

## DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO REDUZIDO DE VIGA PARA O ENSINO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS E ANÁLISE DE ESTRUTURAS

**André Campos de Moura** – [andre.moura@uel.br](mailto:andre.moura@uel.br)

**Gilberto Carbonari** – [carbonar@uel.br](mailto:carbonar@uel.br)

Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Estruturas, CTU

Rodovia Celso Garcia Cid, PR 445 Km 380, Campus Universitário, Cx. Postal 10.011

CEP 86.057-970 – Londrina – PR

**Bruna M. Benedetti** – [bruna.benedetti@msn.com](mailto:bruna.benedetti@msn.com)

**Débora Jacob Krombauer** – [deborakronbauer@gmail.com](mailto:deborakronbauer@gmail.com)

Universidade Estadual de Londrina, Curso de Engenharia Civil, CTU

Rodovia Celso Garcia Cid, PR 445 Km 380, Campus Universitário, Cx. Postal 10.011

CEP 86.057-970 – Londrina – PR

**Resumo:** No ensino de Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas, uma dificuldade comumente reportada por educadores é a dificuldade dos alunos do entendimento e aplicação de conceitos básicos, devido sobretudo ao elevado grau de abstração requerido, o que dificulta a compreensão do objetivo e da finalidade do conhecimento ensinado. Para melhorar isso, é importante a tentativa de ensinar de formas prática muitos conceitos que são, muitas vezes, abstratos para os alunos tal como as reações de apoio, esforços internos, deformações, propriedades geométricas de seções transversais, entre outras. Foi desenvolvido um modelo de viga reduzida com base feita em acrílico e a barra representada por uma régua metálica. Essa viga possui diversas opções de vinculações (engastes, apoios rotulados), além de inúmeras opções para colocação de cargas, podendo também ser isostática ou hiperestática. Como resultado foi obtida uma boa compatibilidade entre os resultados obtidos no modelo em comparação com esforços teóricos o que demonstra uma grande eficiência para ilustrar conceitos no ensino da Engenharia.

**Palavras-chave:** Modelo reduzido. Qualitativo e quantitativo. Viga. Ensino da engenharia.

### 1 INTRODUÇÃO

No ensino de Engenharia, ao longo das últimas décadas o perfil dos alunos tem mudado, fazendo com que as instituições de ensino e os professores tentem se adaptar. Segundo Zucco (2010), o perfil desta geração de estudantes é de pessoas autoconfiantes e otimistas quanto ao futuro; são agitados, inquietos, ansiosos e impacientes; desenvolvem múltiplas tarefas ao

Promoção:



Realização:



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ

Organização local do evento:



mesmo tempo; recebem muitas informações dificultando a correlação de conteúdos, desenvolvendo uma visão desordenada e fragmentada das mesmas e buscam o equilíbrio entre suas obrigações profissionais e seus desejos pessoais.

No ensino de Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas, uma dificuldade comumente reportada por educadores é a dificuldade dos alunos do entendimento e aplicação de conceitos básicos, devido sobretudo ao elevado grau de abstração requerido, o que dificulta a compreensão do objetivo e da finalidade do conhecimento ensinado.

Embora metodologias ativas estejam sendo cada vez mais aplicadas na engenharia, como o aprendizado baseado em Problemas ou Projetos (Problem/Project Based Learning - PBL) (Ribeiro 2008; Frezatti *et al.*, 2018), os problemas e projetos utilizados se aplicam bem a módulos de ensino de projeto de estruturas (de Concreto armado, Aço, Madeira, Alvenaria Estrutural e etc.) onde o objetivo e o produto final são mais familiares aos estudantes, uma vez que eles moram, trabalham e estudam em edificações desses tipos.

Ilustrar de forma prática conceitos de disciplinas mais básicas da Engenharia como a Resistência dos Materiais e a Análise de Estruturas, onde as reações de apoio, esforços internos, deformações, propriedades geométricas de seções transversais, entre outras aparecem como algo abstrato, sem uma ligação imediata com a realidade é uma tarefa complicada.

Uma ferramenta de ensino que vem sendo utilizada para auxiliar no aprendizado dos saberes dessas disciplinas, tanto em modelos de aprendizagem ativa como passiva, são modelos reduzidos didáticos quantitativos, especialmente projetados para que o aluno possa relacionar a teoria abstrata com algo prático. Isto permite que os alunos não apenas memorizem conteúdos e processos de cálculo, mas sim possam entender e compreender o conteúdo (ANASTASIOU & ALVES, 2012).

Dentro do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Londrina (UEL), desde 2013 vêm sendo desenvolvidos modelos reduzidos didáticos quantitativos para o ensino de Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas. Dentro os modelos já desenvolvidos que estão sendo aplicados no ensino do Curso vale destacar um modelo de Treliça plana (Campos *et al.*, 2016), de Flambagem (Carbonari *et al.*, 2018), dentre outros.

Ainda dentro desta linha, este trabalho tem por objetivo apresentar a concepção e aplicação de um modelo didático quantitativo de viga que permite diferentes vinculações (engastes, e apoios rotulados) em estruturas isostáticas e hiperestáticas, com aferição de deslocamentos (translações e rotações) e das reações nos apoios rotulados. O modelo permite a utilização de barras de diferentes tamanhos, com rigidez variável e rótulas internas.

## 2 CONCEPÇÃO DO MODELO

O propósito da construção do modelo foi desenvolver um sistema que permitisse a simulação em sala de aula de diversos tipos de vigas isostáticas (Engastada livre, bi-apoiada e gerber) e hiperestáticas (com até 4 apoios, engastada-apoiada, bi-engastada, entre outras), com a aplicação de carregamentos variados como cargas concentradas, distribuídas (linear e triangular) e momentos concentrados. O modelo deveria permitir a medida da reação de apoio nos apoios de primeiro e segundo gênero e a medição de deslocamentos de translação e rotação.

O modelo concebido é composto por materiais de grande durabilidade, com uma estrutura

Promoção:



Realização:



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ

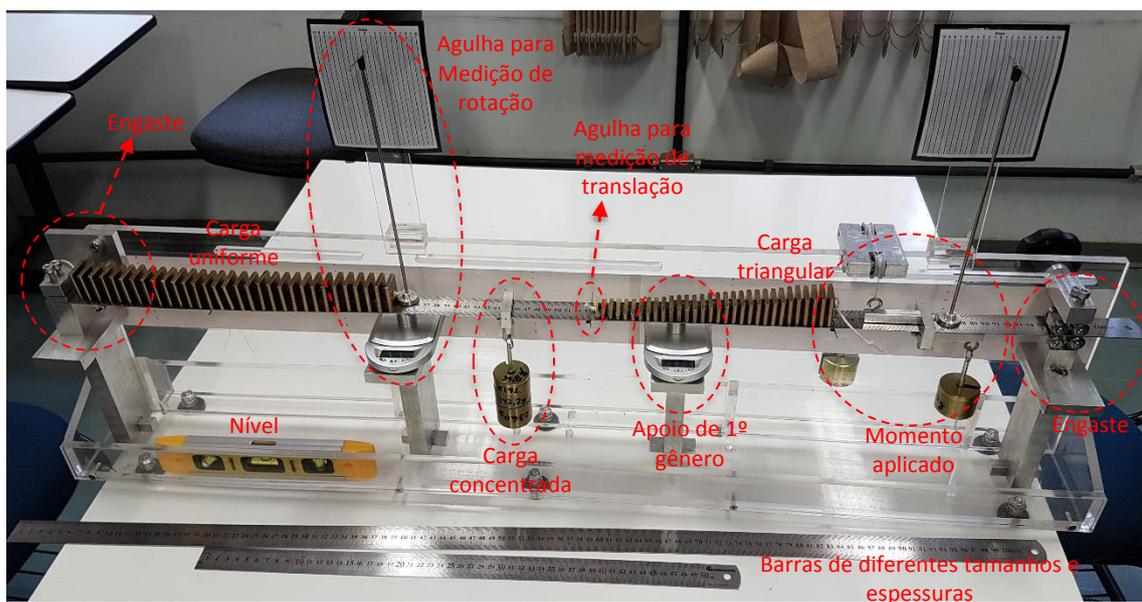
Organização local do evento:



em acrílico, e elementos de alumínio, aço inoxidável ou aço com tratamento anticorrosivo. Na Figura 1 é possível observar uma montagem de viga no modelo onde é possível observar as diferentes cargas, vínculos e meios para medição de deslocamentos do modelo.

A viga é representada por uma régua de aço inoxidável, passível de troca, podendo ser utilizada com tamanhos que vão de 30 a 100 cm, como barras contínuas ou com a presença de rótulas que são executadas com dobradiças. O modelo foi projetado na Universidade Estadual de Londrina e executado por uma empresa especializada.

Figura 1- Modelo de viga reduzida.



Fonte: Próprios autores.

## 2.1. Vínculos

Os apoios foram executados de forma a representar de forma próxima a ideal uma vinculação de primeiro e terceiro gênero. No de primeiro gênero (apoio rotulado) é possível ainda medir a reação existente por meio de mini-balanças, ele é constituído por uma espécie de prisma apoiado sobre a balança. Já o de terceiro gênero é composto por duas placas que são apertadas entre si por meio de parafusos, garantindo assim uma ligação suficientemente rígida para representa um engaste próximo do ideal. Para os engastes foram montadas duas configurações, a apresentada no lado esquerdo da viga da Figura 1 em que existe o bloqueio do deslocamento horizontal, e a apresentada no lado direito da viga da Figura 1 em que não há restrição ao deslocamento horizontal. Essa opção se deve a que, como se opta por utilizar barras de baixa rigidez com o intuito de se obter deslocamentos de fácil visualização, a restrição ao deslocamento horizontal em ambos engastes de uma viga bi-engastada não

representava adequadamente o comportamento idealizado na teoria da resistência dos materiais e da análise de estruturas.

## 2.2. Barras

O modelo é composto por réguas de aço com comprimentos de 30 cm, 50 cm, 60 cm e de 100 cm (ou associações dessas barras), sendo possível a utilização de vãos de até 100 cm com diversas vinculações (ver exemplos na parte inferior da Figura 1). As barras possuem uma rigidez à flexão (EI) com valor que deve ser determinado experimentalmente utilizando o próprio modelo mediante a análise inversa, ou seja para um dado carregamento e configuração da viga, determina-se qual o é o EI necessário para que os deslocamentos calculados sejam iguais aos medidos no modelo (por exemplo para as réguas testadas de 50 cm e 100 cm o EI obtido foi de 500 kgf.cm<sup>2</sup>).

## 2.3. Sistema de Cargas

As cargas concentradas são feitas de um corpo cilíndrico de metal que podem ser agrupados para o acréscimo de carga, sendo aplicadas nas barras como apresentado na Figura 1. As presilhas de suporte para as cargas podem ser posicionadas em qualquer ponto da barra. O modelo também conta com cargas distribuídas uniformes e as distribuídas triangulares tal como apresentado na Figura 1, podendo estas serem distribuídas ao longo de diferentes comprimentos, que podem ser ajustados adicionando ou removendo placas metálicas a carga. O valor destas cargas também pode ser controlado utilizando espaçadores de diferentes espessuras entre as placas metálicas que formam as cargas distribuídas. A aplicação de momento concentrado é feita por meio de um dispositivo que permite a aplicação de um binário de forças espaçadas 10 cm uma da outra. Isso possível aplicando uma carga vertical para baixo na parte inferior do dispositivo e uma vertical para cima de igual valor por meio de um cabo e polias que lançam esta carga na parte traseira do modelo. Isso pode ser observado no terceiro vão da viga da Figura 1.

## 2.5. Rotação

A medição da rotação da barra, ou seja, do ângulo em relação à horizontal que a barra forma ao ser submetida a um carregamento ou momento aplicado, é realizado utilizando uma haste de metal com uma agulha na ponta e um ímã para fixação desta na barra, além da escala de leitura dos ângulos fixada na parte superior do modelo, como se mostra na Figura 1.

Promoção:



Realização:



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ

Organização local do evento:



## 2.6. Deslocamentos

A medição do deslocamento relativo sofrido pela barra ao receber um carregamento é realizada com o auxílio de agulhas fixadas à esta por meio de imãs e uma escala milimétrica fixada no acrílico na parte posterior do modelo, como mostra a Figura 1. A medição da rotação é realizada utilizando uma haste de metal de 25 cm com uma agulha na ponta e um imã para fixação desta na barra, além da escala de leitura dos ângulos fixada na parte superior do modelo, como apresentado na Figura 1.

## 2.7. Validação do modelo

No quadro 1 os resultados obtidos podem ser observados em uma comparação com os resultados teóricos diante de diferentes cargas e montagens da viga.

Quadro 1 – Comparação dos resultados experimentais com os analíticos para diferentes casos

Caso	L (cm)	Experimental		Analítico	
1	22,5	$\delta$ (cm) $x=1/2L$	$\theta$ (rad) $x=L$	$\delta$ (cm) $x=1/2L$	$\theta$ (rad) $x=L$
		2,3	0,1222	2,008	0,1225
2	85,0	$\delta$ (cm) $x=1/2L$	$\theta$ (rad) $x=1/4L$	$\delta$ (cm) $x=1/2L$	$\theta$ (rad) $x=1/4L$
		2,95	0,09599	2,39	0,01194
		$\delta$ (cm) $x=1/2L$	$\theta$ (rad) $x=1/4L$	$\delta$ (cm) $x=1/2L$	$\theta$ (rad) $x=1/4L$
3	48,0	1,3	0,08116	1,3	0,08133
4	3,0	0,65	0,06283	0,6338	0,06574
5	48,0	$\delta$ (cm) $x=1/4L$	$\theta$ (rad) $x=L$	$\delta$ (cm) $x=1/4L$	$\theta$ (rad) $x=L$
		0,5	0,052	0,5	0,052

**onde:** Caso 1 - Viga engastada- livre: carga triangular ( $q_{\max}=0,043$  kgf/cm)  
 Caso 2 - Viga bi-engastada: carga concentrada ( $F=0,318$  kgf) em  $1/2L$ .  
 Caso 3 – Viga bi-apoiada: carga concentrada ( $F=0,282$  kgf) em  $1/2L$ .  
 Caso 4 - Viga bi-apoiada: carga distribuída uniforme ( $q=0,0265$  kgf/cm)  
 Caso 5 - Viga Engastada-apoiada: momento aplicado de 8,65 kgf.cm

Fonte: Próprios autores.

A média das diferenças percentuais entre os valores experimentais e analíticos para os deslocamentos é de 0,24% e para as rotações é de 2,50%. Tais diferenças entre os deslocamentos e rotações experimentais e analíticos podem ser decorrentes de vários fatores, como a dificuldade de se medir visualmente variações nos deslocamentos menores de 0,5 mm, do critério de medição do operador, que pode variar de pessoa para pessoa, e do fato de que as vinculações e a barra que forma a viga, embora funcionem de forma muito próxima da ideal, não são perfeitas.

### 3 APLICAÇÃO NO ENSINO

A aplicação do modelo pode ser feita no ensino de diferentes saberes das disciplinas de Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas, onde podem ser listadas as seguintes atividades (ANASTASIOU & ALVES, 2012):

- Identificação do problema a ser resolvido;
- Obtenção e organização dos conceitos e ferramentas necessárias;
- Planejamento, Imaginação, Elaboração de Hipóteses;
- Teste e validação das hipóteses com a prática com o modelo;
- Interpretação.

A identificação do problema consiste na determinação do que se necessita calcular, como reações de apoio, deslocamentos de translação e rotação, esforços internos, etc. A organização dos conceitos e ferramentas consiste na pesquisa por parte dos alunos com o assessoramento do professor das teorias e ferramentas existentes para a solução do problema. Por exemplo para o cálculo das reações de apoio é possível utilizar as equações da estática ou o princípio das forças virtuais. Para o cálculo de deslocamentos existem alternativas como a equação diferencial da linha elástica, teoremas de energia como o teorema de Castigliano, o Princípio das Forças Virtuais ou mesmo o Método dos deslocamentos. O planejamento, imaginação, elaboração de Hipóteses consiste na organização do cálculo, com a aplicação do Princípio da Superposição dos Efeitos, montagem de sistemas de equações, e simplificações possíveis para simplificar o cálculo. O teste e validação consiste na montagem da viga analisada no modelo, e aferição de reações, deslocamentos de translação e rotação, bem como avaliação da configuração deformada e comportamento durante o carregamento e a descarga, comparando os dados medidos com os determinados analítica ou numericamente. A interpretação consiste na avaliação dos resultados, verificação das possíveis razões para as diferenças encontradas entre a teoria e a prática, discussão e levantamento de novas hipóteses e procedimentos de cálculo. No quadro 2 são apresentados diferentes conceitos da Análise de Estrutura e Resistência dos Materiais que podem ser ilustrados com o auxílio do modelo, e explicados nos itens a seguir:

A estrutura retorna a sua geometria original entre ciclos de carga e descarga? Os deslocamentos medidos são proporcionais aos incrementos de carga? - Com a utilização do modelo é possível fazer com que os alunos coloquem a prova o comportamento esperado da simplificação de linearidade física do material e geométrica da estrutura. Isso pode ser feito aplicando incrementos de carga em um ponto da viga e medindo os deslocamentos de translação e rotação e um ou mais pontos, montando um gráfico força versus deslocamento, onde o esperado é uma relação linear o que demonstra que é possível assumir como válida a linearidade geométrica. A descarga da viga também permitirá observar se a estrutura retorna a seus deslocamentos iniciais, indicando que não houve dano ou plastificação do material, ou seja o material estará trabalhando dentro do regime elástico linear (Lei de Hooke), ou, caso a estrutura

Promoção:



Realização:



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ

Organização local do evento:



não retorne aos deslocamentos iniciais, medir os deslocamentos remanescentes devido a plastificação do material da barra. Todas essas verificações podem ser acompanhadas da determinação dos esforços e das tensões máximas atuantes utilizando as teorias da Análise de Estruturas e da Resistência dos Materiais.

Quadro 2 – Questões para avaliação de diferentes conceitos.

Conceito		Questão Prática
Campo de validade:	Linearidade física (Lei de Hooke):	A estrutura retorna a sua geometria original entre ciclos de carga e descarga?
	Linearidade geométrica (Pequenos deslocamentos):	Os deslocamentos medidos são proporcionais aos incrementos de carga?
Vinculações:		Os deslocamentos livres e as reações são condizentes com o vínculo idealizado?
Equilíbrio Estático:		As reações de apoio medidas equilibram o carregamento aplicado (Resultante de forças e momentos igual a zero)?
Cálculo de deslocamento:	Equação diferencial da linha elástica	A forma da deformada é condizente com a prevista para o carregamento? Os deslocamentos são próximos aos previstos com a teoria?
	Teoremas de energia, Princípio dos trabalhos Virtuais e Método dos deslocamentos.	Os deslocamentos são próximos aos previstos com a teoria?
Limitações da teoria:		Quais as limitações oriundas das simplificações do modelo teórico estão contribuindo para as diferenças entre o medido no experimento e o previsto pela teoria?
Limitações dos modelos:		Quais características do modelo podem não estar representando exatamente as idealizações (vínculos, barra, etc.) do modelo teórico?

Os deslocamentos livres e as reações são condizentes com o vínculo idealizado? - Na análise de estrutura são utilizadas representações de vínculos idealizados de primeiro, segundo e terceiro gênero. Essas representações muitas vezes não se assemelham a realidade, onde o Engenheiro deve assumir a vinculação idealizada mais adequada para cada caso. Com o modelo é possível mostrar como podem ser construídos vínculos que se aproximam dos idealizados de primeiro e segundo gênero (apoio rotulado fixo e móvel) e de terceiro gênero (engaste), assim como observar os deslocamentos restringidos e livres nos nós desses apoios. Isso propicia um melhor entendimento da vinculação para a classificação da estrutura pelo chamado grau de hiperstaticidade (utilizado no Método das Forças para análise de estruturas hiperestáticas) ou pelo grau de liberdade (Utilizado no Método dos Deslocamentos).

As reações de apoio medidas equilibram o carregamento aplicado (Resultante de forças e momentos igual a zero)? - Na análise de estruturas é apresentado o conceito de que a resultante

das forças e momentos aplicados a uma estrutura deve ser zero, para que a mesma esteja em equilíbrio estático. Isso pode ser demonstrado com o auxílio das balanças colocadas sob os apoios de primeiro e segundo gênero da viga, onde as reações medidas são colocadas a prova com as equações de equilíbrio estático. Isso pode ser feito tanto em estruturas isostáticas como hiperestáticas como pode ser visualizado na figura 2.

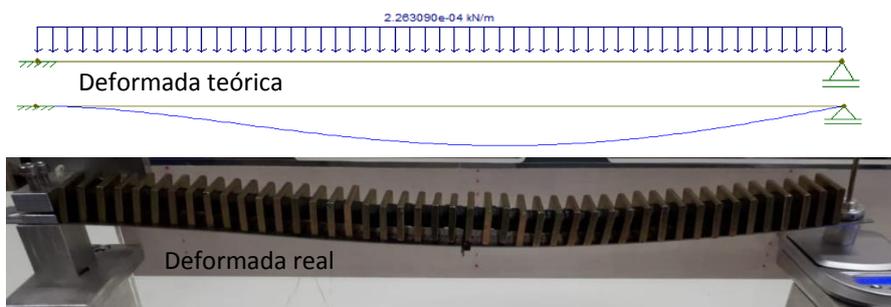
Figura 2 - Esquema de medição de reação em estruturas isostáticas e hiperestáticas



(a) Estrutura isostática (b) Estrutura hiperestática (c) Visualização da carga  
Fonte: Próprios autores.

A forma da deformada e os deslocamentos observados são próximos aos teóricos? - Na Resistência dos Materiais, é apresentada a equação diferencial da linha elástica, que permite a obtenção da função de deslocamento (translações e rotações) da viga para qualquer carregamento. Isso pode ser colocado a prova com o modelo de viga medindo os deslocamentos em intervalos regulares e comparando com os previstos pela teoria, como mostra a figura 3.

Figura 3 - Carregamento e deformada teórico e real da barra



Fonte: Ftool, Próprios autores.

Simplificações do modelo teórico afetam a precisão dos valores medidos? - Na dedução das teorias utilizadas na análise de estruturas e resistência dos materiais, são realizadas algumas simplificações que vão desde as condições do campo de validade, desprezar termos muito pequenos das equações (como as deformações devido a força cortante, o termo da derivada de segunda ordem da equação da linha elástica, etc). Simulações com o modelo permitem levantar a discussão e propiciar a avaliação de até que ponto essas simplificações podem ser utilizadas em estruturas.

Características do modelo (vínculos, barra, etc.) versus idealizações do modelo teórico? -

A análise de estruturas se utiliza da idealização de vínculos e barras para facilitar a dedução e aplicação dos modelos de análise. Mesmo o modelo tendo sido projetado para se aproximar o máximo possível dessas condições ideais, sempre existe uma diferença entre a idealização e a realidade. Isso pode ser avaliado e discutido com os estudantes, executando simulações onde, por exemplo se altere a pressão do parafuso que fixa o engaste, fazendo o comportamento da viga variar entre algo próximo a um engaste ideal para um engastamento parcial no nó.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi desenvolvido e executado um modelo didático e reduzido, qualitativo e quantitativo, de uma viga que possui diversas vinculações e carregamentos, podendo ser isostática ou hiperestática, que permite a medida de deslocamentos verticais ao longo de toda a barra, além de aferição da reação quando os apoios são rotulados por meio de uma mini-balança digital.

O modelo desenvolvido apresenta uma grande aptidão como facilitador no processo de aprendizagem de conceitos e métodos de cálculo utilizados na área estrutural da engenharia civil.

O modelo apresentou pouca variação com relação a teoria, possuindo uma média das diferenças percentuais para os deslocamentos de 0,24% e para as rotações de 2,50%, atestando que é possível a comparação entre estruturas reais em escala reduzida e a teoria estudada na disciplina de Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas. Concluímos que esse projeto poderá auxiliar na aplicação da teoria e didática em sala de aula, assim como outros modelos de diversas estruturas.

#### Agradecimentos

A Prograd/UFLA pela formalização do projeto de pesquisa em ensino. Aos discentes co-autores deste trabalho, pela grande ajuda na elaboração e construção do modelo.

#### REFERÊNCIAS

CAMPOS M., André *et al.* Desenvolvimento de um Modelo reduzido didático qualitativo e quantitativo de Treliça Plana. COBENGE 2016 XLIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2016, Natal. **Anais**, 2016.

CARBONARI, G. *et al.* Desenvolvimento de um Modelo reduzido didático qualitativo e quantitativo de Viga Hiperestática. COBENGE 2016 XLIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, Natal. **Anais**, 2016.

CARDOSO, Igor de Moraes, LIMA, Renato da Silva. Métodos ativos de aprendizagem: o uso do aprendizado baseado em problemas no ensino de logística e transportes. **Transportes**, v20, n.3, 2012.

Promoção:



Realização:



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ

Organização local do evento:



FÁBIO, Frezatti *et al.*, **Aprendizagem baseada em problemas (PBL): uma solução para aprendizagem na área de negócios..** 1ª ed. São Paulo. Ed. Atlas. 2018

RIBEIRO, LRC. **Aprendizagem baseada em problemas (PBL): Uma experiencia no ensino superior.** São Carlos: Ed UFSCar. 2008.

ZUCCO, A. **Estilos de mobilização profissional de docentes de cursos de graduação em administração.** São Caetano do Sul: USCS, 2010.

## **DEVELOPMENT OF A REDUCED BEAM MODEL FOR TEACHING OF MECHANICS OF MATERIALS AND STRUCTURAL ANALYSIS**

**Abstract:** *In teaching Mechanics of Materials and Structural Analysis, one difficulty commonly reported by educators is the students' difficulty in understanding and applying basic concepts, mainly due to the high degree of abstraction required, which makes it difficult to understand the objective and purpose of the knowledge taught. To improve this, it is important to teach in practical ways many concepts that are often abstract for students such as support reactions, internal stresses, deformations, geometric properties of cross sections, among others. A reduced beam model was developed with acrylic base and the bar represented by a metallic ruler. This beam has several options of restrains (fixed support, hinged support), in addition to numerous options for placing loads, it can also be isostatic or hyperstatic. As a result, a good compatibility between the results obtained in the model and the theoretical efforts was obtained, which demonstrates a great efficiency to illustrate concepts in Engineering teaching.*

**Keywords:** *Reduced model. Qualitative and quantitative. Beam. Engineering teaching.*

Promoção:



Realização:



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ

Organização local do evento:

