

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA DA APLICAÇÃO DE FILTROS DE KALMAN NÃO LINEARES EM UMA PLANTA DE NÍVEL DE TRÊS TANQUES INTERCONECTADOS

Marcus Vinicius de Paula – marcusdepaula@ufmg.br

Petrus Emmanuel Oliveira Gomes Brant Abreu – petrusabreu@ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627 - 31270-901 - Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil

Wendy Yadira Eras Herrera – wendyerash@gmail.com

Departamento de Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Ouro Preto
Rua Trinta e Seis, 115 - 35931-022 - João Monlevade - Minas Gerais - Brasil

Resumo: Este trabalho apresenta uma abordagem didática para aplicação dos filtros de Kalman não lineares EKF e UKF em um sistema de nível formado por três tanques interconectados. Devido aos desafios relacionados ao ensino da filtragem nos cursos de graduação em Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação, demonstrações práticas da aplicação de tais técnicas permitem aos aprendizes assimilar melhor esse conteúdo que, apesar de muito relevante a esses cursos, é pouco abordado na graduação. É possível mostrar que os filtros podem ser aplicados a sistemas de simples construção, como o caso da planta didática de nível utilizada neste trabalho, confeccionada pelos próprios alunos de graduação. Por meio da planta em questão, é possível realizar um estudo multidisciplinar, envolvendo conceitos de identificação de sistemas multivariáveis e filtragem, tais como a experimentação do protótipo, estimação de estados por meio dos filtros e validação de modelos.

Palavras-chave: Filtros de Kalman. EKF. UKF. Identificação de Sistemas. Sistemas de Nível.

1 INTRODUÇÃO

Os filtros de Kalman são estimadores recursivos ótimos capazes de estimar os estados de um sistema por meio de variáveis mensuráveis, tais como os sinais de entrada e saída do sistema e de seu modelo matemático, normalmente representado no espaço de estados. Assumem-se que os ruídos de processo e de medição associados aos estados e às saídas do sistema, respectivamente, apresentam uma distribuição Gaussiana. A característica da recursividade confere aos filtros de Kalman a capacidade de realizar a estimativa dos estados do sistema à medida que os dados do processo são disponibilizados. Sendo assim, o comportamento recursivo do filtro possibilita a incorporação de novas informações observadas na estimação a *posteriori* dos estados, melhorando, desse modo, a estimativa a *priori* dos mesmos.

O filtro de Kalman surgiu na década de 1960, fruto do trabalho de Rudolf Emil Kalman (KALMAN, 1960), com a finalidade de resolver problemas de Engenharia Elétrica relacionados a controle de sistemas. De acordo com GREWAL e ANDREWS (2010), as primeiras aplicações do filtro de Kalman se deram no setor aeroespacial, mais precisamente no programa Apollo da NASA (do inglês, *National Aeronautics and Space Administration*), tendo como finalidade resolver o problema de orientação e navegação de naves espaciais. A aplicabilidade dessa técnica se estendeu, no decorrer dos anos, para outros campos da engenharia, tornando-se, por exemplo, solução de prateleira no setor aeroespacial (TEIXEIRA *et al*, 2008). Passados quase sessenta anos do surgimento do filtro de Kalman, essa técnica ainda continua sendo amplamente empregada em aplicações modernas, tais como rastreamento de alvos em práticas militares (YADAV, 2013), rastreamento via GPS (WANG, 2018), localização de robôs móveis

(SANGALE, 2013), filtragem de sinais da rede elétrica (SAMBUGARI JUNIOR, 2016), dentre outras.

No entanto, a formulação original do filtro de Kalman prevê a aplicação dessa técnica em sistemas dinâmicos lineares na presença de ruídos Gaussianos. A extensão dessa metodologia para aplicações em sistemas dinâmicos não lineares pode ser realizada, dentre outros, por meio do filtro de Kalman estendido (EKF) (JAZWINSKI, 1970; MAYBECK, 1979) e do filtro de Kalman *unscented* (UKF) (JULIER e UHLMANN, 2004). Segundo TEIXEIRA *et al* (2008), o EKF realiza a estimação dos estados do sistema linearizando o modelo matemático de forma analítica, por meio de uma expansão em séries de Taylor, ou numérica. Uma vez linearizado o modelo, é possível aplicar os passos do filtro de Kalman linear. O UKF, por sua vez, surge com a finalidade de tentar contornar as limitações provenientes do processo de linearização do EKF, utilizando uma linearização estatística. Esse método realiza a estimação dos estados por meio da transformada *unscented*. Essa transformada é responsável por determinar os pontos sigma, que são a redução dos vetores de estado a pequenos vetores, escolhidos deterministicamente.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma aplicação didática para os filtros de Kalman não lineares EKF e UKF em um sistema de nível composto por três tanques interconectados. O sistema em questão foi construído por alunos do curso de graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto com a finalidade de ser utilizado em aulas práticas das mais diversas disciplinas do curso. São apresentados em detalhes conceitos relacionados a identificação de sistemas, necessários à experimentação do sistema e construção dos filtros, tais como o projeto dos sinais de entrada, discretização de modelos em tempo contínuo, validação de modelos e testes de branqueamento. Além disso, realiza-se uma discussão a respeito das etapas de predição e assimilação de dados de ambos os filtros, mostrando suas similaridades e diferenças, vantagens e desvantagens e limitações ao uso desses filtros na estimação dos níveis (estados) dos tanques da planta didática.

O presente trabalho encontra-se estruturado da seguinte maneira: na Seção 2, são apresentadas as principais motivações e justificativas para a realização deste trabalho. A Seção 3 apresenta a formulação do problema. Na Seção 4 são apresentadas as equações do EKF, enquanto a Seção 5 apresenta as equações do UKF. A Seção 6, por sua vez, apresenta a aplicação dos filtros EKF e UKF em uma planta didática de nível. Por fim, na Seção 7, são realizados os comentários finais a respeito deste trabalho.

2 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVAS

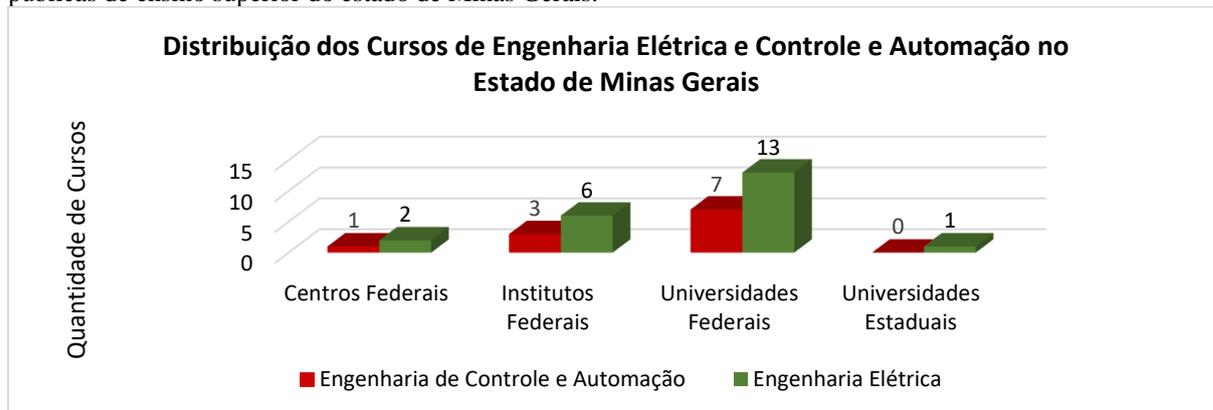
Conforme mencionado na Seção 1, os filtros de Kalman apresentam relações estreitas com a identificação de sistemas, uma vez que empregam os conceitos de estimadores recursivos para estimação das sequências de estado. Além disso, uma série de outros conceitos citados na Seção 1 e relacionados à identificação de sistemas são necessários para a construção dos filtros. Essas relações são evidenciadas em AGUIRRE (2015), que dedica um capítulo de sua obra exclusivamente ao estudo dos filtros de Kalman.

No decorrer do primeiro semestre de 2019, realizou-se uma pesquisa com a finalidade de investigar a oferta de disciplinas relacionadas à identificação de sistemas nos cursos de graduação em Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação das instituições públicas de ensino superior do estado de Minas Gerais. O principal objetivo dessa pesquisa é verificar se há ou não um número significativo de universidades no estado que abordam os conteúdos relacionados à identificação de sistemas nos dois cursos de graduação em questão, levando em conta que esses conteúdos são premissas básicas para o ensino dos filtros de Kalman. As consultas foram realizadas somente em instituições públicas de ensino superior devido à maior facilidade de acesso às informações, tais como matrizes curriculares e planos

pedagógicos dos cursos, por meio de suas plataformas digitais. O estado de Minas Gerais foi escolhido pelo fato de ser a unidade federativa que concentra o maior número de instituições públicas de ensino superior do Brasil. As instituições públicas de ensino superior do estado oferecem 22 cursos de graduação em Engenharia Elétrica e 11 cursos de graduação em Engenharia de Controle e Automação, divididos entre universidades estaduais, centros federais, institutos federais e universidades federais. A Figura 1 apresenta um diagrama que estratifica a oferta desses cursos em função do tipo de instituição de ensino. Desse total de 33 cursos, somente 11 abordam, segundo suas matrizes curriculares e planos pedagógicos, temas relacionados à identificação de sistemas (seja de forma integral ou parcial). A Figura 2 apresenta um gráfico que estratifica a divisão dos cursos que contemplam ou não o conteúdo de identificação de sistemas em função do curso de graduação em questão. Ao analisar o conteúdo programático dos cursos que ofertam a disciplina de Identificação de Sistemas, percebe-se que o estudo dos filtros de Kalman são temas pouco abordados nas ementas dessa cadeira.

Considerando os resultados da pesquisa e a importância dos filtros de Kalman em projetos relacionados às duas Engenharias em questão, esse trabalho tem como finalidade servir como um tutorial simplificado para o ensino dos filtros de Kalman nos cursos de graduação em Engenharia. O objetivo principal é mostrar que é possível a abordagem de tais conteúdos por meio de aulas práticas, utilizando um protótipo de baixo custo construído pelos próprios alunos.

Figura 1 – Distribuição dos cursos de Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação nas instituições públicas de ensino superior do estado de Minas Gerais.



Fonte: Plataformas digitais das instituições públicas de ensino superior do estado de Minas Gerais.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA: FILTRO DE KALMAN NÃO LINEAR

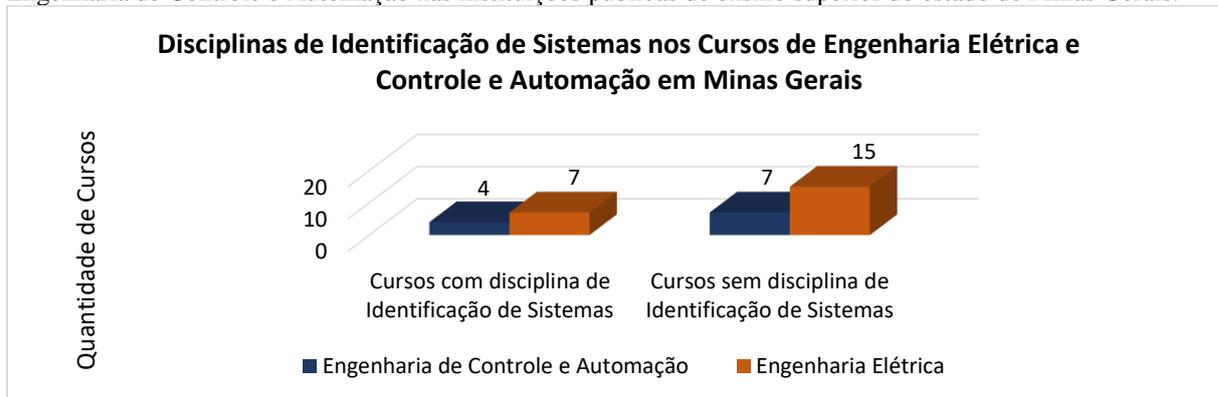
Considere um sistema dinâmico não linear, discreto e representado no espaço de estados

$$x(k) = f(x(k-1), u(k-1)) + G(k-1)\omega(k-1), \quad (1)$$

$$y(k) = h(x(k)) + v(k). \quad (2)$$

Os sinais $\omega(k-1) \in \mathbb{R}^q$ e $v(k) \in \mathbb{R}^m$ são, respectivamente, ruídos brancos de processo e de medição, com distribuição Gaussiana, média nula, decorrelacionados e com matrizes de covariância conhecidas $E[\omega(k-1)\omega(k-1)^T] = Q(k-1) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ e $E[v(k)v(k)^T] = R(k) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Assumem-se também conhecidos os modelos de processo $f(\cdot)$, de observação $h(\cdot)$, os sinais de entrada $u(k-1) \in \mathbb{R}^p$, saída $y(k) \in \mathbb{R}^m$ e a matriz $G(k-1) \in \mathbb{R}^{n \times q} \forall k > 0$, bem como a estimativa das médias $\hat{x}(0|0) \in \mathbb{R}^n$ e da matriz de covariância $P^{xx}(0|0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dos estados iniciais $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Figura 2 – Distribuição das disciplinas de Identificação de Sistemas (e afins) nos cursos de Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação nas instituições públicas de ensino superior do estado de Minas Gerais.



Fonte: Plataformas digitais das instituições públicas de ensino superior do estado de Minas Gerais.

O objetivo dos filtros de Kalman não lineares é estimar tanto a média dos estados $\hat{x}(k|k) \in \mathbb{R}^n$ quanto a matriz de covariância $P^{xx}(k|k) \in \mathbb{R}^n$ a posteriori. A notação $P^{xx}(a|b)$ indica a matriz de covariância no instante de tempo a baseada no conhecimento disponível até o instante b . Conforme citado na Seção 1, os filtros de Kalman são divididos em duas etapas. Na primeira delas, a etapa de predição, são calculadas as matrizes de covariância $P^{xx}(k|k-1)$, $P^{xy}(k|k-1)$, $P^{yy}(k|k-1)$ e as médias dos estados $\hat{x}(k|k-1)$ e das saídas $\hat{y}(k|k-1)$ por meio das informações conhecidas a priori. A segunda etapa, de assimilação de dados, tem como finalidade determinar o ganho de Kalman $K(k)$ e assim estimar $\hat{x}(k|k)$ e $P^{xx}(k|k)$. De acordo com (DE PAULA, 2018), o valor ótimo do ganho de Kalman $K(k)$ é determinado minimizando o funcional de custo

$$J(k)(K(k)) \triangleq \text{tr} \left(P^{xx}(k|k) \right), \quad (3)$$

segundo o critério da mínima variância

$$K(k) \triangleq \arg \min_{\hat{K}(k)} J(k) \left(\hat{K}(k) \right). \quad (4)$$

As equações do EKF e do UKF são apresentadas em detalhes nas Seções 4 e 5, respectivamente.

4 FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO

O filtro de Kalman estendido (JAZWINSKI, 1970; MAYBECK, 1979) é uma das variações do filtro de Kalman linear aplicado na estimação de estados de sistemas não lineares. Como mencionado anteriormente, o EKF lineariza analiticamente o modelo do sistema para que as equações do filtro de Kalman linear possam ser aplicadas. Em um primeiro instante, de posse de informações conhecidas a priori, são apresentados os passos da etapa de predição do EKF. A forma como as equações do EKF são apresentadas nesta seção tem como referência o trabalho de TEIXEIRA *et al* (2008). Considere o sistema não linear representado em (1)-(2). Calculando as matrizes Jacobianas dos modelos de processo $f(\cdot)$ e de observação $g(\cdot)$, tem-se

$$F(k-1) = \frac{\partial f}{\partial x(k-1)}, x(k-1) = \hat{x}(k-1|k-1), \quad (5)$$

$$H(k) = \frac{\partial h}{\partial x(k)}, x(k) = \hat{x}(k|k-1), \quad (6)$$

em que $\hat{x}(k-1|k-1)$ é a média de $x(k-1)$ e $\hat{x}(k|k-1)$ é a média a priori dos estados calculada por meio do modelo do processo $f(\cdot)$, tal que

$$\hat{x}(k|k-1) = f(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), k-1). \quad (7)$$

Por meio de $\hat{x}(k|k-1)$ e do modelo de observação $h(\cdot)$, calcula-se a média a priori das saídas

$$\hat{y}(k|k-1) = h(\hat{x}(k|k-1), k). \quad (8)$$

Em seguida, calcula-se a matriz de covariância a priori $P^{xx}(k|k-1)$ por meio de (5), de $G(k-1)$ e das matrizes de covariância $Q(k-1)$ de $\omega(k-1)$ e $P^{xx}(k-1|k-1)$ de $x(k-1)$

$$P^{xx}(k|k-1) = F(k-1)P^{xx}(k-1|k-1)F^T(k-1) + G(k-1)Q(k-1)G^T(k-1). \quad (9)$$

Por fim, como último passo da etapa de predição, estimam-se as matrizes de covariância a priori $P^{xy}(k|k-1)$ e $P^{yy}(k|k-1)$ por meio de (6), (9) e da matriz de covariância $R(k)$ de $v(k)$

$$P^{xy}(k|k-1) = P^{xx}(k|k-1)H^T(k), \quad (10)$$

$$P^{yy}(k|k-1) = H(k)P^{xx}(k|k-1)H^T(k) + R(k). \quad (11)$$

A etapa seguinte, de assimilação de dados, consiste em determinar as médias dos estados $\hat{x}(k|k)$ e a matriz de covariância $P^{xx}(k|k)$ a posteriori. Utiliza-se, então, a solução do problema de otimização (3)-(4) dada por

$$K(k) = P^{xy}(k|k-1)[P^{yy}(k|k-1)]^{-1}, \quad (12)$$

em conjunto com (7), (8), (9), (11) e os dados de saída $y(k)$ para estimar $\hat{x}(k|k)$ e $P^{xx}(k|k)$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[y(k) - \hat{y}(k|k-1)], \quad (13)$$

$$P^{xx}(k|k) = P^{xx}(k|k-1) - K(k)P^{yy}(k|k-1)K(k)^T. \quad (14)$$

Os passos do EKF devem ser repetidos para $k = 1, \dots, N$, em que N é o número de amostras.

5 FILTRO DE KALMAN UNSCENTED

O filtro de Kalman *unscented* (JULIER e UHLMANN, 2004) é uma das variações do filtro de Kalman linear que surge como uma alternativa às limitações impostas pela linearização analítica empregada no EKF. Essa técnica utiliza uma linearização estatística. Assim como no EKF, o processo de construção do UKF apresenta as etapas de predição, em que as estimativas são realizadas por meio de informações conhecidas a priori e assimilação de dados, em que as estimativas são obtidas utilizando as informações resultantes da etapa de predição. Os passos do filtro UKF apresentados nesta seção seguem como referência o trabalho de TEIXEIRA *et al* (2008). Nesta seção, são apresentados somente os passos da etapa de predição do UKF, sendo os passos de assimilação de dados idênticos ao do EKF, apresentados na Seção 4. Por meio da transformada *unscented*, calcula-se, deterministicamente, os pontos sigma $X = [X_1, X_2, \dots, X_{n_{ps}}]$

$$X(k-1|k-1) = \hat{x}(k-1|k-1)1_{1 \times n_{ps}} + \sqrt{n} \begin{pmatrix} (P^{xx}(k-1|k-1))^{\frac{1}{2}} & \\ & -(P^{xx}(k-1|k-1))^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$X_j(k|k-1) = f(X_j(k-1|k-1), u(k-1), k-1), \quad j = 1, \dots, n_{ps}, \quad (16)$$

em que $n_{ps} = 2n$ e $(\cdot)^{\frac{1}{2}}$ denota a decomposição de Cholesky. Por meio dos pontos sigma X , o próximo passo consiste em estimar a média $\hat{x}(k|k-1)$ e a matriz de covariância $P^{xx}(k|k-1)$

$$\hat{x}(k|k-1) = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \gamma_j X_j(k|k-1), \quad (17)$$

$$P^{xx}(k|k-1) = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \gamma_j [X_j(k|k-1) - \hat{x}(k|k-1)][X_j(k|k-1) - \hat{x}(k|k-1)]^T + \dots$$

$$\dots + G(k-1)Q(k-1)G^T(k-1), \quad (18)$$

em que $\gamma_j = \frac{1}{2n}$, $j = 1, \dots, n_{ps}$. De posse de $\hat{x}(k|k-1)$ e $P^{xx}(k|k-1)$, os pontos sigma X são recalculados

$$X(k|k-1) = \hat{x}(k|k-1)1_{1 \times (2n+1)} + \sqrt{n} \left((P^{xx}(k|k-1))^{\frac{1}{2}} - (P^{xx}(k|k-1))^{\frac{1}{2}} \right). \quad (19)$$

Propagando os pontos sigma X , recalculados em (19), por meio de $h(\cdot)$, obtém-se

$$Y_j(k|k-1) = h(X_j(k|k-1), k), \quad j = 1, \dots, n_{ps}. \quad (20)$$

Uma vez calculado Y , a média a priori das saídas $\hat{y}(k|k-1)$ é obtida por meio de

$$\hat{y}(k|k-1) = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \gamma_j Y_j(k|k-1). \quad (21)$$

Por fim, o último passo da etapa de predição consiste em estimar as matrizes de covariância a priori $P^{yy}(k|k-1)$ e $P^{xy}(k|k-1)$

$$P^{yy}(k|k-1) = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \gamma_j [Y_j(k|k-1) - \hat{y}(k|k-1)][Y_j(k|k-1) - \hat{y}(k|k-1)]^T + R(k), \quad (22)$$

$$P^{xy}(k|k-1) = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \gamma_j [X_j(k|k-1) - \hat{x}(k|k-1)][Y_j(k|k-1) - \hat{y}(k|k-1)]^T. \quad (23)$$

A etapa de assimilação de dados do UKF é dada pelo conjunto de equações (12)-(14).

6 RESULTADOS

Esta seção apresenta uma aplicação prática dos filtros de Kalman não lineares EKF e UKF revisados nas Seções 4 e 5. O objetivo é mostrar que tais filtros podem ser aplicados a plantas didáticas simples, possibilitando o ensino desses temas nos cursos de Engenharia afins.

A Figura 3a mostra um sistema de tanques interconectados, inspirado no trabalho de GUIMARÃES *et al* (2005) e replicado pelos alunos do curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto. Trata-se de um sistema de nível, formado por três tanques interconectados pela base. A Figura 3b apresenta o diagrama esquemático desse sistema. Todos os tanques são idênticos, tendo altura h e área da base $A_1 = A_2 = A_3 = A_b$. As bombas DC (do inglês, *Direct Current*) 1 e 2 são responsáveis por enviar água do reservatório aos tanques 1 e 2. Os sinais de entrada u_1 e u_2 do sistema são as tensões (em V) aplicadas às bombas. Esses sinais de tensão regulam os fluxos de entrada q_1 e q_2 (em mL/s) de água nos tanques 1 e 2 por meio da relação linear $q_j = \eta u_j$, $j = 1, 2$, em que η é uma constante de proporcionalidade. As válvulas manuais 1 e 2, cujo as resistências são representadas por k_1 e k_2 , são responsáveis por regular o fluxo de saída de água dos tanques 1 e 2, respectivamente, para o reservatório. As válvulas cujo as resistências são representadas por k_{13} e k_{23} são responsáveis por conectar os tanques 1-3 e 2-3, respectivamente. Ressalta-se que todas as quatro válvulas são idênticas e que no ensaio de coleta de dados realizado no sistema todas as válvulas foram abertas na mesma posição (em 45°), de modo que $k_{13} = k_{23} = k_1 = k_2 = k_0$.

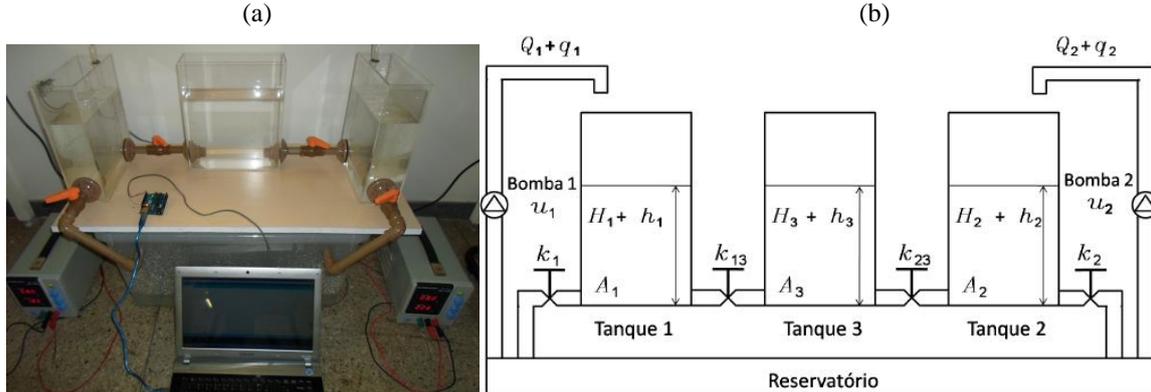
Os estados do sistema são os níveis h_1 , h_2 e h_3 dos três tanques. O modelo não linear desse sistema, obtido por GOSMANN (2002), é representado no espaço de estados por meio das seguintes equações

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{\eta u_1 + \text{sinal}(h_3 - h_1)k_0\sqrt{|h_3 - h_1|} - k_0\sqrt{h_1}}{A_b} + \omega_1, \quad (24)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{\eta u_2 + \text{sinal}(h_3 - h_2)k_0\sqrt{|h_3 - h_2|} - k_0\sqrt{h_2}}{A_b} + \omega_2, \quad (25)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{-\text{sinal}(h_3 - h_1)k_0\sqrt{|h_3 - h_1|} - \text{sinal}(h_3 - h_2)k_0\sqrt{|h_3 - h_2|}}{A_b} + \omega_3, \quad (26)$$

Figura 3 - (a) Sistema de tanques interconectados pela base do laboratório de controle e automação da Universidade Federal de Ouro Preto (*campus* João Monlevade). (b) Diagrama esquemático do sistema apresentado em (a).



Fonte: Adaptado de (DE PAULA, 2016).

em que ω_i , $i=1, \dots, 3$ são seqüências de ruído de processo. Por questões de padronização de nomenclatura, considera-se que $x_1 = h_1$, $x_2 = h_2$ e $x_3 = h_3$. As saídas de interesse do sistema são os níveis dos tanques 1 e 2

$$y_j = x_j + v_j, \quad j = 1, 2, \quad (27)$$

em que v_j , $j=1, 2$ são ruídos de medição. Uma vez definido o sistema e seu respectivo modelo não linear contínuo no tempo, o primeiro passo para a implementação dos filtros consiste em discretizar (24)-(27). Um método simples de realizar essa tarefa é por meio da fórmula de integração numérica explícita de Euler (AGUIRRE, 2015)

$$x_i(k) = x_i(k-1) + T f_i(x_i(k-1), t(k-1)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (28)$$

em que T é o período de amostragem em segundos. Sendo assim, o equivalente discreto de (24), por exemplo, é dado por

$$T \left(\frac{\eta u_1(k-1) + \text{sinal}(x_3(k-1) - x_1(k-1))k_0\sqrt{|x_3(k-1) - x_1(k-1)|} - k_0\sqrt{x_1(k-1)}}{A_b} \right) + \omega_1(k-1). \quad (29)$$

A Tabela 1 apresenta os parâmetros e variáveis utilizados na implementação dos filtros. Os sinais de entrada u_1 e u_2 projetados para excitar o sistema são apresentados na Figura 4. Trata-se de dois sinais PRBS (do inglês, *Pseudo Random Binary Sequences*), modulados por sinais aleatórios distintos. A escolha desse tipo de sinal se dá por três motivos. O primeiro deles é a facilidade de implementação e aplicação desses sinais ao sistema, uma vez que consistem de diversos degraus de amplitudes aleatórias. O segundo motivo é o fato desses sinais serem persistentemente excitantes, isso é, eles conseguem excitar suficientemente a dinâmica da planta e extrair as informações necessárias à estimação dos parâmetros e/ou estados do sistema. O terceiro motivo é o fato dos sinais de entrada u_1 e u_2 serem descorrelacionados entre si, o que é uma premissa na identificação de sistemas multivariáveis. Uma quarta característica desejável

aos sinais de entrada utilizados na identificação de sistemas não lineares refere-se à amplitude, que deve ser a maior possível. Desse modo, é possível excitar tanto as características dinâmicas quanto estáticas do sistema. Levando em consideração que altura h dos três tanques é de 30cm e que as válvulas do sistema se encontram igualmente posicionadas em 45° , os sinais de entrada não devem ultrapassar a amplitude de 4V para que não ocorram transbordamentos.

Tabela 1 – Variáveis e parâmetros utilizados na implementação dos filtros.

Variável/ Parâmetro	Valor	Variável/ Parâmetro	Valor	Variável/ Parâmetro	Valor	Variável/ Parâmetro	Valor
A_b	150cm ²	T	1s	$x_3(0)$	1cm	$P^{xx}(0 0)$	$6 \times 10^{-1} I_{3 \times 3}$
η	8,2	$x_1(0)$	1,5cm	$R(k)$	$6 \times 10^{-2} I_{2 \times 2}$		
k_0	4,2	$x_2(0)$	2,5cm	$Q(k-1)$	$1 \times 10^{-6} I_{3 \times 3}$		

A medição das saídas y_1 e y_2 são realizadas por meio de dois sensores ultrassônicos de distância HC-SR04 conectados a um arduíno UNO. Os sinais de saída são apresentados na Figura 5. Com a finalidade de eliminar o comportamento transitório do sistema, escolheu-se a janela de dados $1000 \leq k \leq 2000$. Projetando os sinais de entrada conforme descrito anteriormente, também é possível utilizar o conjunto de dados coletados para estimar modelos não lineares para o sistema, tais como modelos de Hammerstein e Wiener (DE PAULA, 2016).

Utilizando os parâmetros da Tabela 1, o modelo (24)-(27) devidamente discretizado e os passos dos filtros EKF e UKF, apresentados nas Seções 4 e 5, é possível estimar os estados do sistema. A Figura 6 mostra a validação por simulação livre dos filtros, comparando as estimativas dos estados (a) $\hat{x}_1(k)$, (b) $\hat{x}_2(k)$ e (c) $\hat{x}_3(k)$, determinados por meio dos filtros, e os estados $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$, obtidos por meio da simulação do modelo (24)-(26). O índice quantitativo VAF, (do inglês, *Variance Accounted For*) (DE PAULA, 2016), que calcula percentualmente o quão próximas as estimativas dos estados $\hat{x}_1(k)$, $\hat{x}_2(k)$ e $\hat{x}_3(k)$ encontram-se de seus valores verdadeiros são, respectivamente, 99%, 98,9% e 99,2% para o EKF e 89,1%, 99,4% e 99,4% para o UKF. Analisando a evolução temporal das estimativas, observa-se que os estados estimados por meio do EKF apresentam uma maior variância em relação aos estados estimados por meio do UKF. No entanto, a estimativa de $\hat{x}_1(k)$ obtida pelo UKF apresenta-se deslocada por um ganho DC em relação a $x_1(k)$. A Figura 7, por sua vez, apresenta as funções de autocorrelação $r_{\xi_j \xi_j}(\tau) = E[\xi_j(k-\tau)\xi_j(k)]$ das inovações $\xi_j = y_j - \hat{y}_j$, $j = 1, 2$, calculadas tanto para o EKF (a), (b) quanto para o UKF (c) e (d). Esse teste é chamado de branqueamento e tem como função verificar se os filtros conseguem explicar toda a informação contida nos dados. Se a inovação ξ_j se aproxima suficientemente de um ruído Gaussiano branco, a função de autocorrelação de ξ_j tende a apresentar a forma de um impulso unitário $r_{\xi_j \xi_j}(k) \approx 0, \forall k \neq 0$, que é exatamente o que ocorre nos quatro casos (considerando um intervalo de confiança de 95%). Desse modo, observa-se que ambos os filtros geram estimativas acuradas para o sistema.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram aplicados os filtros EKF e UKF em uma planta didática de nível. Por meio dos resultados, depreende-se que ambas as metodologias cumprem, de forma satisfatória, o objetivo de estimar os estados do sistema. No entanto, observa-se que os estados estimados por meio do EKF apresentam maior variância em relação às estimativas do UKF. Este resultado pode ser explicado por fatores como a sensibilidade do EKF a condições iniciais e ao ajuste das matrizes de covariância dos ruídos. Além disso, a partir da pesquisa realizada em várias instituições públicas de ensino superior do estado de Minas Gerais verifica-se o baixo número de universidades que ofertam disciplinas relacionadas à identificação de sistemas nos cursos de

graduação em Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação. Entretanto, percebe-se que os cursos que oferecem a disciplina de Identificação de Sistemas não abordam o estudo de filtros de Kalman. Dessa forma, sugere-se a incorporação da disciplina de Identificação de Sistemas na matriz curricular dos cursos de graduação em questão com o intuito de fornecer soluções para problemas de estimação de estados utilizando algoritmos baseados em filtragem de Kalman em aplicações tanto no ambiente acadêmico quanto na indústria.

Figura 4: Sinais de entrada (a) $u_1(k)$ e (b) $u_2(k)$ em V.

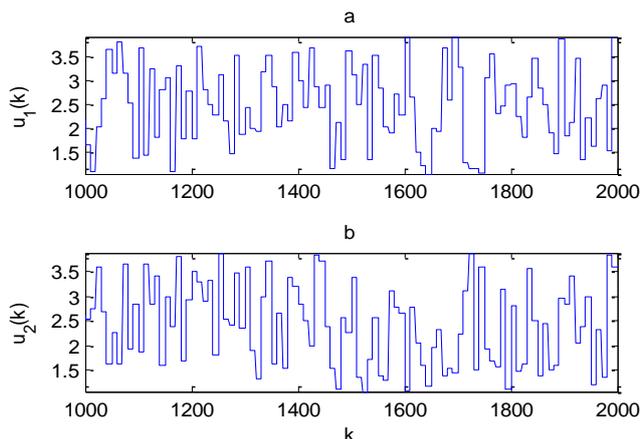


Figura 5: Sinais de saída (a) $y_1(k)$ e (b) $y_2(k)$ em cm.

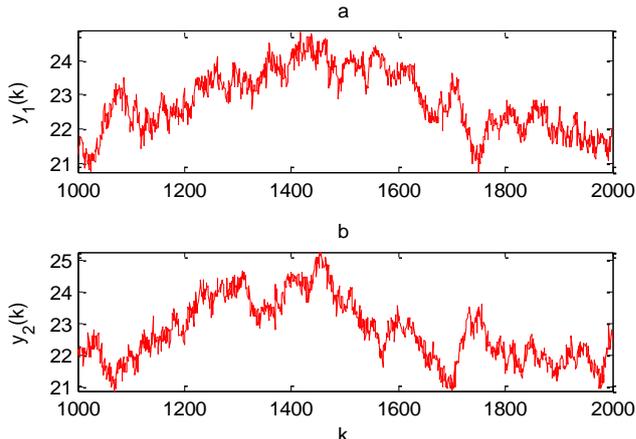


Figura 6: Estimativa dos estados (a) $x_1(k)$, (b) $x_2(k)$ e (c) $x_3(k)$ em cm. Em vermelho (-) tem-se os estados obtidos por meio da simulação do modelo do sistema, em azul (-) os estados estimados pelo EKF e em verde (·) os estados estimados pelo UKF.

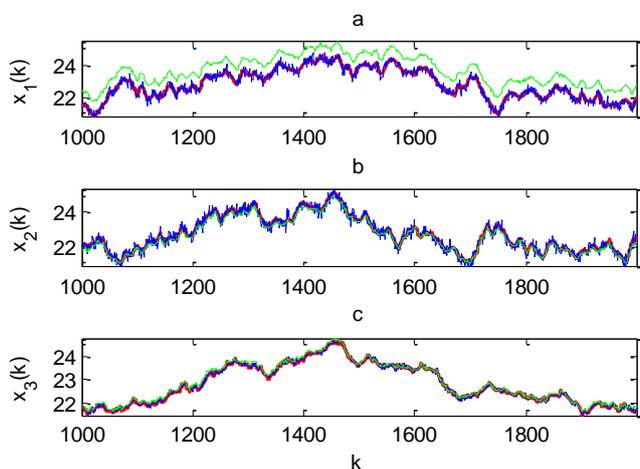
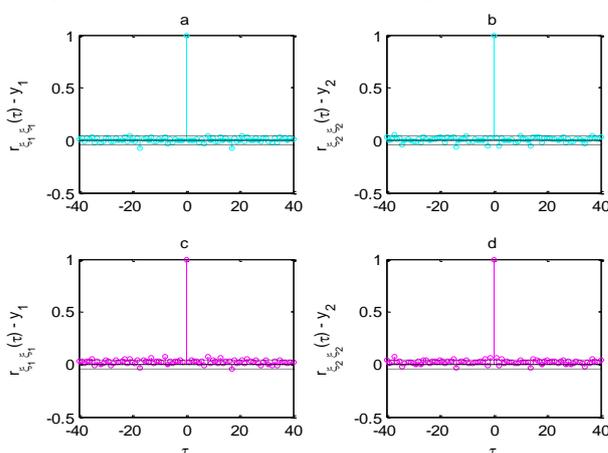


Figura 7: Autocorrelação da inovação $\xi_j, j = 1, 2$ dos sinais de saída (a) y_1 e (b) y_2 para o EKF e (c) y_1 e (d) y_2 para o UKF. Observa-se que para os quatro casos, as autocorrelações das inovações ξ_j são impulsos unitários. As retas pontilhadas em preto (·) representam os intervalos de confiança de 95%.



Agradecimentos

Os autores agradecem às instituições de ensino Universidade Federal de Ouro Preto e Universidade Federal de Minas Gerais por viabilizarem suas pesquisas.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. 4ª edição. Belo Horizonte. Editora UFMG. 2015.
- DE PAULA, A. A. **Estimação de Estados com Restrições Intervalares Utilizando Abordagens Estocástica e Zonotópica**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Minas Gerais. 2018.

DE PAULA, M. V. **Identificação de Modelos de Hammerstein e Wiener para Sistemas Não Lineares Multivariáveis Utilizando Métodos de Subespaços**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Minas Gerais. 2016.

GOSMANN, H. L. **Um Sistema Multivariável de Tanques Acoplados Para Avaliação de Técnicas de Controle**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade de Brasília. 2002.

GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. **Applications of Kalman Filtering in Aerospace 1960 to the Present [Historical Perspectives]**. IEEE Control Systems Magazine 30.3, p. 69-78. 2010.

GUIMARÃES, B.; SOUZA, A. S.; GOSMANN, H. L.; BAUCHSPIESS, A. **Internet Based Remote Laboratory: The Level Control of Three Coupled Water Reservoirs**. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Brasília. 2005.

JAZWINSKI, A. H. **Stochastic Processes and Filtering Theory**. Academic Press. Inc., New York City. EUA. 1970.

JULIER, S. J. & UHLMANN, J. K. **Unscented Filtering and Nonlinear Estimation**. Proceedings of the IEEE 92(3): 401-422. 2004.

KALMAN, R. E. **A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems**. Journal of Basic Engineering 82.1, p. 35-45. 1960.

MAYBECK, P. S. **Stochastic Models, Estimation, and Control**, v. 1. Academic Press. Inc., New York City. EUA. 1979.

SAMBUGARI JUNIOR, S. L. **Aplicação de Filtro de Kalman Para Filtragem de Sinais da Rede Elétrica**. Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Engenharia Elétrica. Universidade Estadual de Londrina. 2016.

SANGALE, V.; SHENDRE, A. **Localization of a Mobile Autonomous Robot Using Extended Kalman Filter**. Third International Conference on Advances in Computing and Communications, p. 274-277. IEEE, 2013.

TEIXEIRA, B. O. S.; AGUIRRE, L. A.; TÔRRES, L. A. B. **Filtragem de Kalman com Restrições para Sistemas Não Lineares: Revisão e Novos Resultados**. Revista Controle & Automação, v. 21, n. 10, p. 127-146. 2010.

WANG, X.; LIANG, M. **GPS Positioning Method Based on Kalman Filtering**. International Conference on Robots & Intelligent System, p. 77-80. 2018

YADAV, A.; AWASTHI, P.; NAIK, N.; ANANTHASAYANAM, M. R. **A Constant Gain Kalman Filter Approach to Track Maneuvering Targets**. IEEE International Conference on Control Applications (CCA), p. 562-567. 2013.

A DIDACTIC APPROACH OF THE APPLICATION OF NONLINEAR KALMAN FILTERS IN A LEVEL PLANT OF THREE INTERCONNECTED TANKS

This work present a didactic approach for the application of the nonlinear Kalman filters EKF and UKF in a level system formed by three interconnected tanks. Due to the challenges related to the teaching of filtering in the undergraduate courses in Electrical Engineering and Control and Automation Engineering, practical demonstrations of the application of these techniques allow the learners to better assimilate this content that, although very relevant to these courses, is little approached in the graduate. It is possible to show that the filters can be applied to systems of simple construction, as the case of the level didactic plant used in this work, made by the undergraduate students themselves. Through the plant in question, it is possible to carry out a multidisciplinary study, involving concepts of filtering and system identification, such as prototype experimentation, states estimation through filters and validation of models.

Key-words: Kalman Filter. EKF. UKF. System Identification. Level System.