

FLAMBAGEM DE VIGAS VERTICAIS: CONSTRUÇÃO DE UMA PRENSA ARTESANAL PARA COMPARAÇÃO ENTRE DADOS ANALÍTICOS E EXPERIMENTAIS.

Diony Monteiro da Silva – dionymadrista@gmail.com
Gabriel Felipe Pizzinato – gabifelipizzi.g.f.p@hotmail.com
João Leonardo dos Santos – leo.sants996@gmail.com
Samuel Bomfin Araldi – samuelb.araldi@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
R. Cristo Rei, 19 – Vila Becker
85902-490 – Toledo – PR

Jocelaine Cargnelutti – jocelainecargnelutti@gmail.com
Rodnny Jesus Mendoza Fakhye – rodnny@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
R. Cristo Rei, 19 – Vila Becker
85902-490 – Toledo – PR

Resumo: A utilização de recursos didáticos em disciplinas do ciclo básico dos cursos de Engenharia tem se mostrado uma metodologia de ensino eficiente para estreitar as fronteiras entre os teoremas, propriedades e definições, e suas relações com problemas reais. Além da dificuldade de relacionar a teoria com a prática, os alunos apresentam altos índices de reprovação e desestímulo em disciplinas como cálculo e equações diferenciais. Com o intuito de amenizar estes problemas, despertar o aluno para as novas tecnologias e metodologias de ensino, e incentivar a pesquisa, busca-se estreitamento entre o conceito teórico e sua aplicação, permitindo aos alunos, além do entendimento do conteúdo, a visualização prática na sua área de graduação. O presente trabalho compara os resultados analíticos e experimentais, obtidos a partir da resolução da equação diferencial ordinária que modela a flambagem de vigas verticais finas feitas de aço, utilizadas na construção civil. Os resultados experimentais são obtidos por meio da realização de um experimento utilizando uma prensa artesanal confeccionada por alunos do curso de Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Flambagem de Vigas Finas. Prensa Artesanal. Recursos Didáticos em Engenharia.

1 INTRODUÇÃO

Alguns dos principais obstáculos na formação de engenheiros são a falta de motivação e os altos índices de reprovação dos alunos durante o chamado ciclo básico, e com isso a existência de mecanismos motivacionais se faz necessário por parte dos professores e da universidade. Inserir aplicações práticas e/ou cotidianas do futuro engenheiro relacionadas à disciplina estudada é uma das maneiras mais eficazes de instigar a curiosidade e a promover a motivação do aluno em estudar o conteúdo programático dessas disciplinas que servem de alicerce na formação de um engenheiro (MORAES & LIRA, 2000). Esforços no sentido de modernizar o currículo de ensino de Engenharia, incluindo novas metodologias de ensino e recursos

didáticos, buscam garantir que os egressos tenham capacidade crítica de alto nível e que sua formação seja pertinente com a realidade da indústria (SIQUEIRA & FONTE, 2018).

Uma das disciplinas mais desafiadoras aos alunos que se encontram no início do curso de Engenharia Civil é a de equações diferenciais, importante na modelagem de diversos fenômenos estudados pelos engenheiros. Segundo FIGUEIREDO (2016), a exigência de um bom domínio sobre o cálculo diferencial e integral é um dos requisitos para um aproveitamento satisfatório na disciplina de equações diferenciais. Estes estudos iniciais acabam resultando em aulas extensivamente teóricas. Com isso, a formação básica pouco aplicada, ou seja, com poucas ou nenhuma aplicação é, de certa forma, responsável pela desmotivação dos alunos nessas disciplinas (SOUZA; RODRIGUES; TRIBESS, 2000).

Para ZILL & CULLEN (2001) as equações diferenciais dão suporte matemático para diversas áreas da ciência e engenharia, elas surgem da tentativa de descrever alguns sistemas físicos em termos matemáticos. Problemas simples como um corpo rígido caindo em queda livre, osciladores harmônicos como sistemas massa-mola e pêndulos simples e até mesmo circuitos elétricos complicados são descritos em termos matemáticos por meio da aplicação de equações diferenciais.

Na área de engenharia civil é possível, por meio das equações diferenciais, modelar drenagem de fluidos por meio de um orifício, flexão de vigas horizontais e na descrição matemática do fenômeno da flambagem, que é a deflexão lateral de uma viga vertical sofrida devido a uma tensão de compressão axial (ZILL & CULLEN, 2001).

O objetivo principal deste trabalho é a verificação da efetividade da equação diferencial na obtenção da carga crítica necessária para flambar vigas verticais finas feitas de aço para concreto armado. O objetivo secundário deste trabalho é verificar a eficiência de uma prensa artesanal, desenvolvida por alunos do curso de Engenharia Civil na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus de Toledo, na execução do ensaio de flambagem e no apelo visual e motivacional do problema por ela proporcionada aos estudantes. Foi utilizado um referencial teórico que se estende pelas disciplinas de equações diferenciais ordinárias e de resistência dos materiais.

2 DESENVOLVIMENTO

As prensas hidráulicas são fundamentais para o ensino e aplicação em Engenharia, elas são utilizadas em ensaios mecânicos normatizados afim de colher dados reais sobre características e propriedades de diversos materiais. Por meio desta ferramenta podemos realizar testes sobre o fenômeno da flambagem, fenômeno este que segundo Hibbeler (2010) consiste na aplicação de uma força no sentido axial da coluna que resultará numa oscilação lateral.

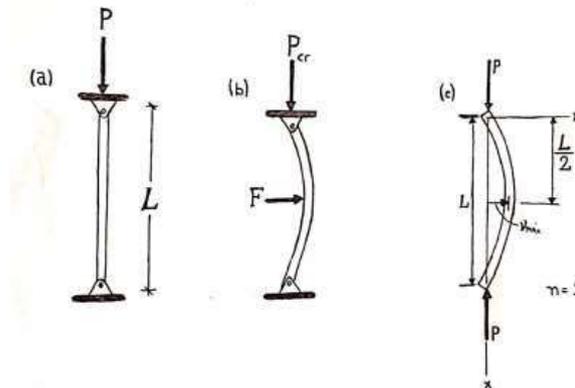
A partir da teoria sobre equações diferenciais ordinárias é possível estabelecer a modelagem para as diferentes formações de flambagem, determinando sua carga crítica P_{cr} (carga necessária para ocorrer a flambagem).

2.1 Modelagem matemática

A partir da Figura 1 que demonstra um exemplo de coluna ideal, ou seja, uma coluna perfeitamente reta, feita de material homogêneo e que a força seja aplicada no centro da seção

transversal, pode-se determinar a fórmula que relaciona o momento interno da coluna com sua forma defletida.

Figura 1 – Coluna engastada na base e livre no topo.



Fonte: Os autores (2019)

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M \quad (1)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, I é o menor momento de inércia para a área da seção transversal da coluna, v é a deflexão que ocorre na barra e M é o momento interno.

Para determinar a flambagem de uma coluna que possui diferentes tipos de apoios o momento interno é descrito como $M = P(\delta - v)$, em que δ é a deflexão máxima. Basta substituir o momento interno na Equação (1), obtendo:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = P(\delta - v) \quad (2)$$

Reorganizando a Equação (2), tem-se:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta \quad (3)$$

Busca-se soluções não triviais que resolvem a EDO da Equação (3). Trata-se de uma EDO não homogênea e, inicialmente, determina-se a solução complementar. A solução complementar referente a parte homogênea da EDO (3) é apresentada nas Equações (4):

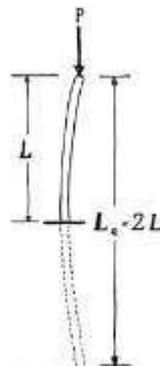
$$v = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \quad (4)$$

Com a solução complementar encontrada, busca-se a solução particular da Equação (3), que será obtida por meio de coeficientes indeterminados – abordagem por superposição. Assim, a solução geral de (3) é dada por:

$$v_g = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + \delta \quad (5)$$

Ao analisar o exemplo de coluna da Figura 2, pode-se determinar as constantes ao dizer que quando $x=0$, a flambagem (v) também é igual a zero e quando x equivale ao valor total da barra, atribuindo como L , a flambagem é máxima.

Figura 2 – Coluna engastada na base e livre no topo.



Fonte: Os autores (2019)

Para determinar as constantes, usa-se as condições de contorno estabelecidas para a coluna da Figura 1, assim quando $x = 0$, $v = 0$, $dv/dx = 0$, então tem-se que:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\delta \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

No topo da coluna da Figura 1 a deflexão vale δ (ou seja, $x = L$ e $v = \delta$), então:

$$\delta \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L\right) = 0 \quad (7)$$

Sabe-se que $\delta = 0$ é uma solução trivial da EDO, e significa que não ocorre flambagem na coluna, então devemos fazer o $\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L\right) = 0$.

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = \frac{n\pi}{2} \quad (8)$$

Na expressão (8), isola-se P e obtém-se a carga crítica, também chamada de carga de Euler, chamada assim devido a Leonhard Euler, que solucionou esse problema em 1757 (HIBBELER, 2010). A carga crítica ocorre quando $n = 1$ (pois é o primeiro valor crítico), e pode ser descrita pela seguinte expressão:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (9)$$

A variável L determina a distância entre os pontos de momento nulo, podendo variar dependendo dos tipos de apoio a qual a coluna está sujeita, essa distância é chamada de comprimento efetivo (L_e). Segundo Hibbeler para especificar o comprimento muitos códigos e manuais de projetos utilizam um coeficiente adimensional K denominado fator de comprimento efetivo. A Equação (10) denomina o comprimento efetivo é dada por:

$$L_e = LK \quad (10)$$

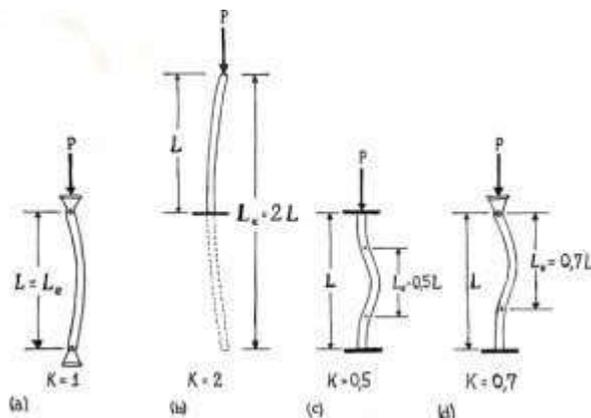
Substituindo a Equação (10) em (9), segue que:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (11)$$

Comprimento Efetivo

Os tipos de comprimentos efetivos estão demonstrados na figura a seguir:

Figura 3 – Modelos de comprimentos efetivos



Fonte: Os autores (2019)

A Figura 2 apresenta os diferentes apoios e seus comprimentos efetivos. Na Figura 2a observamos uma coluna com as duas extremidades presas por pinos em que o comprimento efetivo é igual ao comprimento total da barra, logo $K=1$. Na Figura 2b observamos uma coluna com uma extremidade livre e outra engastada em que o comprimento efetivo é igual ao dobro do tamanho da barra, dessa forma, $K=2$. Na coluna da Figura 2c engastada nas duas extremidades existem pontos de momento nulo a um quarto das extremidades, logo o comprimento efetivo é igual a metade do comprimento total, resultando em um $K=0,5$. Na coluna da Figura 2d engastada em uma extremidade e presa por pinos na outra, tem ponto de momento nulo à 0,7 do comprimento da barra distante da extremidade presa por pino, resultando em um comprimento efetivo igual a 70% do comprimento total, logo $K=0,7$.

Análises de erros

Segundo Departamento de Física da FCTUC (2003), para determinar o erro relativo da diferença entre a experiência prática e os cálculos é necessário utilizar a Equação (13), considerando V_r como valor real e V_c como valor calculado:

$$ER = \frac{|V_c - V_r|}{V_r} \times 100 \quad (13)$$

2.2 Desenvolvimento da prensa e do estudo de caso

Materiais

Os materiais utilizados foram tábuas de madeira com dimensões 27x27cm, ripas de madeira, cantoneiras de aço, parafusos, barras de aço CA 60 4.2 mm dos tamanhos de 60, 55 e 50cm e pesos de 8kg, 4kg, 2kg, 1kg, 0,5kg e 0,25kg.

A ferramentas que utilizamos foram uma balança analítica, furadeira e uma trena.

Desenvolvimento

Para inicializar o desenvolvimento da prensa foram feitos furos nas cantoneiras de aço e nas bases de madeira, com o auxílio da furadeira, em que foram inseridos os parafusos, deixando a estrutura fixa. Na estrutura da base realizou-se um furo no centro para que a barra de aço se mantenha fixa durante a deflexão. Para aumentar a estabilidade da parte superior foram parafusadas ripas de madeira nas laterais das cantoneiras. Dessa forma concluiu-se a estrutura do dispositivo.

Para aumentar a estabilidade dos pesos quando forem inseridos, foi elaborada uma caixa com abertura superior, feita a partir das tábuas de madeira com a altura de aproximadamente 12cm, contando a base da caixa. Ela será posteriormente apoiada sobre a barra para realizar o ensaio de compressão axial.

Figura 4 – Prensa em ensaio



Fonte: Os Autores (2019)

Figura 5 – Prensa em repouso



Fonte: Os Autores (2019)

2.3 Análise Experimental

Para a realização do experimento, foram utilizadas 6 barras com 3 tamanhos diferentes (60cm, 55cm e 50cm). Colocou-se as barras no centro do dispositivo e na parte superior das barras com o apoio das cantoneiras posicionou-se a caixa de madeira que serviu de apoio para as cargas.

Como mostrado nas imagens abaixo, a Figura 5 representa uma base com engaste, enquanto a Figura 6 onde está situada a caixa de madeira simula um apoio por pinos. Uma extremidade engastada e outra apoiada por pinos atribuiu-se um comprimento efetivo $K = 0,7$.

Figura 6 – Base engastada



Fonte: Os autores (2019)

Figura 7 – Simulação de apoio por pinos



Fonte: Os autores (2019)

Para calcular a carga crítica, ou seja, a carga necessária para que houvesse uma deflexão, foi utilizado a Equação (10), e o módulo de elasticidade $E = 200 \text{ GPa}$. Obteve-se os respectivos valores da massa que estão descritos no quadro a seguir:

Quadro 1 – Valores da carga crítica

Tamanho da barra (cm)	Carga crítica calculada (N)
60	169,713
55	203,067
50	246,231

Fonte: Os autores (2019)

Para a realização dos experimentos foram utilizados pesos. Suas massas foram calculadas utilizando a balança analítica. Sabendo do peso necessário para que houvesse a flambagem foram dispostos sobre a base superior os materiais que juntos conferiam valores próximos à carga crítica necessária.

Dessa forma a barra de aço sofreu flambagem, e as distâncias horizontais e verticais de sua deflexão foram medidas com o auxílio de uma trena e seus valores foram anotados. Esses valores foram comparados com os valores obtidos em cálculo a partir da Equação (8).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos a partir dos testes estão descritos no quadro abaixo:

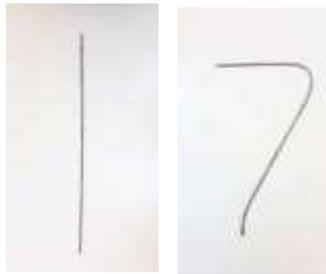
Quadro 2 – Dados experimentais

Tamanho da barra (cm)	Carga crítica teórica (N)	Carga crítica obtida (N)	Erro Relativo (%)
60	169,66	158,69	6,5
		141,47	16,6
55	203	178,2	12,2
		187,97	7,4
50	246,15	239	2,9
		241,88	1,7

Fonte: Os autores (2019)

Nota-se que os erros relativos das barras de menor comprimento foram menores que as maiores, devido à instabilidade gerada pelo aumento das mesmas.

Figura 8 – Barras 50cm



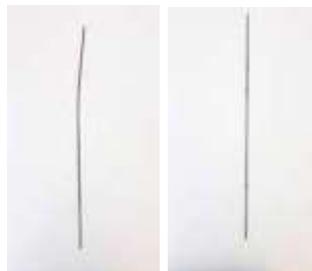
Fonte: Os autores (2019)

Figura 9 – Barras 55cm



Fonte: Os autores (2019)

Figura 10 – Barras 60cm



Fonte: Os autores (2019)

A Figura 7 apresenta as barras de 50cm, uma delas não retornou ao seu estado original pois ela ultrapassou a sua carga crítica, que era menor que a calculada pois ela já apresentava

deformação antes do experimento. A outra barra foi submetida a uma carga crítica próxima ideal e ao final do experimento ela retornou ao seu estado original.

A Figura 8 apresenta a situação das barras de 55cm, uma delas não retornou ao seu estado original assim como a barra da Figura 7 de 50cm, ultrapassando sua carga crítica. A outra barra alcançou sua carga crítica, mantendo uma leve deformação após cessado o ensaio.

A Figura 9 apresenta a situação das barras de 60cm, uma alcançou a carga crítica, gerando uma leve deformação ao cessar o experimento. Enquanto a outra não alcançou sua carga crítica, voltando ao estado original.

Com o experimento foi possível observar que os cálculos apresentaram erro relativo satisfatório, levando em consideração que as medidas podem conter erros tanto na trena que foi usada, como no momento da medição. Vale frisar, também, que existem alguns fatores que fazem com que a carga crítica da coluna diminua, fazendo com que ocorra a flambagem com uma carga menor. Além disso podem ocorrer erros nas medições, tanto nos pesos utilizados quanto no tamanho das barras, gerando pequenos erros que ao final podem alterar o resultado verdadeiro.

3 CONCLUSÃO

Conforme resultados obtidos, é possível mostrar a eficiência de uma prensa artesanal quando comparada com a solução analítica da equação diferencial que fornece a carga crítica necessária para flambar vigas verticais finas feitas de aço para concreto armado. Além disso, o caráter visual e comparativo do experimento, permitem estreitar as relações entre a teoria estudada nas disciplinas do curso de graduação e a prática. Quando recursos didáticos, como este, são utilizados em disciplinas teóricas, o viés motivacional se destaca e fornece uma nova perspectiva a respeito do curso. A realização deste experimento contribuiu para desenvolvimento técnico e científico dos alunos.

Agradecimentos

Agradecemos a Professora Dra. Jocelaine Cargnelutti por ter proporcionado a iniciativa de realizar esse trabalho por meio do estudo das Equações Diferenciais Ordinárias e o auxílio a ele dado, ao Professor Dr. Rodnny Mendoza Fakhye pelos conhecimentos adquiridos da disciplina de resistência dos materiais e suas assessorias, aos técnicos dos laboratórios Marcos e Wilson a todo suporte dado durante a fabricação, a montagem, e nos ensaios do experimento e a Universidade Tecnológica Federal do Paraná pelo apoio financeiro para a participação do evento.

REFERÊNCIAS

HIBBELER, Russel Charles. **Resistência dos materiais**. 7ª ed. São Paulo - SP: Pearson Prentice Hall, 2010. 659 p. v. 1.

Introdução ao cálculo de erros nas medidas de grandezas físicas. Coimbra, Departamento de Física da Universidade (2003/2004). Disponível em: http://www.fis.uc.pt/data/20032004/apontamentos/apnt_115_11.pdf. Acesso em: 12 dez.2018.

MORAES, Andréa B de; LIRA, Hiran F de. Base teórica x prática profissional: como motivar o aluno?. IN: XXVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2000, Ouro Preto. **Anais**. Brasília, 2000.

SOUZA, Henor Arthur de; RODRIGUES, Eliana Ferreira; TRIBESS, Arlindo. A motivação dos estudantes de engenharia diante da atual conjuntura sócio-econômica brasileira. IN: XXVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2000, Ouro Preto. **Anais**. Brasília, 2000.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001.

VERTICAL BEAM BUCKLING: BUILD OF A CRAFTED PRESS FOR COMPARATION BETWEEN ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL DATA.

Abstract: *The use of didactic resources in basic cycle disciplines of Engineering course showed an efficient education methodology to strengthen relations between theorems, properties and definitions, and its relation with real problems. Besides the difficulty to connect the theory with the practice, the students show high failure and discourage rates in disciplines like calculus and differential equations. In order to ease these problems, introducing the student to new teaching methodologies, and encourage researching, seeks out unite the theoretical concept and its application, to allow the students, the understanding of the content and the practical visualization of its graduate area. This work compares the analytical results with the experimental one, acquired from a differential equation resolution, which model elastic buckling of metallic columns. The experimental results derived through an experiment using a crafted press made by civil engineering students from the Federal University of Technology – Paraná.*

Key-words: *Differential Equations, Column Buckling, Crafted Press, Engineering Didactic Resources.*