrar as derivadas parciais que rege o PVI. Logo, deve-se recorrer a outros métodos que prescinde das derivadas parciais da função dada.

REFERÊNCIAS

Acomp. safra bras. grãos, v. 7 - Safra 2019/20 - Décimo levantamento: Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB). Disponível em: https://www.conab.gov.br/info-agro/safras/graos/boletim-da-safra-de-graos. Acesso em: 17 jul. 2020.

BARROSO, Leônidas Conceição *et al*. **Cálculo numérico (com aplicações)**. 2ª ed. São Paulo: Editora HARBRA ltda. 1987.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P.. **Métodos numéricos para engenharia**. Porto Alegre: AMGH. 2011.

CZEPAK, C.; ALBERNAZ, K. C.; VIVAN, L. M.; GUIMARÃES, H. O.; CARVALHAIS, T. Primeiro registro de ocorrência de Helicoverpa armigera (Hübner) (Lepidoptera: Noctuidae) no Brasil. **Pesquisa Agropecuária Tropical (Agricultural Research in the Tropics)**, v. 43, n. 1, p. 110-113, 15 abr. 2013.

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa). **Pragas**. Disponível em: https://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/territorio_sisal/arvore/CONT000fckl80cd02wx5eo0a2ndxy148tp3r.html. Acesso em: 17 jul. 2020.

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa). **O ataque da lagarta**. Disponível em: https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/1930990/o-ataque--da-lagarta. Acesso em: 17 jul. 2020.

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson, 2006.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. 5ª ed. Porto Alegre: Bookman. 2008.

Gnuplot homepage: software aberto. Disponível em: http://www.gnuplot.info/. Acesso em: 29 jul. 2020.

GUEDES, J. V. C.; FARIAS, J. R.; GUARESCHI, A.; ROGGIA, S.; LORENTZ, L. H. **Capacidade de coleta de dois métodos de amostragem de insetos-praga da soja em diferentes espaçamentos entre linhas**. Ciência Rural, Santa Maria, RS, v. 36, n.4, p. 1299-1302, 2006.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books. 1996.

STEWART, James. **Cálculo, Volume 2**. 7ª edição, São Paulo: Cengage, 2013.

STÜRMER, G. R.; CARGNELUTTI FILHO, A.; GUEDES, J. V. C.; STEFANELO, L. DA S. Tamanho de amostra para a estimação da média de lagartas na cultura de soja. **Bioscience Journal**, v. 29, n. 5, 8 Aug. 2013.

CALCULATION OF THE POPULAR DENSITY OF LIZARDS USING THE SECOND ORDER TAYLOR SERIES METHOD

Abstract: *The aim of this article is to present the population density calculation of some caterpillars using the second order Taylor series method. The population density of these caterpillars is governed by an initial value problem (PVI). Then, using the Taylor series method, the partial derivatives of the PVI will be expanded and the function that governs this growth will be found. Thus, it will be possible to plot the graphs through an algorithm implemented in the C programming language and verify the behavior of the curve, which has the same aspect according to the consulted literature.*

Keywords: *Numerical method. Taylor series. Population growth of caterpillars.*