

BANCADA DIDÁTICA DE BAIXO CUSTO USANDO “SMARTPHONE” PARA AQUISIÇÃO DO SINAL DE VIBRAÇÃO VISANDO COMPARAR FREQUÊNCIAS NATURAIS TEÓRICA E EXPERIMENTAL

Matheus Tibérius Donadon Ramos da Silva – matheus.tiberius@gmail.com

Marco Túlio Santana Alves – marco.alves@ufba.br

*Deptº. Engenharia Mecânica - Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia
Rua Professor Aristides Novis, 2 – Campus Federação
CEP 40.210-630 – Salvador – Bahia*

Resumo: *O presente trabalho investiga a viabilidade de se estudar o comportamento dinâmico de uma estrutura de três graus de liberdade fazendo um comparativo entre os resultados teóricos e os experimentais. Entretanto, sabe-se que equipamentos e instrumentação para adquirir dados experimentais no segmento da dinâmica e vibrações são caros. Por este motivo, foi construída uma bancada experimental de baixo custo e, para a aquisição dos dados, utilizou-se um “smartphone” com um aplicativo gratuito. Assim, a partir do modelo da estrutura obtido por meio da Mecânica Newtoniana, foram obtidas as frequências naturais teóricas do sistema. Do lado experimental, aplicou-se a Transformada Rápida de Fourier no sinal de aceleração adquirida para a obtenção das frequências naturais medidas. Após ajuste do modelo teórico, usando a teoria do amortecimento proporcional, comparou-se as respostas em frequências obtidas pelas duas vias, onde o resultado obtido revelou-se promissor com erro máximo de 3%.*

Palavras-chave: *Dinâmica estrutural. Bancadas Didáticas. Experimento de baixo custo. Vibrações Mecânicas. Amortecimento Estrutural.*

1 INTRODUÇÃO

A análise das características oscilatórias das estruturas é uma área de grande importância no mundo da engenharia, sobretudo por conta da ressonância. Sempre que a frequência natural de uma máquina ou estrutura coincide com a frequência de excitação ocorre o fenômeno da ressonância, o que acarreta em deflexões e deslocamentos excessivos (CRAIG, 1981). Além disso, vibrações causam desgaste mais acelerado de componentes como rolamentos e engrenagens, além de gerar ruído excessivo. Em máquinas, a vibração pode também afrouxar parafusos e porcas (RAO, 2008), implicando diretamente em falta de segurança na operação.

Neste contexto, fica evidente a necessidade do futuro engenheiro mecânico dominar minimamente os conceitos básicos da dinâmica estrutural. Assim sendo, de forma a corroborar com este objetivo, sobretudo com maior engajamento dos alunos de graduação no estudo das vibrações, propõe-se, neste trabalho, construir uma bancada de testes com três graus de liberdade de baixo custo utilizando um “smartphone” com aplicativo gratuito como sendo o sistema de aquisição de dados de vibração (como a aceleração). Desta maneira, pode-se estreitar

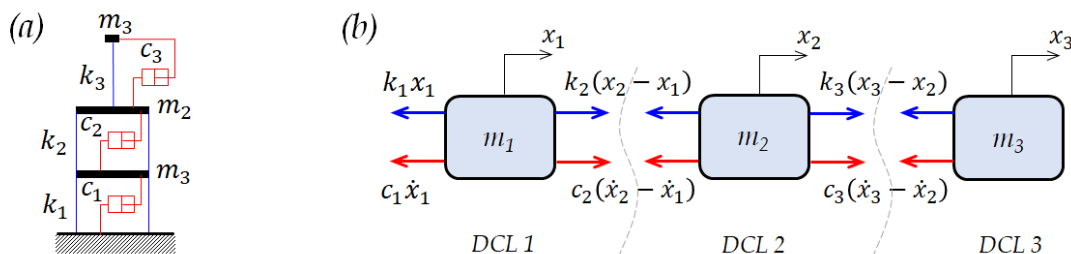
a distância entre teoria e aplicação aliviando sobremaneira a altíssima carga de abstração que naturalmente permeia as disciplinas de vibrações mecânicas e dinâmica de estruturas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Modelagem Matemática da Bancada Experimental de 3 GDL

Em primeiro lugar, insta informar que o sistema físico que representa a bancada é esquematicamente apresentada pela "Figura 1(a)". Posteriormente, esboçou-se, a partir do modelo mecânico equivalente, os diagramas de corpo livre (DCL) inerentes ao sistema, conforme descritos na "Figura 1(b)". A partir da aplicação da segunda Lei de Newton sobre os DCLs, deduz-se as equações do movimento.

Figura 1 – (a) esquema do sistema físico da bancada e (b) diagramas de corpo livre sobre o modelo mecânico equivalente.



Fonte: Elaborada pelos autores.

As "Equações (1)", "Equação (2)" e "Equação (3)" são as equações do movimento que governam, respectivamente, a dinâmica dos elementos m_1 , m_2 e m_3 .

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = 0 \quad (2)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 + c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0 \quad (3)$$

Para facilitar o tratamento matemático, escreveu-se a equação do movimento na forma matricial conforme a "Equação (4)".

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Sendo a primeira matriz a matriz de massa $[M]$, a segunda a matriz de amortecimento $[C]$ e a última a matriz de rigidez $[K]$.

2.2 Modelagem do amortecimento estrutural

Para a modelagem do amortecimento estrutural é comum o uso do modelo de amortecimento de Rayleigh que consiste de duas contribuições: a da matriz de massa e a da matriz de rigidez. É importante informar que as matrizes de massa e rigidez são obtidas do modelo matemático deduzido e que o sistema é assumido inicialmente como sendo não amortecido. Assim, a matriz de amortecimento resultante $[C]$ é uma combinação linear destas matrizes onde os fatores α e β , multiplicam, respectivamente as matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ (BELTRÁN-CARBAJAL, 2011). Chopra (2000) define esta matriz segundo a "Equação (5)".

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5)$$

A "Equação (5)" pode ser reescrita de forma a calcular os coeficientes α e β segundo a "Equação (6)", tendo como entrada a frequência natural ω_r e o fator de amortecimento ζ_r correspondente ao r -ésimo modo. Segundo Alves (2015) e Silva (2020), com base na coleta de pontos da FRFs ou FFTs (Transformada Rápida de Fourier) experimentais pode-se empregar o método dos Mínimos Quadrados para determinar os parâmetros modais necessários para o cálculo dos coeficientes de amortecimento proporcional.

$$\zeta_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2} \quad (6)$$

2.3 Função de Resposta em Frequência (FRF)

A função de resposta em frequência é uma representação matemática dada pela razão do sinal de saída (magnitude do deslocamento em regime permanente) pelo sinal de entrada (frequência de excitação) (NEWLAND, 1989).

Uma vez estimada a matriz de amortecimento $[C]$ a partir dos dados experimentais e da matriz modal $[\Phi]$ (obtida conhecendo-se as matrizes $[M]$ e $[K]$) é possível determinar as matrizes de massa modal $[M_r]$, amortecimento modal $[C_r]$ e rigidez modal $[K_r]$ a partir das expressões $[M_r] = [\Phi]^T[M][\Phi]$, $[C_r] = [\Phi]^T[C][\Phi]$ e $[K_r] = [\Phi]^T[K][\Phi]$, respectivamente.

De posse das referidas matrizes, Craig (1981) define as partes real, $\Re(\bar{H}_{ij})$, e imaginária, $\Im(\bar{H}_{ij})$, da função (complexa) de resposta em frequência, \bar{H}_{ij} , através das equações abaixo:

$$\Re(\bar{H}_{ij}) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{K_r} \right) \left[\frac{1 - r_r^2}{(1 - r_r^2)^2 + (2\zeta_r r_r)^2} \right] \quad (7)$$

$$\Im(\bar{H}_{ij}) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{K_r} \right) \left[\frac{-2\zeta_r r_r}{(1 - r_r^2)^2 + (2\zeta_r r_r)^2} \right] \quad (8)$$

Sendo N o número de graus de liberdade, r_r a razão de frequências do r -ésimo modo, e ϕ_r é o vetor modal do r -ésimo modo e i e j são, respectivamente, as posições da excitação (entrada) e da medição (saída). Por fim, a magnitude da função de transferência complexa é dada por:

$$|\bar{H}_{ij}| = \sqrt{[\Re(\bar{H}_{ij})]^2 + [\Im(\bar{H}_{ij})]^2} \quad (9)$$

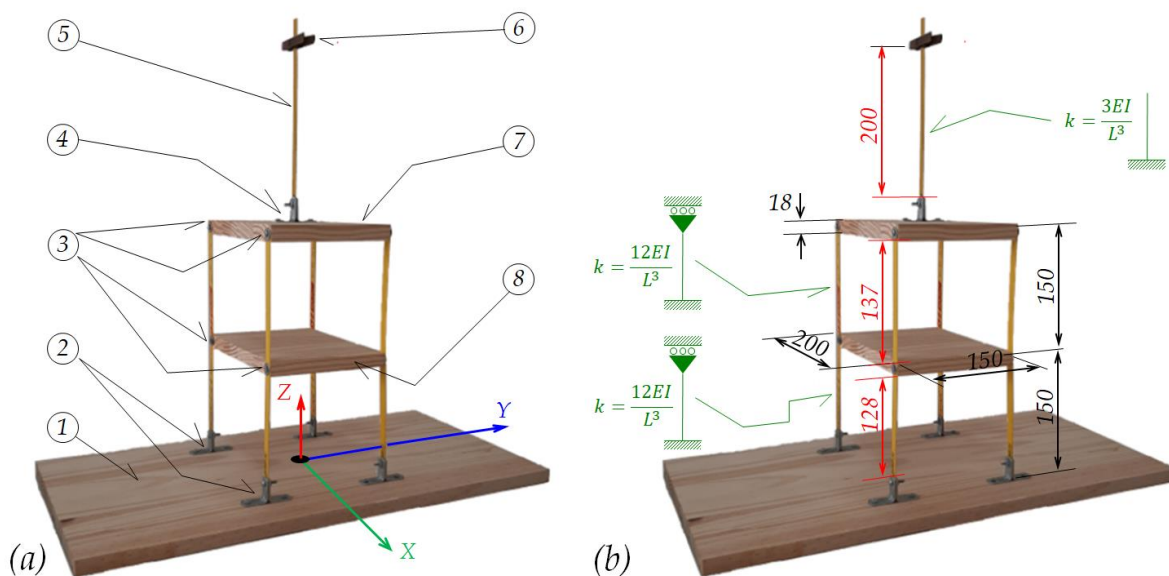
A partir da qual será possível extrair as frequências naturais amortecidas teóricas sobre o modelo com o amortecimento proporcional já incorporado.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Construção da bancada didática

A bancada didática é constituída de uma base de madeira, dois pavimentos também feitos de madeira, cinco pernas metálicas e um pregador. Cada um dos pavimentos e o pregador são considerados como massas pontuais. As pernas metálicas funcionam como molas e amortecedores (devido ao amortecimento interno). A “Figura 2(a)” mostra os principais elementos da bancada enquanto que a “Figura 2(b)” apresenta as principais dimensões além das condições de contorno assumidas para cada pavimento: engastado-deslizante para os dois primeiros e engastado-livre para o último (“antena”).

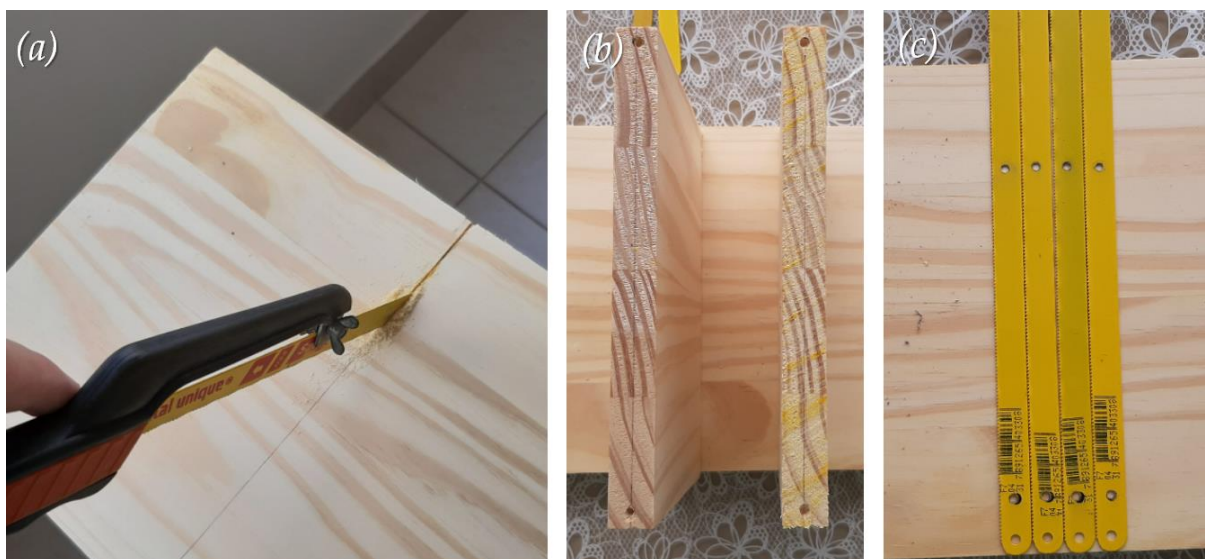
Figura 2 – (a) Bancada Experimental: (1) base; (2) cantoneiras de engaste; (3) arruelas de engaste; (4) cantoneira de engaste; (5) perna metálica; (6) massa m_3 ; (7) massa m_2 e (8) massa m_1 . (b) dimensões principais (em vermelho os comprimentos livres de coluna) e condições de contorno (destacadas em verde).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Os pavimentos foram construídos a partir de cortes de um painel de madeira (*pinus*) encontrado em lojas de construção (vide “Figura 3(a)”). Nos lados foram feitos furos para permitir a fixação com as pernas metálicas (vide “Figura 3(b)”), e as pernas metálicas foram construídas a partir de lâminas de serra manual (cuja seção transversal mede 13,0×0,6 mm) também encontradas em lojas de construção (vide “Figura 3(c)”).

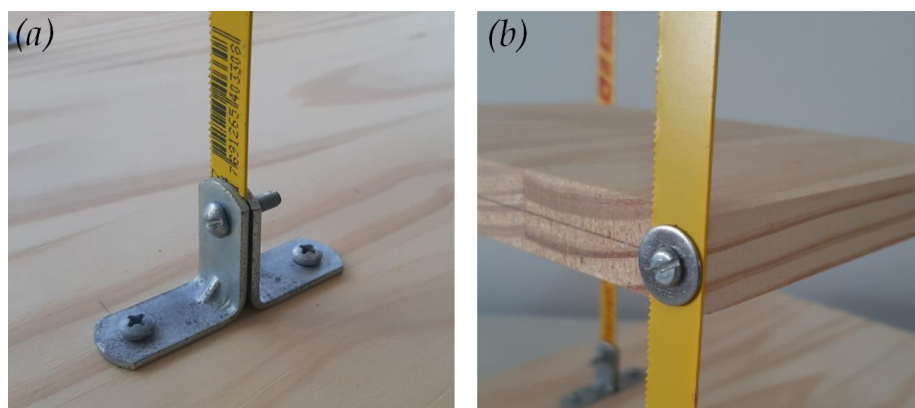
Figura 3 – Etapas da construção da bancada didática. (a) corte do pavimento; (b) furação dos pavimentos; (c) lâminas com a furação para fixação.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A fixação das pernas com a base é tal que todo o comprimento da cantoneira faz contato com a lâmina, restringindo sobremaneira a chance de deslizamento entre elas conforme a “Figura 4(a)”, e os pavimentos foram fixados às pernas através de parafusos e arruelas de forma a maximizar a área de contato (vide “Figura 4(b)”). Dessa forma, na direção da excitação, as pernas são consideradas engastadas na base e no pavimento.

Figura 4 – Fixação das pernas em detalhe: (a) engastamento com a base e (b) enegaste no pavimento.



Fonte: Elaborada pelos autores.

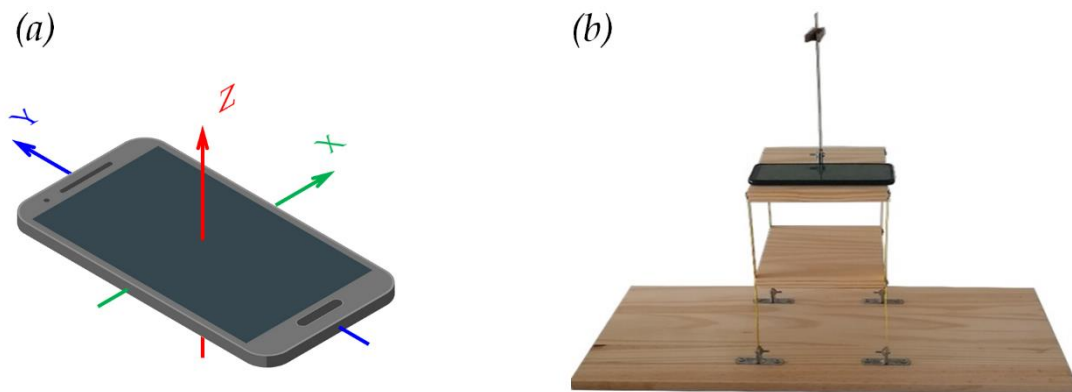
O custo total com a aquisição de todos os itens para a construção da bancada didática, que foi executada em ambiente residencial, foi de aproximadamente R\$120,00 em abril de 2020.

3.2 A configuração da bancada para o ensaio experimental

Sabe-se que os sistemas vibram ou se movimentam em todas as direções. Entretanto a bancada foi projetada e construída para que toda a movimentação ocorresse somente no plano vertical e na direção Y . Assim, conforme a “Figura 5(a)”, alinhou-se a direção Y do sistema de coordenadas do celular com a direção Y do sistema de coordenadas mostrado na “Figura 2(a)”,

acomodando o celular no segundo pavimento, conforme a “Figura 5(b)”. Portanto, a massa do celular foi incorporada à massa m_2 do pavimento. Outro detalhe importante é que o coeficiente de atrito entre o par de superfície celular (com sua capa de borracha) e a madeira que compõe o pavimento foi suficientemente grande para garantir o movimento solidário entre ambos quando a estrutura da bancada oscilava após a imposição de uma condição inicial de deslocamento de 50 mm na massa m_3 (ponta da “antena”) e na direção Y.

Figura 5 – (a) Sistema de coordenadas do celular; (b) posição do “smartphone” para aquisição da aceleração experimental.



Fonte: Elaborada pelos autores.

3.3 Massas dos elementos da bancada experimental

A “Tabela 1” mostra os valores das massas utilizadas na bancada ensaiada.

Tabela 1 – Rigidez das pernas metálicas

1° pavimento	2° pavimento	Ponta da “Antena”
m_1 [kg]	m_2 [kg]	m_3 [kg]
0,270	0,485	0,004

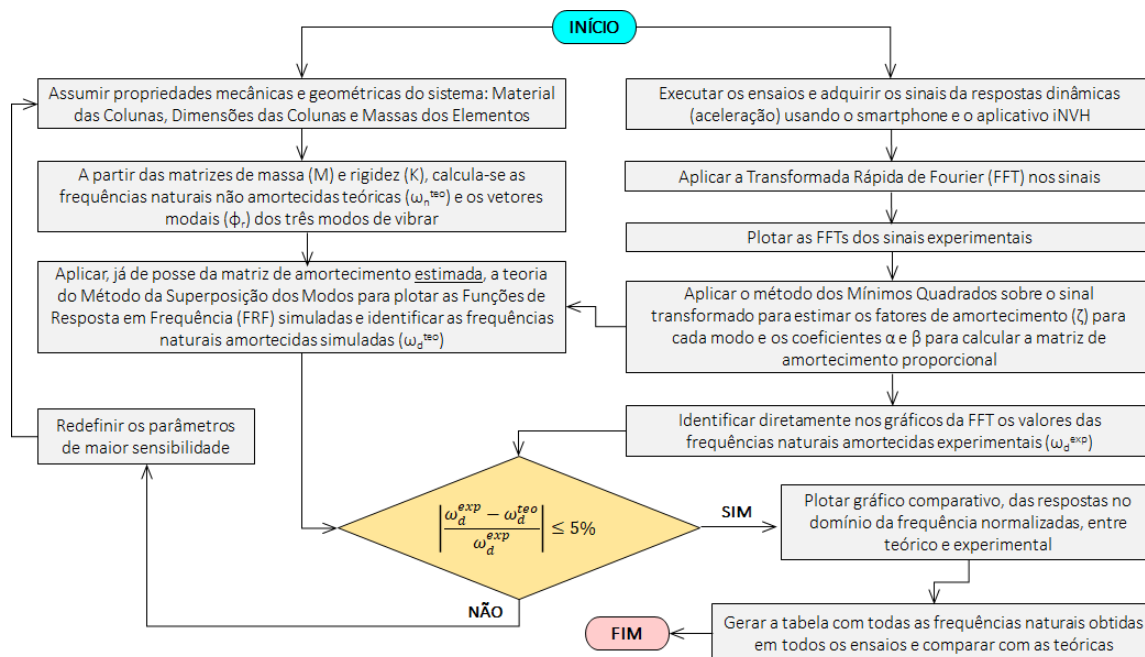
Fonte: Elaborada pelos autores.

A massa do celular utilizado, que é de 0,183 kg, já foi incorporada à massa m_2 apresentada na “Tabela 1”.

3.4 Estratégia da geração de resultados

A “Figura 6” mostra todas as etapas realizadas que levaram aos resultados que serão mostrados na seção seguinte. Com este fluxograma o leitor pode ter uma visão panorâmica sobre os procedimentos adotados.

Figura 6 – Fluxograma da estratégia de geração de resultados.



Fonte: Elaborada pelos autores.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção é dedicada a apresentar a sequência de resultados preconizadas na estratégia estabelecida na seção anterior.

4.1 Ajuste das rigidezes

Foi assumido para o aço da lâmina $E = 205 \text{ GPa}$ por não se conhecer, *a priori*, o valor exato. Assim, calculou-se os valores de rigidezes iniciais para as pernas metálicas. A partir do experimento, ajustou-se as rigidezes por tentativa e erro até que primeira frequência natural teórica se aproximasse da experimental. Com isso as demais tenderiam a acompanhar o ajuste. O parâmetro de maior sensibilidade para ser ajustar a rigidez é a espessura h da lâmina, haja visto que o momento de inércia de área é dado por $I = bh^3/12$, onde o valor final convergiu para $h = 0,592 \text{ mm}$. Entretanto, foi necessário ajustar o módulo de elasticidade também, que finalizou com o valor de $E = 190 \text{ GPa}$. A “Tabela 2” mostra as rigidezes antes e depois do referido ajuste. Para o amortecimento proporcional, computou-se $\alpha = 0,0875$ e $\beta = 0$, conforme detalhado por Silva (2020).

Tabela 2 – Rigidez das pernas metálicas.

Rigidez	k_1 [N/m]	k_2 [N/m]	k_3 [N/m]
Antes do ajuste	1066,84	829,95	13,74
Após o ajuste	1024,73	797,19	13,20

Fonte: Elaborada pelos autores.

4.2 Frequências naturais experimentais

Foram realizados um total de três ensaios com o celular posicionado no segundo pavimento (m_2) e os sinais de aceleração em função do tempo foram adquiridos com o aplicativo gratuito

iNVH da Bosch e salvos em arquivos com extensão CSV. Então, usando *Scilab* as FFTs foram calculadas e plotadas e as frequências naturais amortecidas experimentais foram observadas e anotadas na “Tabela 3”.

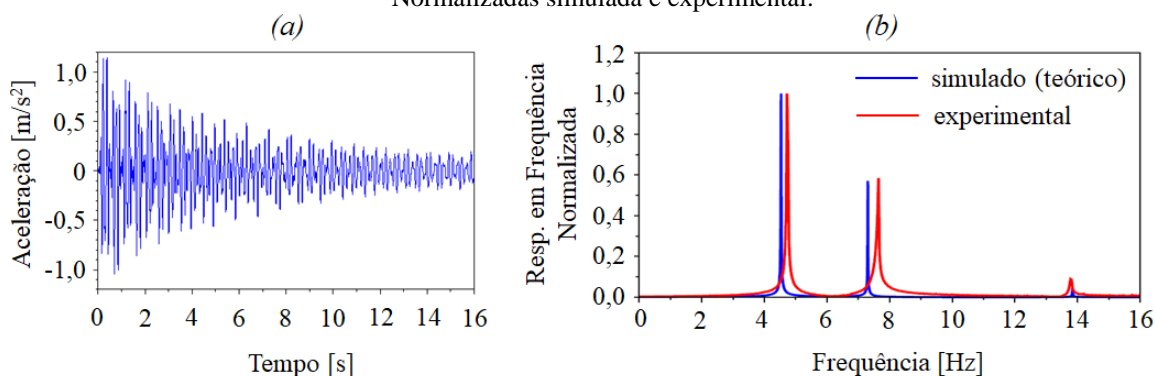
Tabela 3 – Frequências naturais experimentais.

Frequência	Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Média	Desvio Padrão
ω_1 [Hz]	4,502	4,722	4,725	4,650	0,128
ω_2 [Hz]	7,303	7,645	7,663	7,537	0,203
ω_3 [Hz]	13,172	13,781	13,771	13,575	0,349

Fonte: Elaborada pelos autores.

Para que se viabilizasse a comparação direta de uma FRF teórica (que é uma razão entre um sinal de saída pelo sinal de entrada) e uma FFT experimental (que é aplicada apenas ao um sinal de saída medido), optou-se pela normalização dos dois resultados pelos seus respectivos valores máximos. A “Figura 7(a) mostra o sinal de aceleração coletado em um dos ensaios enquanto que a “Figura 7(b)” mostra a comparação entre as respostas em frequência teórica e simulada, já normalizadas. Nota-se, claramente, a fidedignidade entre os resultados pela boa concordância, principalmente, em termos das frequências naturais. Além disso, é digno de nota os baixos desvios padrão (sobretudo quando comparado ao valor da média) da amostra considerada, conforme revelados na “Tabela 4”.

Figura 7 – (a) Aceleração adquirida em um dos ensaios; (b) Comparativo das Respostas em Frequência Normalizadas simulada e experimental.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para finalizar, a “Tabela 4” apresenta a comparação entre os valores das frequências naturais amortecidas teórica (simulada) e experimental.

Tabela 4 – Comparação das frequências naturais amortecidas.

	ω_1 [Hz]	ω_2 [Hz]	ω_3 [Hz]
Experimental (média)	4,650	7,537	13,575
Simulada	4,533	7,303	13,848
Erro [%]	2,5	3,1	2,0

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os erros máximos entre o experimental e teórico estão na faixa dos 3%, o que do ponto de vista de um trabalho experimental, é razoavelmente baixo. Vale lembrar que as hipóteses assumidas para as condições de contorno para simular o modelo matemático dificilmente

ocorrem no experimento, uma vez que foi empregada cantoneiras e arruelas simples para imobilizar as pernas metálicas. Este detalhe, por si só já constitui uma fonte de erro, além de alguma imprecisão nas medições dos parâmetros geométricos dos elementos que compõem a bancada.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho dedicou-se a construir uma bancada didática de três graus de liberdade de baixo custo com o propósito de comparar os dados simulados, com base na teoria, com os dados experimentais. A comparação entre as frequências naturais do modelo teórico e experimental apresentaram erros na ordem dos 3%, revelando uma concordância importante entre estes resultados, que considerando todos os aspectos construtivos tratados anteriormente é um valor baixo. Neste contexto, o trabalho possibilita compreender mais facilmente o fenômeno de vibração para uma estrutura real utilizando ferramentas da dinâmica estrutural que, em essência, podem ser aplicadas a outros problemas de engenharia que não sejam necessariamente semelhantes a bancada deste trabalho e, desta forma, mostra a viabilidade de se estudar o comportamento dinâmico de uma estrutura de três graus de liberdade através desta bancada e um "smartphone". Assim, diante dos comentários e pontos levantados, e considerando que o aplicativo e software utilizados são gratuitos, infere-se que os objetivos previamente estabelecidos foram alcançados com êxito, recomendando a abordagem utilizada como solução pedagógica complementar, apoiando as atividades realizadas em laboratórios de ensino convencionais.

REFERÊNCIAS

ALVES, Marco Túlio Santana. **Controle de Vibrações em Máquinas Rotativas usando Ligas com Memória de Forma**. 150 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

BELTRÁN-CARBAJAL, Francisco. **Vibration Analysis and Control – New Trends And Developments**. Editora InTech. 2011.

CHOPRA, Anil Kumar. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 2ª edição, Editora Prentice Hall, 2000.

CRAIG, Roy R. **Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods**. 1ª edição, Editora John Wiley Sons, Inc. 1981.

NEWLAND, David Edward. **Mechanical Vibration Analysis and Computation**. 1ª edição, São Paulo: Dover Publications, 1989.

RAO, Singeresu. **Vibrações Mecânicas**. Editora Person. 4ª edição, 2008.

SILVA, Matheus Tibérius Donadon Ramos. **Construção e Análise do Comportamento Dinâmico de uma Bancada Didática**. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2020.

LOW COST EDUCATIONAL TEST RIG USING A SMARTPHONE FOR ACQUISITION OF THE VIBRATION SIGNAL AIMING TO COMPARE THEORETICAL AND EXPERIMENTAL NATURAL FREQUENCIES

Abstract: *The present work investigates the feasibility of studying the dynamic behavior of a structure with three degrees of freedom making a comparison between theoretical and experimental results. However, conventional equipment and instrumentation to acquire experimental data from vibration response are really expensive. For this reason, a low cost educational test rig was built and, for data acquisition, a “smartphone” with a free application was used. Thus, from the mathematical model obtained by using Newtonian Mechanics, the theoretical natural frequencies of the system were computed. From the experimental point of view, the Fast Fourier Transform was applied to the acquired acceleration signal to obtain the measured natural frequencies. After adjusting the theoretical model, considering the proportional damping approach, simulated and experimental natural frequencies were compared in such a way that the results obtained proved to be promising since the maximum error is up to 3%.*

Keywords: *Structural dynamics. Educational test rigs. Low cost experiment. Mechanical vibrations. Structural damping.*