METODOLOGIA PARA O ENSINO DE CÁLCULO PARA ENGENHARIA APLICADO A MECÂNICA E ELETROSTÁTICA

Luciana P. Gonzalez – lpgonzalez@ufpa.br
Universidade Federal do Pará, Faculdade de Física
Endereço Rodovia BR 316, KM 07, Nº590.
67113901 – Ananindeua – Pará

Eliezer T. S. Silva – seliezertiago@gmail.com

Alexsandro Q. da Silva – Alexsandro.silva07@hotmail.com

Resumo: *O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina imprescindível para os cursos de engenharias e áreas afins. É indispensável à compreensão da fundamentação teórica das disciplinas de cálculo para uma correta análise e modelação de efeitos físicos, e deve ser bem compreendida tanto no que diz respeito aos seus conceitos quanto à importância dentro da matriz curricular dos cursos da área de exatas e engenharias. Nesse artigo é analisado de que forma o cálculo diferencial e Integral pode ser ministrado nas engenharias de forma aplicada, com exemplos voltados ao estudo de movimento e eletrostática.*

Palavras-chave: *Cálculo; engenharia; efeitos físicos.*

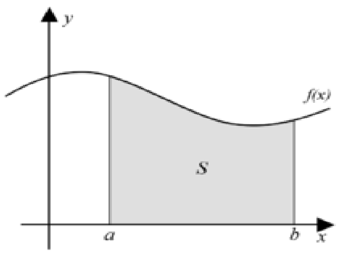
1 INTRODUÇÃO

Uma situação observada comumente pelos docentes ao ministrarem disciplinas de cálculo no ensino superior é a falta de embasamento teórico que os alunos trazem do ensino médio, dessa forma alguns pesquisadores acreditam que a falta de conhecimento dos pré-requisitos para cursar as disciplinas de cálculo é um dos fatores que levam a dificuldade do processo de ensino-aprendizado e consequentemente ao maior número de reprovação. Além de inúmeras dificuldades referente a matemática básica outro fator importante a ser observado é que o aluno da área de exatas da década de 90 tinham contato com o cálculo diferencial e integral ainda no ensino médio, logo no momento que tais disciplinas foram retiradas do ensino médio os alunos só tem esse primeiro contato já na universidade, dificultando ainda mais o aprendizado. Além desses fatores, observou-se pelos autores deste que muitas vezes não é deixado claro para o aluno, qual aplicação direta das disciplinas de cálculo dentro do seu curso e como ela, ou a falta dela, impactaria no entendimento das disciplinas específicas. Devido a isso foi realizada uma pesquisa por um dos autores, utilizando um questionário, com alunos da área de ciências exatas, para buscar o entendimento de algumas possíveis causas que levam a este alto nível de reprovação e consequente evasão do curso. Tal questionário trazia questões referentes a disciplinas da área da matemática, respondido de forma anônima por 32 alunos de cursos da área de ciência exatas (GONZALEZ; PINHEIRO, 2017). A partir do resultado do questionário, foi observado que um fator que poderia está contribuindo de forma significativa para a reprovação, seria o fato dos professores não tratarem o cálculo como disciplina aplicada ao curso em questão. Para o foco deste trabalho, duas perguntas deste questionário tem significativa importância. Primeira pergunta: Qual seu nível de entendimento da importância da disciplina? A partir das respostas analisadas nenhum aluno tinha o entendimento exato da importância da disciplina para o curso e apenas 10 alunos do total de 32 alunos tinha certo entendimento. A segunda pergunta relacionada ao tema foi: O que aumentaria sua motivação para cursar a disciplina?, ao responder tal questão observou-se que a maioria dos alunos espera que a disciplina seja ministrada dando o sentido real de sua aplicação dentro do seu curso (resposta de 12 alunos). Tais resposta fortaleceram a hipótese de que o cálculo não sendo trabalhando como disciplina aplicada favorece a falta de motivação e consequentemente aumenta a probabilidade de reprovação na disciplina e evasão do curso.

2 O CALCULO E SUAS APLICAÇÕES EM DIFERENTES ÁREAS DO CONHECIMENTO

O Cálculo Diferencial e Integral, ou simplesmente Cálculo, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido) (REDINZ, 2004).

Figura 01- Cálculo a área da região assinalada.



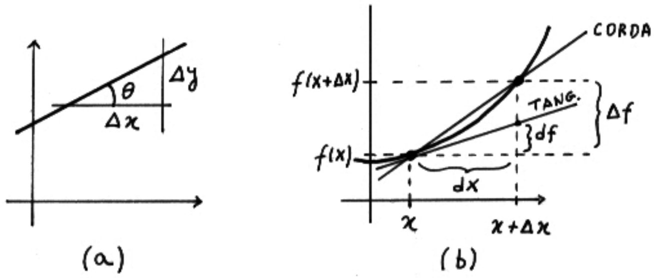
Fonte: (DIAS, 2016)

O cálculo é usado em todos os ramos das ciências físicas, na ciência da computação, estatística, engenharia, economia, medicina e em outras áreas sempre que um problema possa ser modelado matematicamente. O cálculo foi desenvolvido simultaneamente por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e por Isaac Newton (1643-1727), em trabalhos independentes (EVES, 2004). O Cálculo auxilia em vários conceitos e definições na matemática, química, física clássica, física moderna e economia. O estudante de cálculo deve ter um conhecimento em certas áreas da matemática, como funções (modular, exponencial, logarítmica, par, ímpar, afim e segundo grau, por exemplo), trigonometria, polinômios, geometria plana, espacial e analítica. O cálculo possui áreas iniciais como o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de diferenciais. A partir do conhecimento do Teorema Fundamental do Cálculo, estabeleceu-se uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O professor de Isaac Newton em Cambridge, Isaac

Barrow, descobriu que esses dois problemas estão de fato estritamente relacionados, ao perceber que a derivação e a integração são processos inversos. Foram Leibniz e Newton que exploraram essa relação e a utilizaram para transformar o cálculo em um método matemático sistemático. Particularmente ambos viram que o Teorema Fundamental os capacitou a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de soma (método descrito pelo matemático Riemann, pupilo de Gauss). A Física faz uso intensivo do cálculo. Todos os conceitos na mecânica clássica são inter-relacionados pelo cálculo (SOSSAE; SABLÓN; YACOUB, 2006). A massa de um objeto de densidade conhecida, o momento de inércia dos objetos, assim como a energia total de um objeto dentro de um sistema fechado pode ser encontrado usando o cálculo. Nos subcampos da eletricidade e magnetismo, o cálculo pode ser usado para encontrar o fluxo total de campos eletromagnéticos. Um exemplo mais histórico do uso do cálculo na física é a segunda lei de Newton que usa a expressão "taxa de variação" que se refere à derivada: A taxa de variação do momento de um corpo é igual à força resultante que age sobre o corpo e na mesma direção. Até a expressão comum da segunda lei de Newton como Força = Massa × Aceleração envolve o cálculo diferencial já que a aceleração pode ser expressada como a derivada da velocidade. A teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a teoria da relatividade geral de Einstein também são expressas na linguagem do cálculo diferencial. A química também usa o cálculo para determinar as variações na velocidade das reações e no decaimento radioativo. Na medicina o cálculo pode ser usado para encontrar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação, e até mesmo determinar o tamanho máximo de moléculas que são capazes de atravessar a membrana plasmática em uma determinada situação, normal ou induzida, em células. Na geometria analítica, o estudo dos gráficos de funções, o cálculo é usado para encontrar pontos máximos e mínimos, a inclinação, concavidade e pontos de inflexão. Na economia o cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal. O cálculo pode ser usado para encontrar soluções aproximadas de equações, em métodos como o método de Newton, iteração de ponto fixo e aproximação linear. Por exemplo, naves espaciais usam uma variação do método de Euler para aproximar trajetórias curvas em ambientes de queda livre. Os conteúdos e a organização de um curso de Cálculo são praticamente universais. O conceito de derivada é apresentado aos alunos da maneira que surgiu historicamente, isto é, como resposta a seguinte pergunta: "Como calcular a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ passando por um ponto dado?". Este momento é adequado para relembrar o conceito de inclinação de uma reta, diferenciando os vários conceitos relacionados com o ângulo e com sua tangente ou coeficiente angular Na Figura 4, mostra-se graficamente como obter a definição de derivada a partir da inclinação da reta secante. Dado o gráfico de uma função $y = f(x)$ e os pontos $P(x, f(x))$ e $Q(x + h, f(x + h))$ calcula-se a inclinação da reta secante através da equação 1 (CIANI; LOPES; CIRINO; PEREIRA; BALDINO, 1995).

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)}{h} - \frac{f(x)}{h} \quad (1)$$

Figura 2- Inclinação (derivada) de uma reta e de uma curva.



Fonte: (REDINZ, 2004)

Fazendo o ponto *(x+Δx)* se aproximar do ponto *x*, como na Figura 4, tem-se que a inclinação da reta tangente é dada pela equação 2.

$$m = \lim_{h \to o} f(x+h) - f(x)/h \qquad (2)$$

Assim define-se a derivada como sendo a inclinação da reta tangente e denota-se por:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x)/h \qquad (3)$$

3 O Cálculo Aplicado na Mecânica e Eletromagnetismo

3.1 Movimento

No estudo da mecânica uma das primeiras definições tratadas é a velocidade instantânea representada matematicamente na equação 4, visto que é definida em termos gráficos como a inclinação da reta tangente à curva do deslocamento em relação ao tempo no ponto *P*, (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 1996), esta definição pode ser facilmente tratada em sala de aula ao ministrar a disciplina cálculo 1, tanto exemplificando a definição de limite como trabalhando o conceito de forma gráfica como na figura 2 vista anteriormente.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

Onde Δx é o deslocamento no intervalo de tempo Δt. Quando o intervalo de tempo tende a zero, Δt é substituído por *dt* e o deslocamento correspondente Δx por *dx*. Para facilitar a compreensão do conceito de derivada como variação instantânea é interessante construir uma tabela com valores do deslocamento em relação ao intervalo de tempo Δt considerado. À medida que o intervalo Δt diminui, a velocidade média tende à velocidade instantânea, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1- Definição de derivada a partir do processo limite no movimento retilíneo

Posição inicial		Posição final		Intervalos		Velocidade
$x_1(m)$	t_1(s)	x_2(m)	t_2(s)	Δx(m)	Δt(s)	$\Delta x/\Delta t$ (m/s)
5,00	1,00	6,75	1,50	1,75	0,50	+3,5
5,00	1,00	5,760	1,200	0,760	0,200	+3,8
5,00	1,00	5,388	1,100	0,388	0,100	+3,9
5,00	1,00	5,196	1,050	0,196	0,050	+3,9
5,00	1,00	5,158	1,040	0,158	0,040	+4,0
5,00	1,00	5,119	1,030	0,119	0,030	+4,0

Fonte: (SOSSAE, 2006),

Ao introduzir o conceito de derivadas de ordem superior, propõe-se usar a definição de aceleração como sendo a segunda derivada do deslocamento ou a primeira derivada da velocidade, ambas em relação ao tempo, como mostra as Equações 5 e 6 (SEARS; ZEMANSKY; YOUNG, 1983).
.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} e \quad (5)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d''x}{dt''} \quad (6)$$

3.2 Eletrostática

A derivada também é aplicada na definição dos principais conceitos de Eletricidade e magnetismo. Um dos primeiros conceitos a ser trabalhado em eletricidade é o do campo eletrostático que pode ser obtido a partir da máxima variação do potencial elétrico em relação ao deslocamento. O campo elétrico pode ser definido como a variação da tensão elétrica dV em relação ao deslocamento (volt/m) como mostra a equação 7 (SHADIKU, 2004).

$$\boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl} = E \cos\theta . dl = -dV \quad (7)$$

Onde $\boldsymbol{E}$ é o vetor campo elétrico e $\boldsymbol{dl}$ o vetor deslocamento e θ é o menor ângulo formado entre eles. Outra aplicação da derivada em eletricidade é na definição da corrente elétrica instantânea que é calculada como a quantidade de carga (ΔQ) que atravessa uma superfície por intervalo de tempo (Δt). Quando esta taxa de fluxo de carga não é constante, generaliza-se a definição, usando a derivada, conforme Equação abaixo.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (8)$$

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (9)$$

Outros exemplos que podem ser apresentados como motivação ao ensino de derivada é o uso da derivada da tensão elétrica em relação ao tempo para o cálculo da corrente elétrica no capacitor (Equações acima) e da derivada da corrente elétrica em relação ao tempo para o cálculo da tensão elétrica no indutor (equação 11) (SEARS; ZEMANSKY; YOUNG, 1983).

$$q = C.v \tag{10}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \tag{11}$$

Onde q é a carga numa das placas do capacitor, C a sua capacitância e v a tensão nos terminais do capacitor.

$$\emptyset b = L.i \tag{12}$$

$$v = d\emptyset\frac{b}{dt} = \frac{Ldi}{dt} \tag{13}$$

Onde ∅b é o fluxo magnético, L é a indutância, i é a intensidade de corrente através do indutor e v é a tensão nos terminais do indutor. A proposta apresentada pode ser estendida às disciplinas de Cálculo II e III mantendo a interdisciplinaridade entre o Cálculo e a Física. O conceito de derivadas parciais introduzidos no curso de Cálculo II fornece uma linguagem conveniente para expressar algumas concepções fundamentais da Teoria Eletromagnética. A definição do operador ∇ - *nabla* (ou *del*) (equação 14) é de extrema utilidade para se definir as operações vetoriais de gradiente (equação 15) e laplaciano (equação 17) de um escalar e de divergência (equação 16) . As Equações de Maxwell só poderão ser bem compreendidas a partir do domínio matemático desses conceitos (SHADIKU, 2004).

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\boldsymbol{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{ay} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{az} \tag{14}$$

$$gradV = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{ax} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{ay} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{az} \tag{15}$$

$$div\ A = \nabla.A = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}\boldsymbol{az} \tag{16}$$

$$Laplaciano\ V = \nabla.\nabla V = \nabla''V = \frac{\partial''V}{\partial x''} + \frac{\partial''V}{\partial y''} + \frac{\partial''V}{\partial z''} \tag{17}$$

As Equações acima estão em coordenadas cartesianas onde $\boldsymbol{a_x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{az}$ são respectivamente os vetores unitários nas direções *x*, *y* e *z*.

4 COSIDERAÇÕES FINAIS

O artigo teve como objetivo relacionar o Cálculo diferencial e integral a disciplinas específicas e utiliza-lo para o desenvolvimento de conceitos físicos bem como demostrar algumas de suas aplicações. É importante atentar ainda as informações recolhidas no questionário aplicado aos alunos já que trás dados preocupantes que corriqueiramente não são levados em consideração como o fato da grande maioria dos pesquisados não terem um bom esclarecimento sobre a importância das disciplinas da área da matemática dentro da matriz curricular do seu curso, sem o entendimento de sua aplicabilidade torna-se pouco provável que o aluno dê a atenção que cabe a esta. O artigo tratou, portanto de propor uma metodologia de ensino onde não fosse tratado simplesmente cálculos e conceitos matemáticos mas ministrar estes de forma aplicada e direcionada a cada curso.

REFERÊNCIAS

CIANI, A.B.; LOPES, A.R.L.V.; CIRINO, M.C.C.T.; PEREIRA,P.S.; BALDINO, R.R. **Do coeficiente angular da reta ao conceito de diferencial: crítica ao ensino atual e proposta alternativa**, V ENEN Aracaju:16-21, julho de 1995.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

DIAS, Gabriela Alves. **Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações**. 2016. 139 f. Monografía. Curso de licenciatura em Matemática, Universidade estadual do sudeste, da Bahia, Vitória da Conquista, 2016.

GONZALEZ, Luciana; PINHEIRO, Miriane. Tecnologia em Prol do Aprimoramento da Aprendizagem. In: II Simpósio Nacional de Tecnologias Digitais na Educação, 2017, Maranhão. **Anais**. São Luís. 2017.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física 1: Mecânica**. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

JÚNIOR, Valdir; MENEZES, Josinalva; BRITO, Josivaldo; JÙNIOR, Marco. **Os Obstáculos No Processo Ensino-Aprendizagem Nos Cursos De Graduação Da Ufrpe: A Disciplina Cálculo I.** Disponível em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO19453574449eT.doc. Acesso em: 30 abr. 2018.

REDINZ, José Arnaldo. **Cálculo Diferencial & Integral Para a Física 3**. (DPF/UFV) JULHO DE 2004.

SEARS, Francis; ZEMANSKY, Mark W.; YOUNG, Hugh D. **Física 3: Eletricidade e Eletromagnetismo**. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

SHADIKU, Matthew N.O. **Elementos de eletromagnetismo**. Porto Alegre: Bookman, 2004.

SOSSAE, Renata Cristina; SABLÓN, Vicente Becerra; YACOUB, Maria Nídia R. D. **Ensino de Derivadas no Curso de Engenharia.** São Paulo, 2006.

TEACHING CALCULUS FOR ENGINEERING – APPLICATION OF DERIVATIVES AND INTEGRALS

Abstract: *The Differential and Integral Calculus is an indispensable discipline for engineering and related areas. This is fundamental to understanding physical effects, so it is necessary to be well understood its concepts and its importance for the courses of the area of exact and engineering. It is indispensable to understand the theoretical basis of the disciplines of calculation for a correct analysis and modeling of physical effects. In this article, we discuss how differential and integral calculus can be applied in engineering in an applied way, with examples focused on the study of motion and electrostatics.*

Key-words: *calculus, engineering, physical effects.*