O USO DE SOFTWARES COMO ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA PARA ENSINO NA TEORIA DOS GRAFOS

Resumo: *A teoria dos grafos tem origem no início do século XVIII, quando o célebre matemático Leonhard Euler se dedicou a resolução de um problema de encontrar um caminho através das sete pontes da cidade de Köningsberg, passando uma única vez em cada ponte e voltar ao ponto inicial. Neste contexto surge o conceito de grafos, que é uma abstração matemática para representar esse tipo de problema. Atualmente, a teoria de grafos vem ganhando espaço e se transformando em uma área da matemática atual e de grande produção científica. Esta teoria já é parte integrante da formação acadêmica e profissional dos estudantes de engenharias, constando como disciplina optativa nas grades curriculares em algumas universidades. Esse trabalho tem por objetivo apresentar uma sequência didática a fim de introduzir o conceito de grafos, apresentar alguns problemas clássicos, aplicações e o teorema de Euler. É proposto como recurso didático a utilização de um software computacional de exploração de grafos, tornando assim o processo de aprendizagem mais participativo. Espera-se que após a aplicação das atividades propostas aos alunos, sejam levantadas discussões de forma a superar dificuldades de aprendizagem e abstrações inerentes à teoria dos grafos. Além disso, são verificadas as potencialidades que o software propicia para o ensino e aprendizagem da teoria dos grafos. Como benefícios da proposta, podemos enumerar motivação dos alunos e do professor, facilitação da aprendizagem e desenvolvimento do raciocínio lógico, tornando a matemática mais significativa.*

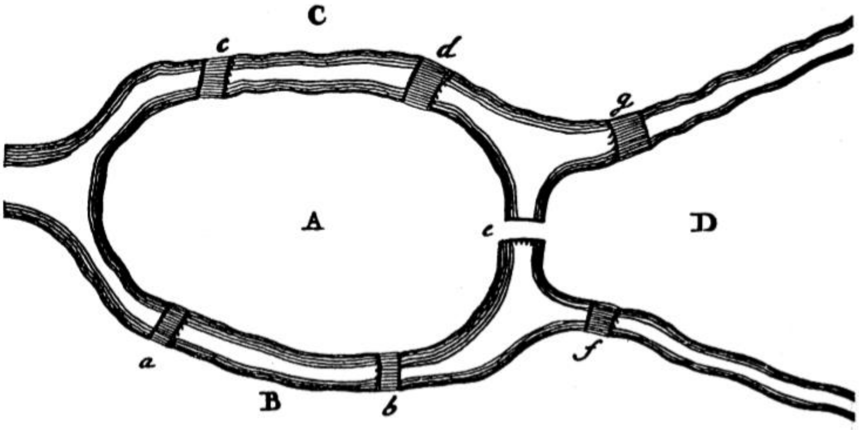
Palavras-chave: *Grafos. Teoria dos Grafos. Softwares. Modelagem Matemática.*

1 INTRODUÇÃO

Grande parte do desenvolvimento da ciência surge da necessidade em modelar um determinado fenômeno para resolver situações problema da realidade. Os avanços nas áreas tecnológicas transformaram significativamente a pesquisa em várias áreas do conhecimento, colocando os engenheiros defronte a problemas cada vez mais complexos. Neste sentido, a teoria dos grafos passou a ser uma poderosa ferramenta para compreensão e solução de grandes problemas que surgem no estudo de engenharia, computação e sistemas de comunicação.

O célebre matemático Leonhard Euler, em 1736, foi pioneiro no desenvolvimento da teoria dos grafos ao dedicar-se ao desafio das sete pontes de Königsberg, que consistia em atravessar sete pontes da cidade passando uma única vez por cada uma delas e voltar ao ponto inicial, conforme ilustrado na Figura 1. O estudo de Euler dedicado a resolução deste problema é um marco inicial que abre a possibilidade de analisar problemas de vários segmentos em uma estrutura de redes denominada "grafo".

Figura 1 – Diagrama representativo do problema das sete pontes de Königsberg.



Fonte: adaptado de Euler (1741)

Em um grafo, os objetos são constituídos por pontos (vértices) e estes são relacionados por meio de linhas (arestas). Por exemplo, no problema das pontes, as margens do rio e as ilhas são representadas por vértices e as pontes são representadas por arestas. Assim, o desafio das sete pontes consiste em decidir, dado um grafo, se é possível percorrer sequencialmente todas as suas arestas, sem repeti-las, e voltar ao ponto de partida. Euler provou que este problema não tem solução, isto é, a travessia não era possível. Com a resposta negativa, novos caminhos se abrem para a investigação de circunstâncias sob as quais a execução da tarefa é possível, originando a Teoria dos Grafos.

Por meio dos grafos é possível remodelar problemas para proporcionar maior facilidade de análise como por exemplo representação das moléculas químicas, redes de transporte, de comunicação e distribuição de energia, diagramas de fluxo de controle, redes neurais, e outras inúmeras aplicações em diversos ramos da matemática e da ciência como um todo.

A teoria dos grafos já é parte integrante da formação acadêmica e profissional dos estudantes de engenharias, constando como disciplina optativa nas grades curriculares em algumas universidades. No entanto, ao iniciar o estudo de grafos o aluno depara-se com uma matemática que exige alto grau de abstração em certos momentos, o que pode dificultar a representação, visualização, manipulação e análise dos grafos, principalmente nas aplicações. Assim, é conveniente a utilização de recursos computacionais como aplicativos para representações gráficas.

Esse trabalho tem por objetivo apresentar uma sequência didática a fim de introduzir o conceito de grafos, apresentar problemas clássicos, aplicações, o teorema de Euler e o algoritmo de Fleury, que consiste em encontrar um caminho que passe por todas as arestas de um grafo euleriano e retornar ao ponto inicial. Com o intuito de tornar o conteúdo mais atrativo e motivador para os discentes, é proposto como recurso didático a utilização de um software computacional de exploração de grafos, tornando o processo de aprendizagem mais participativo e proporcionando interatividade com outras disciplinas. Assim, o conteúdo matemático passa a ter significação, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto.

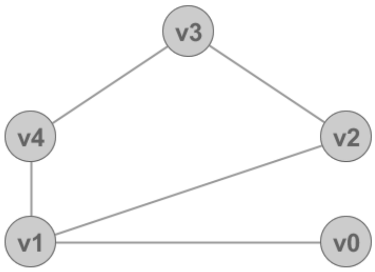
Após esta introdução, na segunda seção do artigo apresentaremos alguns conceitos básicos e notações de grafos, além de enunciar o clássico teorema para grafos eulerianos. Em seguida, será apresentada a sequência didática proposta pelos autores para uma primeira exposição do conteúdo de grafos. Finalmente, na terceira seção do artigo tecemos algumas considerações finais e discutiremos possíveis perspectivas de trabalhos futuros.

2 CONCEITOS BÁSICOS DE GRAFOS E GRAFOS EULERIANOS

Se V é um conjunto finito e considere o conjunto formado pelos subconjuntos de V com dois elementos distintos $E(V) = \left\{\{v_i, v_j\} \middle| v_i, v_j \in V,\ i \neq j\right\}$. Um par $G = (V, E)$, onde $E \subset E(V)$ é chamado de grafo. Os elementos de V são os vértices (ou nós) de G e os elementos de E de arestas (ou linhas) de G.

Um grafo G pode ser representado como uma figura plana desenhando uma aresta (reta ou curva) entre os vértices u e v. A Figura 2 é uma representação do grafo $G = (V, E)$ com $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$

Figura 2 – Representação de um grafo $\boldsymbol{G}$



Fonte: própria, feito com o software GraphTea

Um par $\{u, v\}$ de E usualmente é denotada simplesmente por uv. Observe que as arestas uv e vu são iguais. Se uv é um elemento de E, dizemos então que os vértices u e v são vizinhos ou adjacentes. O grau de um vértice v é o número de vizinhos que v possui, isto é, é o número de arestas incidentes em v.

Um caminho $v_0 - v_k$ em um grafo G é uma sequência de vértices distintos de G $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ tal que v_{i-1} é adjacente a v_i para todo $1 \leq i \leq k$. Um grafo G é conexo se existe um caminho $u - v$ para todo par u, v de vértices de G. Um ciclo em um grafo é um caminho fechado. Outras definições e conceitos importantes na teoria de grafos como de passeios, trilhas e circuitos, podem ser encontrados em Nicoletti e Hruschka (2018).

Existem diversos problemas clássicos na teoria dos grafos, tais como problemas de coloração de mapas, o problema do carteiro chinês, o problema do caixeiro-viajante, e outros problemas que podem ser modelados de maneira similar. Por exemplo, existem algoritmos clássicos na teoria dos grafos que investigam o problema do menor caminho em um grafo, questão que pode surgir na determinação do caminho mais curto de uma cidade a outra usando determinadas estradas, ou o caminho mais barato, caso utilizássemos grafos com pesos. Uma das soluções mais eficientes e mais utilizadas para este problema é o algoritmo de Dijkstra (SCHRIJVER, 2012). No entanto, existem diversas variações deste tipo de problema e diferentes algoritmos para sua investigação.

Como mencionado anteriormente, o primeiro problema na teoria dos grafos foi o problema das sete pontes de Königsberg, que consiste em passar por todas as pontes da cidade evitando o uso de qualquer uma das pontes duas vezes. Na prática, problemas similares a esse ocorrem, por exemplo, na otimização de redes de distribuição onde cada rua deve ser percorrida apenas uma vez para economizar tempo.

A questão neste tipo de problema é decidir, dado um grafo, se é possível percorrer sequencialmente todas as suas arestas, sem repeti-las, e voltar ao ponto de partida. Traduzindo o problema para a linguagem matemática dos grafos, esta questão é equivalente a determinar se o grafo que representa a situação é euleriano. Um grafo é dito euleriano se possui um ciclo euleriano, isto é, se possui algum caminho fechado que contenha todas as suas arestas e visita cada aresta apenas uma vez. A seguir, enunciamos o Teorema de Euler, que fornece condições necessárias e suficientes para um grafo ser euleriano: Um grafo conexo G é euleriano se e somente se todo vértice tiver um grau par. A demonstração do teorema de Euler pode ser encontrada em West (2002).

3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA INTRODUÇÃO DA TEORIA DOS GRAFOS EM SALA DE AULA

3.1 Software para exploração de grafos e grafos eulerianos

Existe uma grande variedade de softwares para exploração de grafos. No entanto, muitos desses softwares não são projetados para o ensino, e assim, exigem conhecimento prévio do aluno, principalmente de linguagem de programação. Portanto, é importante que o software auxiliar seja simples e de fácil aprendizado pelos alunos, para que não demande muito tempo para que sejam ensinados e explicados o passo-a-passo pelo em uma sala de aula. Além disso, é necessário que o software forneça uma boa capacidade de visualização e edição.

O software escolhido para auxiliar a sequência didática proposta neste artigo é o GraphTea. A escolha justifica-se por ser uma ferramenta bem completa que possibilita a análise de diferentes aspectos e algoritmos dos grafos, porém, mantendo a simplicidade para visualização e edição de grafos, uma vez que os autores o desenvolveram também com foco em fins educacionais. O GraphTea tenta facilitar o processo de ensino para professores e alunos enfatizando os recursos visuais e educacionais.

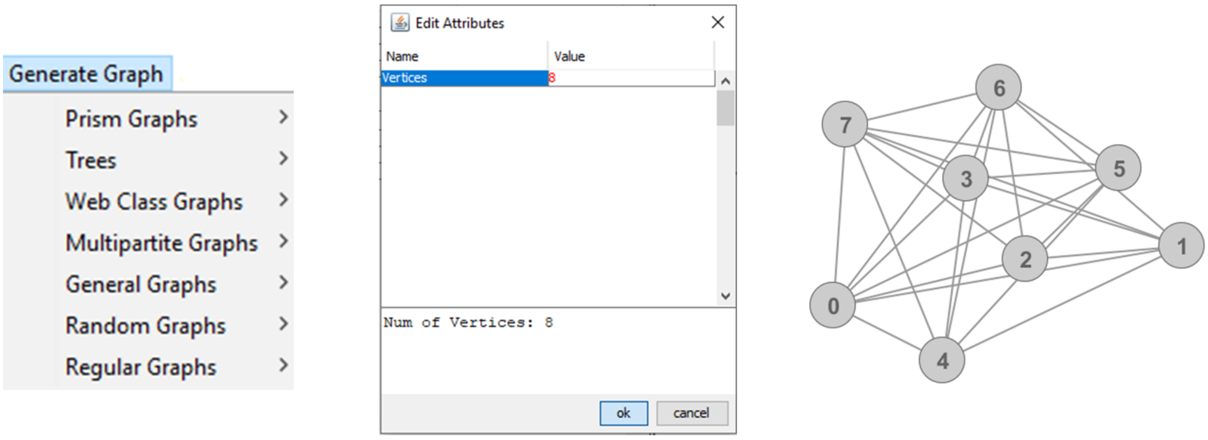
O GraphTea é um software de código aberto desenvolvido no departamento de matemática da Sharif University of Technology. É uma ótima ferramenta para desenhar, visualizar e apresentar grafos, aplicar operações, obter informações sobre os grafos (relatórios) e executar algoritmos passo a passo nos grafos. Ademais, pode ser observado na literatura que o software tem sido utilizado com sucesso para fins didáticos (ROSTAMI et al., 2014; EMANI et al., 2016)

A seguir, será apresentada a proposta de roteiro de aula para ensino dos conceitos iniciais de grafos, apresentação do teorema de Euler e do algoritmo de Fleury, utilizando como ferramenta o auxílio do software computacional GraphTea que facilita a análise e interpretação dos grafos, assim como dos algoritmos.

A sequência didática, em um primeiro momento apresenta uma definição básica do que seria um grafo, e depois algumas das diversas aplicações dessa teoria. O objetivo desta introdução é a motivação para o aprendizado do assunto, visto que a teoria de grafos tem aplicações em praticamente todas as áreas da ciência. Em seguida, para introduzir o conceito de grafos eulerianos, são propostos desafios aos alunos. O primeiro desafio consiste em representar por meio de um grafo o problema das sete pontes.

Para começar a investigação deste problema, são mostradas aos alunos as maneiras de gerar um grafo utilizando o software. É possível gerar um grafo por meio do menu “Generate Graph” (veja Figura 3(a)), e usar um modelo pré-definido para criar grafos de acordo com a conveniência do problema, tais como grafos regulares, completos, árvores, aleatórios, entre outros. Por exemplo, para criar um grafo aleatório, uma janela é aberta onde pode-se escolher o número de vértices (Figura 3(b)) e o grafo é exibido na área de trabalho (Figura 3(c)). Para alterar os atributos dos vértices e arestas basta selecionar e fazer as devidas alterações na aba “Properties”.

Figura 3 – Interface do software e geração de grafos:
(a) Menu "Generate Graph" do software GraphTea,
(b) Escolha do número de vértices e (c) Grafo
aleatório gerado pelo software.



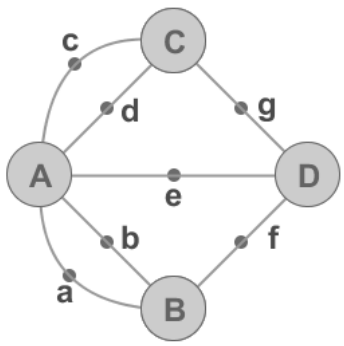
(a) (b) (c)

Fonte: software GraphTea

Grafos novos, direcionados ou não, também podem ser gerados clicando na opção "New Graph", utilizando o mouse. Esta última é uma maneira bem simples e intuitiva e é a escolha proposta para gerar os grafos durante a aula. Cada clique com o mouse na tela principal adiciona um novo vértice. As arestas podem ser criadas conectando dois vértices. Os vértices e arestas podem ser facilmente incluídos, deletados e editados, podendo mudar a cor, a forma, o nome, o peso etc.

Após exploração da interface do software e dos mecanismos de geração de grafos, os alunos devem esquematizar o problema das sete pontes. A Figura 4 mostra uma possível representação para este grafo, onde as margens do rio e as ilhas foram representadas por vértices e as pontes foram representadas por arestas (veja também o diagrama da Figura 1).

Figura 4 – Grafo do problema das sete pontes



Fonte: própria, feito com o software GraphTea

Em seguida, propõe-se modelar diferentes versões do problema das sete pontes de Königsberg, variando o número de vértices e arestas, para que o discente verifique em quais possíveis variações seria possível percorrer todos os vértices sem repetir nenhuma aresta. A proposta é que se constate empiricamente a validade do teorema de Euler, que mostra que o problema não tem solução quando o grau de um dos vértices é ímpar. Assim, o discente consegue verificar a veracidade do teorema de forma independente, antes deste ser apresentado formalmente e demonstrado. Comprova-se então que o problema das pontes de Königsberg não é um grafo euleriano, o que significa que é impossível atravessar todas as pontes uma vez só e voltar no lugar da partida.

3.2 Determinação do ciclo de Euler – algoritmo de Fleury

Nesta etapa, o aluno já consegue identificar com clareza grafos eulerianos. O novo desafio proposto então consiste em identificar qual é o ciclo euleriano deste tipo de grafo. Observa-se com os alunos que em grafos mais simples é possível facilmente construir este ciclo. No entanto, para grafos mais complexos, é necessário definir um protocolo para escolhas das arestas em cada etapa.

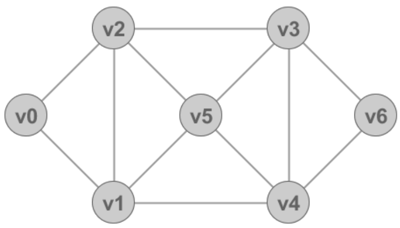
A ideia básica do algoritmo de Fleury é começar o caminho em qualquer vértice v e percorrer as arestas de forma aleatória, seguindo as seguintes regras:

1. Exclua as arestas depois de passar por elas;
2. Passe por uma ponte somente se não houver uma alternativa (uma aresta é dita ser uma ponte se a sua remoção torna o grafo desconexo).

O caminho gerado pelas arestas que foram sendo excluídos ao longo da aplicação do algoritmo de Fleury gera um ciclo euleriano. A demonstração deste fato, apesar de simples, foge ao escopo deste trabalho e pode ser encontrada em Clark e Holton (1998).

Para visualização e compreensão do algoritmo de Fleury pelos discentes, é considerado o grafo da Figura 5.

Figura 5 – Grafo euleriano $\boldsymbol{G}$, no qual será aplicado o algoritmo de Fleury para determinação do ciclo euleriano



Fonte: própria, feito com o software GraphTea

Como podemos analisar, como todos os vértices possuem grau par, o grafo é euleriano. Aplicaremos o algoritmo de Fleury para obter um ciclo euleriano, partindo do vértice v0. A Figura 6 ilustra a aplicação do algoritmo: a figura à esquerda mostra o vértice escolhido em cada etapa e o que resta do grafo G após a eliminação de uma aresta enquanto a figura à direita mostra a inserção de cada aresta a ser eliminada e o ciclo sendo construído. Os passo para a execução do algoritmo estão descritos a seguir:

Passo 1 (Figura 6(a)). Posição: vértice v0.
Opções de escolha: v0v1 ou v0v2.
Escolha aleatória: v0v1.
Construção do ciclo: a.

Passo 2 (Figura 6(b)). Posição: vértice v1.
Opções de escolha: v1v2, v1v4 ou v1v5.
Escolha aleatória: v1v2.
Construção do ciclo: ab.

Passo 3 (Figura 6(c)). Posição: vértice v2.
Opções de escolha: v2v3 ou v2v5. Observe que v2v0 não é uma opção por ser uma ponte.
Escolha aleatória: v2v3.
Construção do ciclo: abc.

Passo 4 (Figura 6(d)). Posição: vértice v3.
Opções de escolha: v3v4, v3v5 ou v3v6.
Escolha aleatória: v3v4.
Construção do ciclo: abcd.

Passo 5 (Figura 6(e)). Posição: vértice v4.
Opções de escolha: v4v1, v4v5 ou v4v6.
Escolha aleatória: v4v5.
Construção do ciclo: abcde.

Passo 6 (Figura 6(f)). Posição: vértice v5.
Opções de escolha: v5v1 ou v5v3. Observe que v5v2 não é uma opção por ser uma ponte.
Escolha aleatória: v5v3.
Construção do ciclo: abcdef.

Passos 7, 8, 9, 10, 11, 12 (Figura 6(f)). Posição: do vértice v3 até o retorno ao vértice v0.
Opções de escolha: Em cada um dos passos, só irá haver uma opção de escolha.
Escolhas: v3v6, v6v4, v4v1, v1v5, v5v2, v2v0.
Construção do ciclo euleriano: abcdefghijkl.

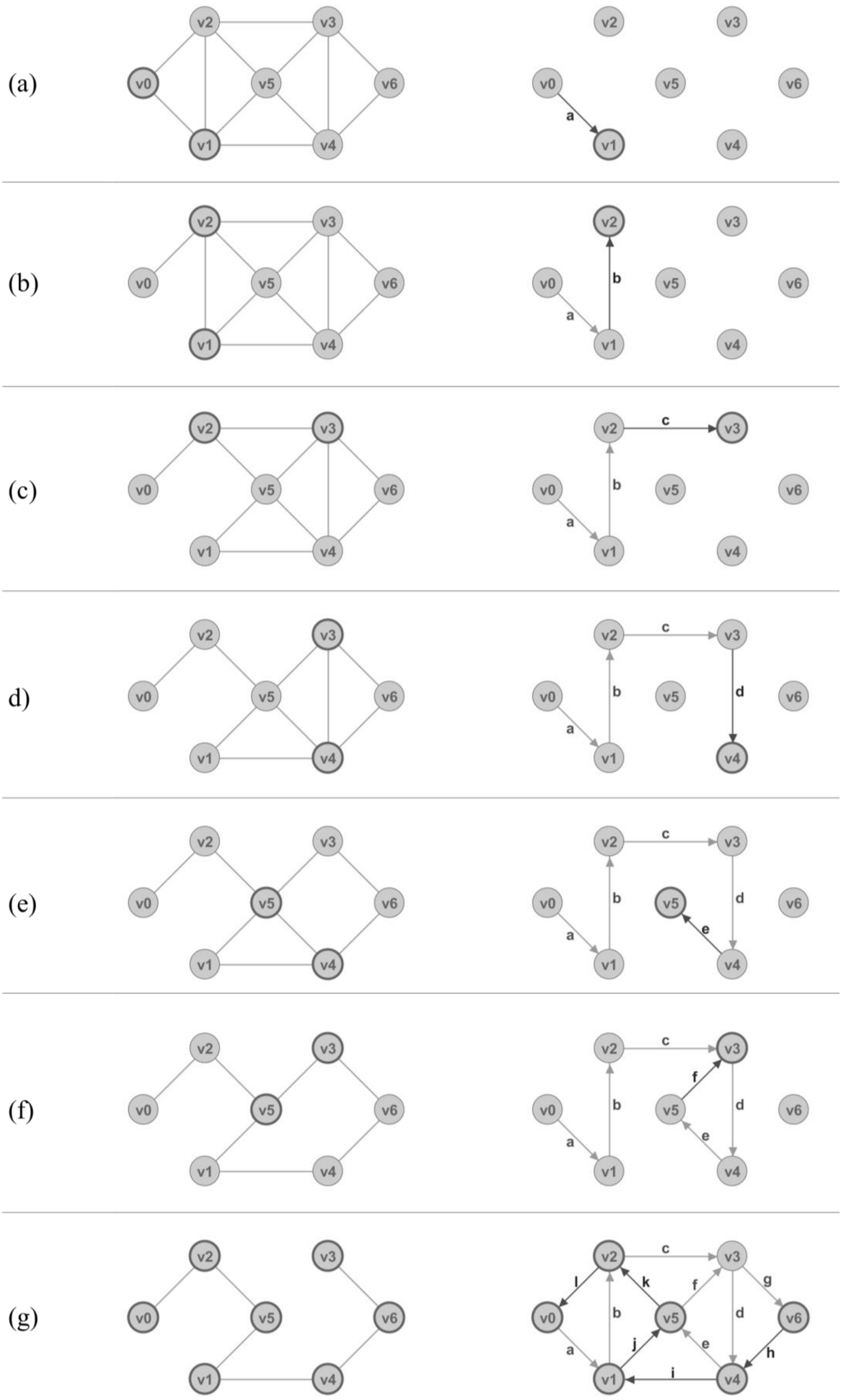
Observa-se que o desenvolvimento utilizando o software é fundamental para a clareza e a compreensão do algoritmo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Além de **e**studar a teoria dos grafos e seus principais resultados e aplicações clássicas, o objetivo deste trabalho foi propor uma sequência didática para facilitar o processo de ensino, utilizando um software para explorar os conceitos matemáticos. Durante a aplicação das atividades propostas aos alunos devem ser levantadas discussões de forma a superar dificuldades de aprendizagem e abstrações inerentes à teoria dos grafos. Após a aplicação da sequência de atividades espera-se que os discentes se apropriem de conteúdos da teoria dos grafos e reflitam criticamente sobre os modelos e as aplicações discutidas. Além disso, são verificados as potencialidades e os desdobramentos que o software GraphTea propicia para o ensino e aprendizagem da teoria dos grafos. Como benefícios da proposta, podemos enumerar motivação dos alunos e do próprio professor, facilitação da aprendizagem, desenvolvimento do raciocínio, lógico e dedutivo em geral e compreensão do papel sócio-cultural da matemática, tornando-a assim, mais significativa.

A principal perspectiva para trabalhos futuros é o desenvolvimento de outros problemas clássicos de grafos com o auxílio do GraphTea tais como: o problema do carteiro chinês, o problema do caixeiro-viajante, problemas de coloração de mapas, problemas de caminho mínimo. Além disso, como recomendações para trabalhos futuros propõe-se a busca e a exploração de outros recursos tecnológicos para auxiliar a prática docente durante o ensino da teoria de grafos.

Figura 6 – Representação do algoritmo de Fleury



Fonte: própria, feito com o software GraphTea

REFERÊNCIAS

CLARK, J.; HOLTON, D.A. **A first look at graph theory**. 2ª edição, Singapore. World Scientific, 1998.

EMANI, B.B.R.; MADDIPATI, S.S.; RAO, R.K. Graph Tea: Simulating Tool for Graph Theory & Algorithms. **International Journal for Modern Trends in Science and Technology**, v. 2, n 6, 2016.

EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, p. 128-140, 1741.

GRAPHTEA. Software aberto. Disponível em: www.graphtheorysoftware.com. Acesso em: 18 de abril de 2019.

NICOLETTI, M.C.; HRUSCHKA, E. R. **Teoria dos Grafos para Computação.** 3ª edição, Rio de Janeiro, LTC, 2018.

ROSTAMI, M.A.; BÜCKER, H.M.; AZADI, A. Illustrating a Graph Coloring Algorithm Based on the Principle of Inclusion and Exclusion Using GraphTea. In: **European Conference on Technology Enhanced Learning. Springer**, Cham. P.514-517, 2014

SCHRIJVER, Alexander. On the history of the shortest path problem. **Documenta Mathematica**, v. 17, p. 155, 2012.

WEST, D. B., **Introduction to Graph Theory**. 2ª edição, Upper Saddle River, NJ. Prentice Hall, 2002.

INSTRUCTIONS FOR PREPARATION AND SUBMISSION OF WORKS TO THE SCIENTIFIC COMMITTEE OF XLVI BRAZILIAN CONGRESS OF ENGINEERING EDUCATION

Abstract: *The graph theory is originated in the early eighteenth century when the renowned mathematician Leonhard Euler was dedicated to solving the problem of finding a route through the seven bridges of the city of Köningsberg, passing only once on each bridge and returning to the starting point. In this context arises the concept of graphs, which is a mathematical abstraction to represent this type of problem. Nowadays, graph theory has been gaining space and becoming an area of modern mathematics and of considerable scientific production. This theory is already a part of the academic and professional training of students of engineering, being an optative discipline in the curriculum in some universities. This paper aims to present a didactic sequence in order to introduce the concept of graphs, present some classical problems, some applications and Euler 's theorem. It is proposed as a methodological resource the use of a software for exploring graphs, thus making the learning process more participative. It is expected that after the application of the activities proposed to the students, ample discussions will be raised in order to overcome learning difficulties and abstractions inherent to the graph theory. In addition, the potentialities that software provides for the teaching and learning process of graph theory are verified. As benefits of the proposal, we can enumerate* *student and teacher motivation, facilitation of the learning and the development of the logical thinking, making mathematics more meaningful.*

Key-words: *Graphs. Graph Theory. Software. Mathematical Modeling.*