

## **MODELOS MATEMÁTICOS OBTIDOS COM O USO DE MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO PELA CURVA DE REAÇÃO PARA UM SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS DIDÁTICO**

**Resumo:** Apesar de amplamente utilizadas na indústria, técnicas de identificação e modelagem de sistemas são áreas que muitas vezes não são exploradas pelos alunos de graduação dos cursos de Engenharia. Neste artigo, algumas técnicas de identificação de sistemas baseadas em métodos determinísticos foram aplicadas em um sistema de tanques acoplados didático, que representa uma configuração comum na indústria. A modelagem da dinâmica do sistema foi realizada com base nos resultados das técnicas apresentadas, realizando o cálculo de erro médio quadrático para cada um dos casos. Dessa forma, foi possível motivar os alunos a praticar o uso de técnicas experimentais alternativas à modelagem por meio das equações fenomenológicas que regem determinado sistema dinâmico, utilizando uma aplicação real e que pode ser facilmente modificada e encontrada em ambientes industriais.

**Palavras-chave:** Identificação de Sistemas, Modelagem de sistemas, Métodos determinísticos. Sistemas de tanques acoplados.

### **1 INTRODUÇÃO**

Um sistema de controle é projetado para que um sistema dinâmico possa se comportar de acordo com as premissas necessárias de um determinado projeto como, por exemplo, a(s) saída(s) possa(m) rastrear o(s) sinal(is) da(s) entrada(s) impostas a esse sistema. Dessa forma, dada uma entrada específica, é possível obter uma saída desejada. Por meio dos avanços na teoria de controle se fez possível a automatização de diversos processos industriais amplamente utilizados nos dias de hoje (NISE, 2013).

No âmbito industrial, procura-se otimizar o processo de produção por meio do uso de novas técnicas, com o objetivo de aumentar o rendimento, melhorar a qualidade dos produtos e evitar desperdício de matéria-prima durante o processo de fabricação. Dessa forma, um desafio da área de controle e automação tem sido obter modelos matemáticos capazes de reproduzir algumas características dos sistemas dinâmicos utilizadas na indústria (AGUIRRE; RODRIGUES; JÁCOME, 1998). A identificação de sistemas é utilizada na indústria na tentativa de resolver um dos problemas intrínsecos da teoria de controle: conhecidos os valores de entrada e de saída aplicados a um sistema de controle, qual é a descrição matemática desse sistema? Assim, é possível modelar matematicamente um sistema desconhecido por meio de um conjunto de dados de entradas e saídas do mesmo, representando o comportamento dinâmico do sistema (COELHO; COELHO, 2004).

Educacionalmente, a identificação de sistemas costuma ser abordada apenas em cursos de pós-graduação, deixando uma lacuna no aprendizado dos estudantes, como visto em Batista *et al* (2017). Dessa forma, é de grande valia aliar o estudo da identificação de sistemas com a teoria de controle, sendo possível aplicar conceitos estudados de forma teórica, tendo sempre um viés do que é aplicado na indústria, como discutido em Dutra, Milhomem e Dutra (2017) e Silva *et al* (2017).

Observando a contribuição da identificação de modelos matemáticos para a área de controle e automação, no presente trabalho um sistema comercial didático de tanques acoplados (QUANSER, 2018), é identificado por meio do uso de modelos matemáticos obtidos a partir de técnicas de identificação baseadas na resposta do sistema a uma entrada de excitação do tipo degrau em malha aberta.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, serão apresentados alguns conceitos sobre modelagem matemática, em especial as funções de transferência e identificação de sistemas. Segundo Zadeh (1965), a partir de um conjunto de dados de entrada e saída de um sistema é possível determinar um modelo em que, para uma classe especificada de sistemas, o mesmo é equivalente.

### 2.1 Função de transferência

Uma das formas de se modelar a dinâmica de um sistema de controle é por meio de uma função de transferência, que descreve matematicamente a relação entre a(s) entrada(s) e a saída(s) de um sistema dinâmico. Para um sistema contínuo, a função de transferência é dada pela razão entre a transformada de Laplace do sinal de saída do sistema ( $Y(s)$ ) e a transformada de Laplace do sinal de entrada do sistema ( $U(s)$ ). As raízes dos polinômios  $Y$  e  $U$  com grau  $q$  e  $n$  são denominados de zeros e polos da função de transferência, respectivamente (AGUIRRE, 2004), como representada pela Equação (1).

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_qs^q}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (1)$$

### 2.2 Modelagem de processos de primeira ordem

Um modelo matemático comumente utilizado na indústria para realizar representar vários tipos de sistemas reais é caracterizado pela função de transferência (CAMPOS; TEIXEIRA, 2008) ilustrada na Equação (2).

$$G_p(s) = \frac{K_p}{\tau_s + 1} e^{-\theta s} \quad (2)$$

Essa equação é denominada FOPDT (*First Order Plus Dead Time*), sendo muito utilizada na sintonia de controladores do tipo PID, IMC, entre outros (COELHO; COELHO, 2004), em que três características são essenciais ao modelo e devem ser consideradas:  $K_p$  (ganho do sistema),  $\tau$  (constante de tempo do sistema) e  $\theta$  (atraso do sistema). O ganho de um sistema é definido pela Equação (3).

$$K_p = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} \quad (3)$$

A constante de tempo em processos industriais é o tempo necessário para que a saída do processo de primeira ordem atinja 63,2% do valor da variação total, considerando o início da

mudança no sinal de saída, depois de uma mudança na entrada como definido em Mollenkamp (1988).

O atraso do sistema é definido como o tempo decorrente para que uma variação no sinal de entrada do mesmo seja percebida pelo seu sinal de saída.

### 2.3 Modelos matemáticos para os tanques

Em um sistema de nível onde dois reservatórios interagem, a função de transferência do sistema é obtida admitindo-se pequenas variações das variáveis a partir dos valores de regime permanente. Dessa forma, pode-se obter as Equações (4) e (5) para um sistema desse tipo (OGATA, 2010).

$$\dot{h}_1 = \frac{q_{in1} - q_{out1}}{A_1} \quad (4)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{q_{in2} - q_{out2}}{A_2} \quad (5)$$

em que  $\dot{h}_1$  e  $\dot{h}_2$  são as derivadas da altura para os tanques 1 e 2, respectivamente.

A vazão de entrada do tanque superior ( $q_{in1}$ ) é dada pela vazão da bomba, sendo essa aproximada por uma relação diretamente proporcional a sua tensão de alimentação ( $V_p$ ) e a constante da bomba ( $K_M$ ), enquanto que a vazão de entrada do tanque inferior ( $q_{in2}$ ) será igual a vazão de saída do tanque superior ( $q_{out1}$ ). As vazões de saída são calculadas por meio da relação de Bernoulli, considerando pequenos orifícios ( $a\sqrt{2gh}$ ), sendo:  $a$ , o orifício de saída;  $g$ , a aceleração de gravidade;  $h$ , a altura de coluna de água.

Aplicando essas modificações nas Equações (14) e (15), tem-se as Equações (16) e (17), respectivamente.

$$\dot{h}_1 = \frac{V_p K_M - a_1 \sqrt{2gh_1}}{A_1} \quad (6)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{a_1 \sqrt{2gh_1} - a_2 \sqrt{2gh_2}}{A_2} \quad (7)$$

### 2.4 Métodos de identificação de sistemas a partir da resposta ao degrau

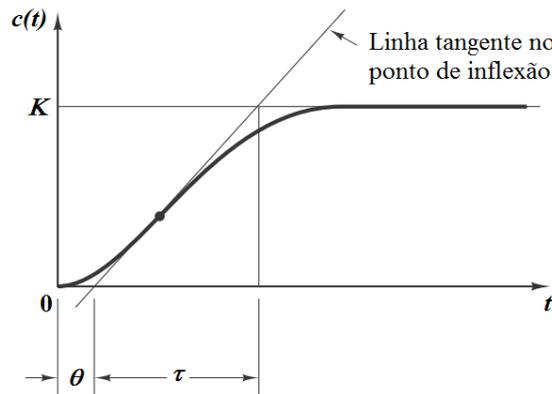
Nesta seção serão apresentados alguns métodos de identificação por meio da análise da curva de reação, os quais são bastante utilizados na indústria, devido a sua facilidade de implementação, mas que não tratam o ruído presente nos dados experimentais, sendo necessária uma boa relação entre sinal e ruído.

Todos os métodos apresentados nessa seção possuem ganho calculado a partir da Equação 3.

#### *Método de Ziegler-Nichols*

No método de Ziegler-Nichols (ZN), os parâmetros de ganho, constante de tempo e atraso são calculados traçando uma reta tangente no ponto de máxima inclinação da curva de saída do sistema, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Exemplo de curva de resposta do sistema dinâmico de primeira ordem com atraso com a aplicação do sinal do tipo degrau.



Fonte: Adaptado de Ogata (2004).

O atraso ( $\theta$ ) é calculado pelo intervalo de tempo entre a aplicação do degrau na entrada do processo e o instante em que a saída toca a reta tangente. A constante de tempo ( $\tau$ ) é o intervalo de tempo entre o atraso e o momento em que a reta tangente toca a reta formada pelo valor final de  $y$ .

#### **Método de Hägglund**

No método de Hägglund, o atraso é calculado da mesma forma de Ziegler-Nichols. A constante de tempo, por sua vez, será o intervalo de tempo entre o atraso e o momento em que o sinal de saída atinge 63,2% de seu valor final (COELHO; COELHO, 2004).

#### **Método de Smith para sistemas de primeira ordem**

No método de Smith para sistemas FOPDT (COELHO; COELHO, 2004), com a constante de tempo sendo calculada utilizando os instantes em que a saída atinge 28,3% ( $t_1$ ) e 63,2% do seu valor final ( $t_2$ ), dado por:

$$\tau = 1,5 (t_2 - t_1) \quad (8)$$

O atraso no sistema é calculado como a diferença entre o instante de tempo em que a saída atinge 63,2% de seu valor final e a constante de tempo, estabelecido como:

$$\theta = t_2 - \tau \quad (9)$$

#### **Método de Sundaresan e Krishnaswamy**

Nesse método, dois instantes de tempo - quando o valor de saída atinge 35,3% e 85,3% do valor final - são estimados a partir da curva de resposta ao sinal do tipo degrau. Esses instantes são utilizados no cálculo da constante de tempo e do atraso, ilustrados nas Equações (10) e (11), respectivamente (COELHO; COELHO, 2004).

$$\tau = 0,67(t_{85,3\%} - t_{35,3\%}) \quad (10)$$

$$\theta = 1,3t_{35,3\%} - 0,29t_{85,3\%} \quad (11)$$

### 2.5 Erro Quadrático Médio

Para avaliar os modelos identificados pelos métodos descritos na subseção 3.4 é utilizada a métrica do Erro Quadrático Médio (EQM), que mede a distância euclidiana entre o sinal medido e o sinal estimado. O erro quadrático médio (EQM), calculado pela Equação (12), é uma das metodologias de avaliação mais utilizadas devido a facilidade de implementação e seu baixo custo computacional (WANG; BOVIK, 2009).

$$EQM = \frac{\sum e(k)^2}{n} \quad (12)$$

com  $e(k)$  igual à diferença entre o sinal medido e o sinal estimado e  $n$  igual ao número de predições.

## 3 METODOLOGIA

A construção de modelos por meio da análise fenomenológica do processo pode ser bastante difícil quando o sistema a ser modelado for complicado. Nesse caso, as interações entre as variáveis envolvidas ficam bastante complexas e torna-se difícil descrevê-las matematicamente.

Foram escolhidas técnicas de identificação em malha aberta determinísticas de primeira ordem para a modelagem, descritas na Seção 2. A validação dos modelos obtidos foi realizada utilizando os parâmetros determinados por cada uma das técnicas na forma de função de transferência para o sistema dinâmico, aplicando as mesmas entradas do tipo degrau que alimentaram a o sistema de tanques previamente.

O sistema dinâmico utilizado no trabalho é ilustrado na Figura 2. Esse sistema consiste de dois tanques com uma bomba localizada em um reservatório que alimenta diretamente o tanque 1, com a alimentação do tanque 2 sendo realizada por meio do tanque 1, dependendo do tamanho do orifício de saída - essa configuração pode ser modificada pelo projetista, bastando modificar na planta as entradas e saídas da mesma. Sensores de pressão são utilizados na medição de nível da água presente em cada um dos tanques. É possível verificar os parâmetros da planta utilizada na Tabela 1.

Figura 2 – Sistema de tanques utilizado para a identificação de sistemas.

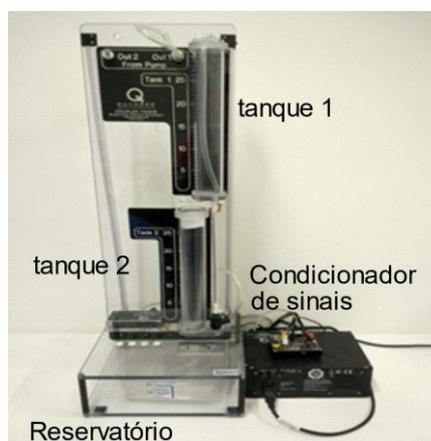


Tabela 1 – Parâmetros do sistema de tanques acoplados.

Descrição	Valor
Constante de fluxo da bomba ( $k_m$ )	$3,3 \frac{cm^3}{s} / V$
Diâmetros dos orifícios de saída ( $a_1, a_2$ )	0,45 cm
Tamanho dos tanques ( $h$ )	30 cm
Diâmetro interno dos tanques ( $A_1 = A_2$ )	4,445 cm

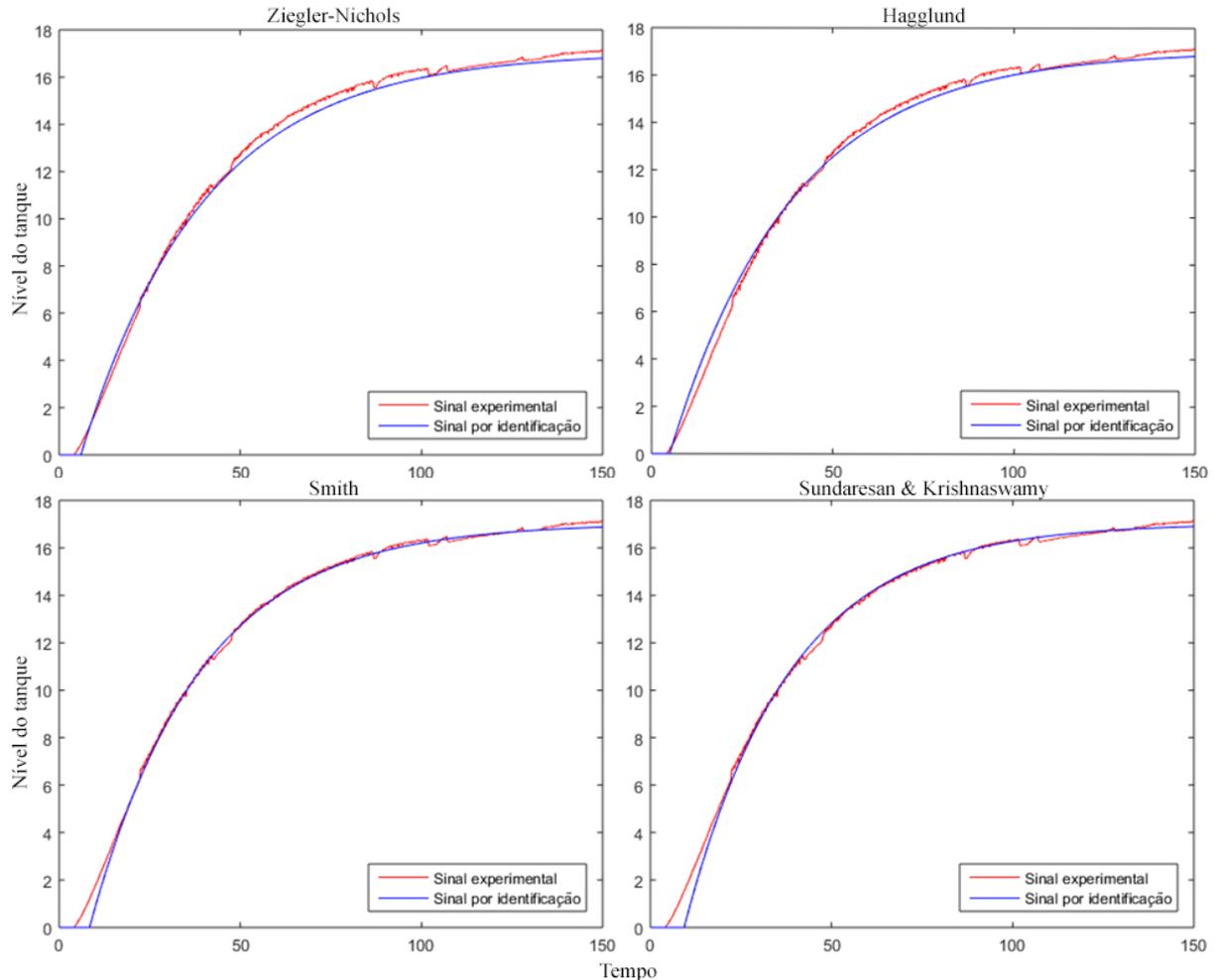
O *software* MATLAB foi utilizado durante todas as etapas do desenvolvimento do trabalho, utilizando o Simulink e uma API (*Application Programming Interface*) fornecida pela QUANSER para realizar a comunicação entre o MATLAB e o sistema de tanques. Os métodos de identificação foram transformados em algoritmos na forma de pseudocódigos, sendo implementados em seguida no *software*.

#### 4 RESULTADOS

Com a implementação computacional das técnicas de identificação realizadas por meio do MATLAB, foi possível identificar o sistema de tanques se baseando na resposta do sistema a uma entrada do tipo degrau.

Nas Figuras 4a, 4b, 4c e 4d são ilustrados os resultados das técnicas de identificação aplicadas no sistema de tanques utilizando o método de Ziegler-Nichols, Hägglund, Smith e Sundaesan e Krishnaswamy, respectivamente.

Figura 4 – Identificação do sistema por curva de reação. a) Utilizando o método de Ziegler-Nichols. b) Utilizando o método de Hägglund. c) Utilizando o método de Smith. d) Utilizando o método de Sundaresan e Krishnaswamy.



As Equações 13-16 ilustram funções de transferências que caracterizam, respectivamente, os modelos identificados pelo método de Ziegler-Nichols, Hägglund, Smith e Sundaresan-Krishnaswamy.

$$G(s) = \frac{6,81}{34s + 1} e^{-6s} \quad (13)$$

$$G(s) = \frac{6,81}{33,8s + 1} e^{-5s} \quad (14)$$

$$G(s) = \frac{6,81}{30,35s + 1} e^{-8,4s} \quad (15)$$

$$G(s) = \frac{6,81}{29,08s + 1} e^{-9,33s} \quad (16)$$

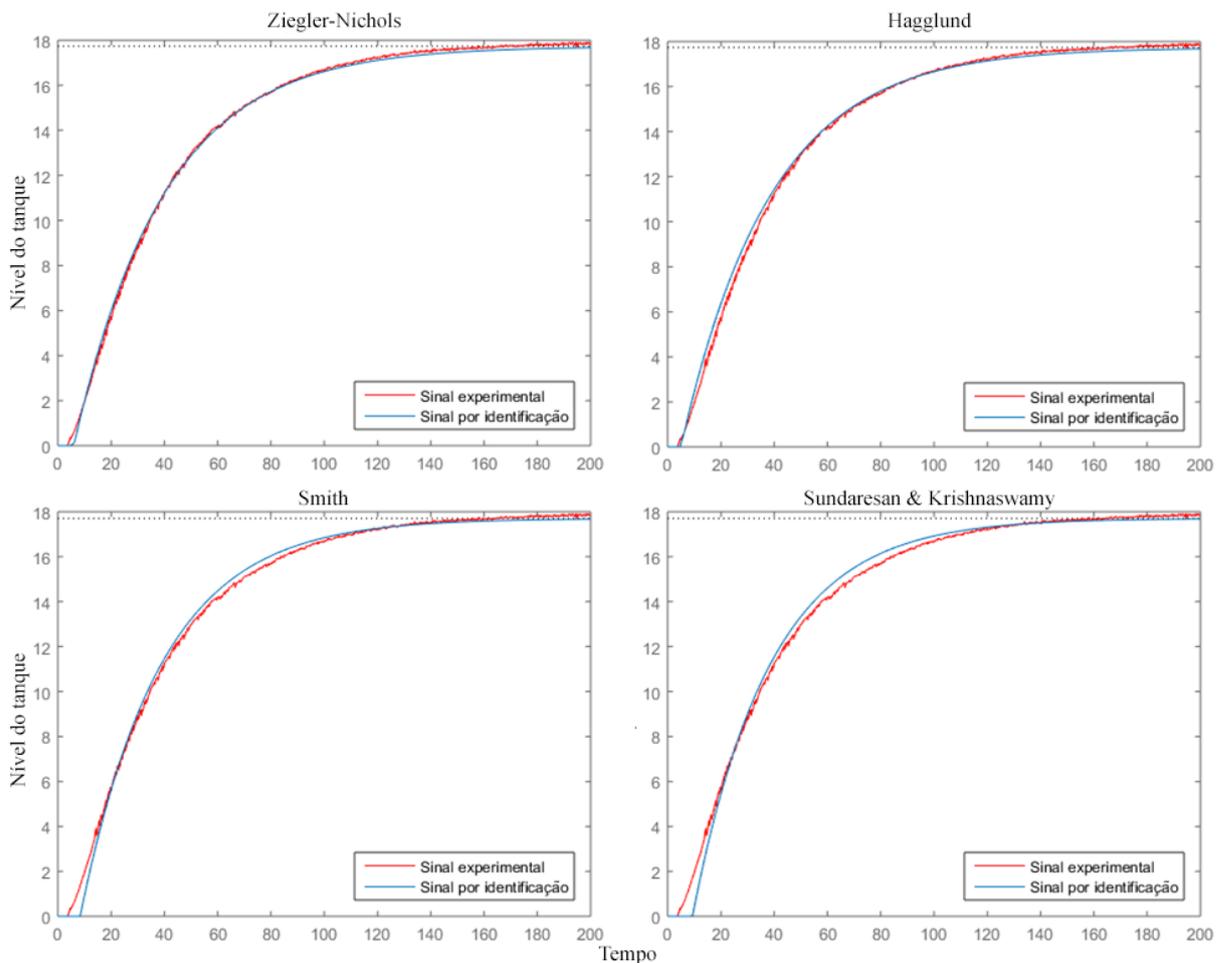
Na Tabela 2 são ilustrados o Erro Médio Quadrático (EMQ) referente a cada técnica de identificação implementada.

Tabela 2 – EMQ das técnicas implementadas.

Método	Ziegler-Nichols	Hägglund	Smith	Sundaresan
Erro (valor absoluto)	0,0871	0,0938	0,05	0,0875

A Figura 5 apresenta a validação dos modelos obtidos. Os dados gerados para validação correspondem à resposta do sistema a um degrau de 2,6 V em um período de 200 segundos.

Figura 5 – Validação dos métodos implementados. a) Método Ziegler-Nichols. b) Método de Hagglund. c) Método de Smith. d) Método de Sundaresan e Krishnaswamy.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática que descreve o comportamento dinâmico do sistema de tanques utilizado, ilustrado na Figura 3 foi realizada e atingiu um resultado satisfatório

considerando as técnicas de identificação implementadas, como pode ser observado na Figura 4. Apesar de não ser possível avaliar os métodos graficamente, a Tabela 2 mostra que o método de Sundaresan e Krishnaswamy teve o melhor resultado, utilizando o EMQ como índice de avaliação.

O projeto é relevante também no ensino do controle de processos, uma vez que os alunos envolvidos tiveram a oportunidade de aplicar conceitos teóricos em um sistema dinâmico didático. Apesar de aplicada em nível didático, a identificação de sistemas desenvolvida no presente artigo proporcionou aos estudantes conhecimento e experiência, mostrando aos mesmos como uma das áreas de controle pode ser aplicada diretamente em um possível cenário industrial.

Como proposta de trabalhos futuros, a identificação do sistema será realizada utilizando outros métodos de identificação, acrescentando o método determinístico de primeira ordem proposto por Mollenkamp, métodos determinísticos de segunda ordem e utilizando os mínimos quadrados. A validação também será realizada para outros *setpoints* do sistema, considerando as não-linearidades impostas pelas características do mesmo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. A.; RODRIGUES, G. G.; JÁCOME, C. R. F. Identificação de sistemas não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais: uma revisão e novos resultados. *SBA Controle & Automação*, v. 9, n. 2, p. 90–106, 1998.

BATISTA, J. C. *et al.* Identificação de sistemas dinâmicos de primeira e segunda ordem, palestra motivacional para disciplinas da área de controle. In: XLV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2017, Joinville. Anais.

CAMPOS, M. C. M. M.; TEIXEIRA, H. C. G. *Controles típicos de equipamentos e processos industriais*. São Paulo: Blucher, 2008.

COELHO, A. A. R.; COELHO, L. S. *Identificação de sistemas dinâmicos lineares*. Florianópolis: Ed. UFSC, 2004.

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. *Sistemas de Controle Moderno*. 8ª edição, LTC, 2001.

DUTRA, M. K.; MILHOMEM, R. L.; NEVES, C. F. O. C. Aspectos práticos sobre modelagem matemática de um sistema didático de controle de nível. In: XLV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2017, Joinville. Anais.

MOLLEMKAMP, R. A. *Controle automático de processos*. Editora Ebras, 1988.

NISE, N. S. *Engenharia de sistemas de controle*. 6ª edição. Rio de Janeiro: LTC / Grupo Gen, 2013.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 5 ed. São Paulo: Pearson, 2010.

QUANSER. Coupled tanks. Disponível em: <https://www.quanser.com/products/coupled-tanks/>. Acesso em: abr., 2018.

\_\_\_\_\_. Página inicial. Disponível em: <https://www.quanser.com>. Acesso em: 22 abr. 2018.

SILVA, V. R. *et al.* Desenvolvimento de sistema de controle de nível no âmbito didático como forma de complemento ao estudo da teoria de controle moderno. In: XLV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2017, Joinville. Anais.

WANG, Z.; BOVIK, A. C. Mean squared error: love it or leave it? a new look at signal fidelity measures. IEEE Signal Processing Magazine, v. 26, n. 1, p. 98–117, 2009.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. Information and Control, v.8, p. 338-353, 1965.

## OBTAINING MATHEMATICAL MODELS OF A DIDACTIC COUPLED TANK SYSTEM USING STEP RESPONSE METHODS

**Abstract:** *Despite widely used in industry, system identification and mathematical modelling techniques are areas that are often not explored by undergraduate engineering students. In this paper, some techniques for identifying systems based on deterministic methods were applied in a didactic coupled tank system, which represents a common configuration in the industry. The modelling of the dynamics of the system was performed based on the results of the presented techniques, performing the calculation of mean square error for each of the cases. In this way, it was possible to motivate students to practice using alternative experimental techniques to modelling through the phenomenological equations that govern a given dynamic system, which was previously seen using a real application and that can be easily modified and found in industrial environments.*

**Key-words:** *System Identification, System Modeling, Deterministic Methods, Coupled-tank system.*