

## MATEMÁTICA E ENGENHARIA CIVIL: UMA PARCERIA PARA A ANÁLISE DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO EM FUNÇÃO DA RELAÇÃO ÁGUA/CIMENTO

**Tiago E. de Oliveira**<sup>1</sup> – t.estrela@fei.edu.br

**Rui B. de Souza**<sup>2</sup> – rui.souza@fei.edu.br

**Monica Karrer**<sup>1</sup> – mkarrer@fei.edu.br

**Kurt A. P. Amann**<sup>2</sup> – kpereira@fei.edu.br

Centro Universitário FEI, Departamento de Matemática<sup>1</sup> e Curso de Engenharia Civil<sup>2</sup>

Avenida Humberto de Alencar Castelo Branco, 3972-B

09850-901 – São Bernardo do Campo – São Paulo

**Resumo:** Neste artigo tem-se o objetivo de apresentar um trabalho interdisciplinar que contou com a contribuição de professores dos departamentos de Engenharia Civil e de Matemática para resolver um problema de tensão de ruptura proveniente da análise das relações entre as quantidades de água e de cimento presentes no concreto. Visando desenvolver principalmente as competências de compreensão de fenômenos reais por meio de modelos matemáticos e computacionais, de aprendizagem autônoma, de trabalho em equipe multidisciplinar e de comunicação em diferentes formas e fundamentados no modelo da matemática em contexto de Camarena, foi elaborada e aplicada uma abordagem de ensino na qual os alunos puderam inicialmente construir experimentalmente diferentes relações entre as quantidades de água e de cimento e avaliar suas consequências na análise de tensões de ruptura, sendo os dados obtidos tratados matematicamente por meio do método dos mínimos quadrados nos ambientes computacionais Matlab e Excel. Os resultados evidenciaram que esse tipo de abordagem pode favorecer a construção das competências citadas, representando uma forma diferenciada de se trabalhar a Matemática no contexto da Engenharia Civil.

**Palavras-chave:** Tensão de ruptura. Relação água/cimento. Método dos mínimos quadrados. Modelo da matemática em contexto. Recursos computacionais.

### 1 INTRODUÇÃO

Com esse artigo, pretende-se apresentar um trabalho interdisciplinar, cujo objetivo consistiu em contextualizar o método dos mínimos quadrados, normalmente desenvolvido na disciplina de Cálculo Numérico, com a prática da Engenharia Civil.

No modelo curricular tradicional, as disciplinas de conteúdo matemático dos cursos de Engenharia são usualmente desenvolvidas de forma estanque. No caso do Cálculo Numérico, é comum que os dados sejam fornecidos no material didático e que os alunos procurem tratá-los matematicamente sem qualquer atribuição de significado.

Com as novas diretrizes curriculares dos cursos de Engenharia, há um movimento no qual a Matemática vem assumindo um papel diferenciado. Um ensino de matemática consciente pode contribuir fortemente no alcance de algumas competências relativas à formação do engenheiro. Por exemplo, a compreensão de fenômenos por meio da análise de padrões e modelos matemáticos pode ser construída com o apoio de recursos computacionais matemáticos gráficos, algébricos e de simulação. Recomenda-se, ainda, a integração da matemática em atividades de contextualização envolvendo diferentes disciplinas. Por fim, para

auxiliar o aluno a desenvolver autonomia e a trabalhar em equipe, os conteúdos matemáticos podem ser tratados utilizando metodologias ativas, ou seja, abordagens nas quais o aluno assuma um papel de protagonismo.

Camarena (2018) propôs um modelo denominado *Modelo da Matemática em Contexto*, que representa um referencial voltado especificamente para o ensino da Matemática na Engenharia. Para a pesquisadora, o estudante, como futuro profissional, deve estar apto a enfrentar uma situação-problema fazendo uso da integração de toda sua bagagem de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Ainda, na visão de Camarena (2018), é necessário que um engenheiro tenha sólida formação em Matemática, porém em Matemática aplicada na Engenharia, o que requer a cooperação entre professores das disciplinas de formação básica e da área profissionalizante. O foco deve ser voltado à formação do estudante para o desenvolvimento de competências profissionais de sua área. Para isso, são indicadas propostas interdisciplinares contextualizadas na área de conhecimento da futura profissão.

A abordagem descrita neste artigo foi construída com base neste modelo, uma vez que envolveu o conteúdo matemático relativo ao método dos mínimos quadrados em uma situação de contextualização na área de Engenharia Civil, contando com o apoio de professores da área básica e profissionalizante.

Na questão de comunicação, Duval (2006) apresenta seus pressupostos teóricos a respeito dos registros de representações semióticas. Para o pesquisador, um objeto matemático, dado o seu caráter abstrato, só pode ser acessado por meio de registros de representações semióticas, tais como o algébrico, matricial, gráfico, dentre outros.

Duval (2006) revela a existência de dois tipos de transformação entre representações, denominados tratamento e conversão. O tratamento pressupõe uma transformação entre representações no interior de um mesmo registro, como, por exemplo, as operações realizadas na resolução algébrica de um sistema linear. Já a conversão prevê transformações entre representações de diferentes registros, como, por exemplo, a construção gráfica de uma função partindo de sua representação algébrica. O pesquisador alerta para a importância de um trabalho que explore fortemente a atividade de conversão e a diversificação de registros, para que o aluno desenvolva diferentes formas de comunicação e a capacidade de selecionar o registro mais adequado para cada etapa de resolução de um problema.

Para um trabalho de simulação e de análise matemática, indica-se o uso de recursos computacionais. Segundo Baki (2015), essas ferramentas trazem vantagens pedagógicas e permitem, além do ganho de tempo, a elaboração de conjecturas e a identificação de modelos.

Balizados nesses elementos e visando a adaptação do ensino de matemática às indicações das novas diretrizes curriculares dos cursos de Engenharia, ao modelo da Matemática em Contexto proposto por Camarena (2018) e à integração de recursos computacionais, foi desenvolvida, no presente trabalho, uma abordagem interdisciplinar na qual primeiramente os alunos geraram os dados no laboratório para determinar diferentes relações entre quantidades de água e de cimento e avaliaram as consequências nas tensões de ruptura. Em seguida, esses dados foram tratados por meio do método dos mínimos quadrados utilizando dois recursos computacionais, o Matlab e o Excel.

Com isso, os alunos puderam construir e analisar um modelo real e enxergar a matemática utilizada em situação de contexto aplicado na área de interesse, favorecendo o desenvolvimento de diversas competências sugeridas nas diretrizes curriculares dos cursos de Engenharia, dentre elas, as de compreensão de fenômenos reais por meio de modelos computacionais, de aprendizagem autônoma, de trabalho em equipe e de comunicação eficiente nas formas escrita, gráfica e oral.

## 2 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO E DOS RESULTADOS

O experimento foi desenvolvido em duas etapas e contou com a participação de sessenta alunos do segundo semestre do ciclo básico do curso de engenharia, de um técnico e de dois professores de uma instituição confessional de ensino, sendo um do departamento de Engenharia Civil e outro do de Matemática. Os alunos foram organizados em três grupos com dez membros em cada, sendo essa atividade aplicada duas vezes.

O Quadro 1 indica as competências exploradas em cada etapa.

Quadro 1 - Descrição das competências de cada etapa

ETAPA 1 - EXPERIMENTAL	ETAPA 2 – TRATAMENTO DOS DADOS
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Investigação de fenômenos reais de forma experimental</li> <li>-Aprendizagem autônoma</li> <li>-Trabalho em equipe</li> <li>-Comunicação nas formas escrita, gráfica e oral</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Compreensão formal de fenômenos reais por meio de modelos matemáticos utilizando recursos computacionais</li> <li>-Comunicação nas formas escrita, gráfica e oral</li> </ul>

Fonte: Acervo próprio

Para a análise dos dados, tendo por base Isaia (2011), foi utilizada a lei de Abrams, a qual representa um modelo matemático empírico que nos informa a dependência da resistência à compressão do concreto em função da relação em massa entre água e cimento (a/c) presentes na sua composição. Salienta-se que a resistência à compressão do concreto depende de vários fatores, porém quanto menor for a relação entre massa da água e massa do cimento, maior será a resistência do concreto. A curva que representa essa situação é um modelo exponencial dado por

$$f_c = \frac{K_1}{K_2^{a/c}} \quad (1)$$

O expoente (a/c) dessa relação é representado no eixo das abscissas, de unidade (kg/kg), e  $f_c$  é a resistência do concreto, sendo o eixo das ordenadas de unidade (MPa).

### 2.1 Descrição da primeira etapa

A primeira etapa teve por objetivo o levantamento experimental dos dados, ou seja, a análise experimental da tensão de ruptura do concreto por meio da verificação da relação entre as quantidades de água e cimento. Para determinar a resistência do concreto através da Lei de Abrams, foram utilizadas três proporções entre cimento e agregados (proporção cimento: agregados dada por 1:3, 1:4 e 1:5). Cada uma das equipes confeccionou quatro corpos-de-prova de concreto com a mesma condição reológica (consistência). Cada um dos três grupos de alunos determinou o valor médio dos dados coletados (a/c,  $f_c$ ). As amostras confeccionadas tinham formato cilíndrico com seção transversal circular de diâmetro igual a 100mm. Elas foram curadas imersas em água por sete dias para posterior teste de resistência à compressão. Na Figura 1, apresentam-se os moldes utilizados e na Figura 2 uma amostra de alunos desenvolvendo o experimento.



Figura 1 – Equipamentos do Laboratório



Fonte: Acervo próprio

Figura 2– Desenvolvimento inicial do experimento.



Fonte: Acervo próprio

A prensa hidráulica utilizada para fazer o rompimento das amostras forneceu a resistência à compressão do concreto em kgf . Cada grupo mediu quatro valores e tirou a média. As médias dos dados coletados por cada grupo são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Média dos dados coletados por cada grupo

Média dos dados coletados (kgf)	
Grupo 1	21,220
Grupo 2	17,130
Grupo 3	14,630

Fonte: Acervo próprio

Analisando a área da seção transversal da amostra, verificou-se que, como o diâmetro era de 100mm, o raio era de 50mm, logo, considerando que a seção era um círculo, sua área era dada por  $A = 50^2 \pi = 7853,9 \text{ mm}^2$ .

Para efetuar a conversão de unidades no sistema universal, bastou multiplicar os valores em Kgf por 9,8 e dividir pela área da seção transversal. Os resultados obtidos por cada grupo são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Dados convertidos por cada grupo

Dados Convertidos (MPa)	
Grupo 1	26,5
Grupo 2	21,4
Grupo 3	18,3

Fonte: Acervo próprio

Para determinar a relação água/cimento, os alunos iniciavam com uma quantidade fixa de cimento (kg) e iam inserindo água (kg) até o momento que achassem que o concreto estava numa consistência adequada, segundo ensaio de abatimento do tronco-de-cone, conforme Figura 4. Eles apoiavam os pés na lateral e retiravam o tronco-de-cone para medir o abatimento do concreto. Caso não estivesse mole demais e desmoronasse, eles mediam com a régua quanto que a face circular superior descia. Nas Figuras 3 e 4, são apresentadas as etapas de construção do modelo.

Figura 3– Construção do modelo – Parte 1



Fonte: Acervo próprio

Figura 4 - Construção do modelo – Parte 2



Fonte: Acervo próprio

Caso ele estivesse dentro da margem, o concreto era aceito e colocado nos moldes para curar por sete dias. Além disso, a relação água/cimento era anotada. Caso a massa do recipiente descesse pouco, era adicionado mais água, porém, se descesse muito, era necessário repetir o procedimento. Foram anotados os seguintes valores da relação água/cimento, conforme apresentado na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados obtidos na relação água / cimento

Relação água/cimento (kg/kg)	
Grupo 1	0,53
Grupo 2	0,59
Grupo 3	0,66

Fonte: Acervo próprio

Nesta primeira fase, os alunos puderam desenvolver as competências de autonomia, ao buscarem estratégias sem o direcionamento do professor para obter as melhores relações entre água e cimento, a competência de trabalhar em equipe, ao se organizarem em grupos, fornecerem auxílio e discutirem diferentes pontos de vista, a competência de compreensão de fenômenos reais, ainda que de forma experimental neste primeiro momento, ao trabalharem com um problema real da área de civil, e a competência de comunicação nas formas oral, referente à apresentação e discussão dos resultados ao grupo, e escrita, quando dos registros dos dados em tabelas e dos relatos na língua natural.

## 2.2 Descrição da segunda etapa

Na segunda etapa, de posse dos dados obtidos experimentalmente, os alunos puderam tratá-los por meio do método dos mínimos quadrados. Esse método matemático é utilizado para ajuste de funções matemáticas aos dados experimentais. Essas análises foram realizadas em dois ambientes computacionais, no Matlab e no Excel. O uso do primeiro software permitiu desenvolver a capacidade de programação na linguagem do software e o segundo favoreceu uma visualização rápida dos resultados para entendimento do processo de cálculo.

Primeiramente, foi realizada a linearização da curva e o ajuste de dados, utilizando:

$$\ln(f_c) = \ln(k_1) - \ln(k_2)(a/c) \quad (2)$$

$$Y = AX + B \quad (3)$$

Aplicando essa análise nos dados coletados, obteve-se os resultados presentes na Tabela 4.

Tabela 4 - Valores obtidos por meio da linearização da curva

$X = (a/c)$	$Y = \ln(f_c)$
0,53	3,2771
0,59	3,0634
0,66	2,9069

Fonte: Acervo próprio

Fazendo o ajuste pelo método dos mínimos quadrados obteve-se  $Y = -2,8307X + 4,7620$  e calculando o modelo nos valores da relação água /cimento, foram encontrados os resultados apresentados na Tabela 5.



Tabela 5 - Construção do modelo linear

Dados	Modelo Linear
3,2771	3,2617
3,0634	3,0919
2,9069	2,8937

Fonte: Acervo próprio

Observa-se que o ajuste linear foi muito bom, pois a soma dos erros quadráticos entre o modelo e os dados, isto é, o resíduo obtido, foi de 0,0012. Retornando ao modelo original obtém-se:

$$f_c = \frac{116,9797}{16,9453^{a/c}} \quad (4)$$

Os dados foram tratados no Matlab e no Excel. No Matlab, o objetivo foi trabalhar com a construção de um programa para o tratamento dos dados, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Programa construído no software Matlab para o tratamento dos dados

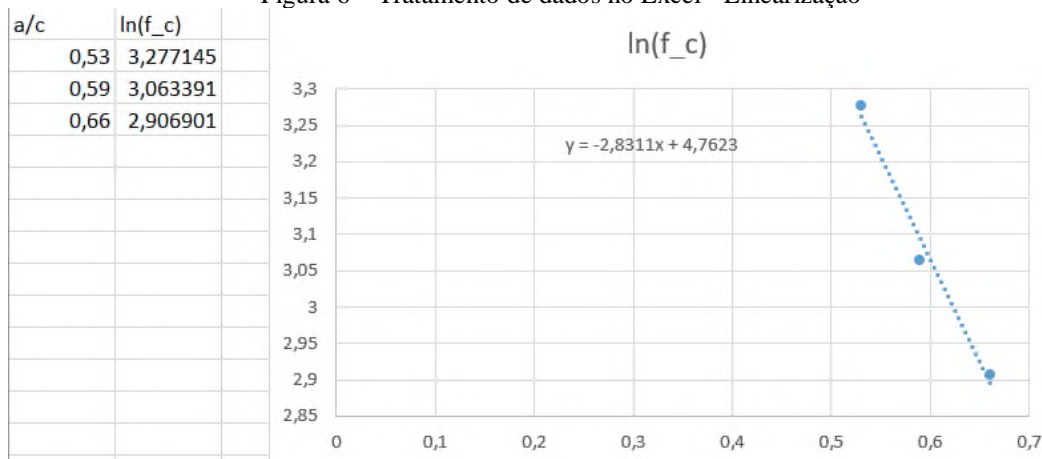
```
x=[0.53 0.59 0.66];
y=[3.2771 3.0634 2.9069];
p1=polyfit(x,y,1)
erro=y-polyval(p1,x);
RT=sum(erro.^2)
t=min(x):0.01:max(x);
yp1=p1(1)*t+p1(2);
figure(1)
plot(x,y,'ko',t,yp1,'r')
axis([0.4 0.7 0 4])
grid on

x=[0.53 0.59 0.66];
y=[26.5 21.4 18.3]
t=min(x):0.01:max(x);
yp2=exp(p1(2))./(exp(-p1(1).*t));
figure(2)
plot(x,y,'k*',t,yp2,'b')
axis([0.3 1 10 30])
grid on
```

Fonte: Acervo próprio

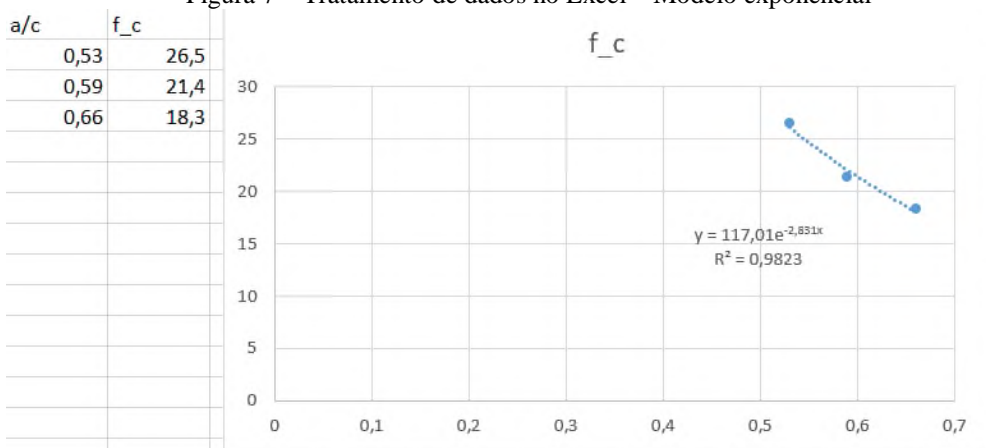
Também foi solicitado aos alunos o tratamento dos dados utilizando o Excel, por ser um software mais presente no mercado profissional e por favorecer a determinação rápida de cálculos e gráficos, conforme ilustrado nas Figuras 6 e 7. Na Figura 6, apresenta-se a linearização da situação proposta e na Figura 7 o modelo exponencial.

Figura 6 – Tratamento de dados no Excel - Linearização



Fonte: Acervo próprio

Figura 7 – Tratamento de dados no Excel – Modelo exponencial



Fonte: Acervo próprio

Desta forma, nesta segunda fase, foram exploradas principalmente as competências de compreensão formal de fenômenos reais e modelagem com uso de recursos computacionais, quando da análise dos dados experimentais por meio dos métodos dos mínimos quadrados nos ambientes Matlab e Excel. Ainda, o desenvolvimento da competência de comunicação escrita e gráfica também esteve presente quando da organização dos dados em tabelas, do trabalho com a programação no Matlab e da construção no Excel.

### 3 CONCLUSÃO

Esse trabalho procurou trazer uma proposta compatível com as indicações das novas diretrizes curriculares das Engenharias, no sentido de organizar o conteúdo em função de competências. Desta forma, objetivou-se que os alunos contextualizassem a aplicação das ferramentas matemáticas de Cálculo Numérico em uma situação real da área de Engenharia Civil e que interpretassem o fenômeno físico a partir de modelos matemáticos. Em consonância com Camarena (2018), a abordagem procurou trabalhar a Matemática não de forma estanque, mas sim contextualizada em um problema da área de formação dos alunos.

Na primeira etapa, procurou-se trabalhar as competências de compreensão experimental de um fenômeno real, de aprendizagem autônoma, de adequação ao trabalho em equipe e da comunicação nas formas escrita e oral.



Na segunda etapa, quando do trabalho com os recursos computacionais para a análise do modelo de ajuste, foram desenvolvidas a competência de compreensão formal do fenômeno real por meio de modelagem matemática e a competência de comunicação escrita e gráfica. Nesta última, os alunos puderam coordenar e estabelecer conversões entre diferentes registros semióticos, tais como o gráfico, o de tabelas, a língua natural e a língua especializada de programação, o que, de acordo com Duval (2006), enriquece o processo de comunicação. A utilização do software Matlab permitiu o trabalho com a comunicação em língua especializada computacional e o tratamento de dados no Excel, em consonância com o apontado por Baki (2015), favoreceu estabelecer o foco na interpretação dos resultados, dada a sistematização dos cálculos favorecida por este ambiente. Desta forma, espera-se que esse tipo de abordagem possa representar uma sugestão de trabalho compatível com as novas indicações das diretrizes curriculares dos cursos de Engenharia.

## REFERÊNCIAS

ABENGE-MEI. **Inovação na educação em Engenharia**. Proposta de diretrizes curriculares nacionais para o curso de Engenharia. Disponível em:

[http://www.abenge.org.br/file/PropostaDCNABENGEMEI\\_CNI.pdf](http://www.abenge.org.br/file/PropostaDCNABENGEMEI_CNI.pdf). Acesso em: 05 abr 2019.

BAKI, Adnan. Integration of Technology into Mathematics Teaching: past, present and future. In: SUNG JE CHO (ed.). **Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education**. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. p. 17-26.

CAMARENA, Patricia Gallardo. Formación por competencias en las ciencias básicas de la ingeniería. **Revista Brasileira de Ensino em Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, n. 2, p. 84-110, 2018.

DUVAL, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, v. 61, p. 103-131, 2006.

ISAIA, Geraldo Cechella. **Concreto: Ciência e Tecnologia**. São Paulo: Ibracon, 2011.

## MATHEMATICS AND CIVIL ENGINEERING: A PARTNERSHIP FOR THE ANALYSIS OF RESISTANCE TO CONCRETE COMPRESSION OBSERVING THE WATER / CEMENT RELATIONSHIP

**Abstract:** *In this paper the objective is to present an interdisciplinary work that counted on the contribution of Civil Engineering and Mathematics teachers to solve a problem of rupture tension coming from the analysis of the relations between the quantities of water and cement present in the concrete. Aiming to develop mainly the competences of understanding real phenomena through mathematical and computational models, autonomous learning, multidisciplinary teamwork and communication in different forms, and based on Camarena's mathematical context model, an teaching experiment was elaborated and applied in which the students were able to initially construct experimentally different relations between the quantities of water and cement and to evaluate their consequences in the analysis of rupture tensions. The data obtained were treated mathematically using the minimum squares method in Matlab and Excel computational environments. The results showed that this type of approach can favor the construction of the mentioned competences, representing a differentiated form of working mathematics in the context of Civil Engineering.*

**Key-words:** *Rupture tensions. Water / cement ratio. Minimum squares method. Mathematical model in context. Computational resources.*