

O USO DE MASSA DE MODELAR PARA A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE CURVAS DE NÍVEL

Gezelda C. Moraes – gezelda.moraes@pucpr.br
Vanessa T. Ales – vanessa.ales@pucpr.br
Karla C. A. Vieira – karla.arsie@grupomarista.org.br
Izabela P. Bastos – izabela.patricio@pucpr.br
Salmo Pustilnick – salmo.pustilnick@pucpr.br

Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Rua Imaculada Conceição, 1155 – Bairro Prado Velho
CEP 80215-901 – Curitiba – Paraná

Resumo: Neste artigo está sendo explorado um conceito matemático normalmente abordado na disciplina de Cálculo II, a Curva de Nível, por meio de materiais manipuláveis. Neste caso, optou-se por um brinquedo infantil muito popular: a massa de modelar. É relatado o conceito, detalhada a atividade desenvolvida e apresentado alguns dos resultados obtidos em sala de aula. Esta atividade foi realizada nas turmas de engenharia da Escola Politécnica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná e teve como referência o material multimídia Guia do Professor produzido pela Unicamp. Quando se trabalha com a manipulação de conteúdos matemáticos, sob a perspectiva de Metodologias Ativas, possibilita-se que os estudantes explorem sua capacidade de generalização, de abstração e de análise das propriedades que existem em muitos fenômenos naturais ou ainda criados pelo homem. Isto tudo permite que os estudantes compreendam satisfatoriamente o tema de estudo. A intenção foi buscar uma forma diferenciada e mais atraente para introduzir este tema (curvas de nível) nas aulas do ensino de engenharia. Os livros normalmente utilizados no ensino superior ainda são muito tradicionais com enfoque em definições e técnicas, geralmente com auxílio de programas computacionais, mas que ainda tratam conteúdos como se o estudante já o tivesse apreendido. Conclui-se que, se o estudante tiver a oportunidade de trabalhar com diferentes formas de apresentação e manipulação do tema, poderá obter um maior entendimento e apropriação do conteúdo proposto, e assim, fazer as suas próprias análises e construções.

Palavras-chave: Metodologias ativas. Ensino de engenharia. Cálculo. Curvas de nível. Massa de modelar.

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Anton (2000), todos nós já estamos familiarizados com mapas topográficos (ou de contorno), cuja paisagem tridimensional pode ser representada por linhas de contorno bidimensionais ou curvas de elevação constante (podemos considerar como exemplo a extensão de uma montanha). Estes mapas de contorno são usados também no

estudo de funções de duas variáveis, mas geralmente ensina-se o tema de maneira ainda convencional, expositiva. Pensando em uma nova forma de abordar estes conceitos na sala de aula que aplicamos esta atividade com massa de modelar. Vamos apresentar o desenvolvimento desta atividade e suas considerações acerca dos resultados obtidos após a sua análise. Inicialmente convém destacar algumas implicações referentes a este trabalho. Primeiro quanto à relevância de uma proposta metodológica que enfoca na construção do conhecimento pelo aluno, como agente proativo do seu processo de aprendizagem através de uma metodologia ativa e em seguida a apresentação do que é uma curva de nível.

2 METODOLOGIA ATIVA

Para começarmos, vamos refletir sobre o seguinte assunto: para aprender a dirigir, precisamos das aulas teóricas e práticas. Ninguém aprende a dirigir, conduzir um carro de verdade, se não tiver aulas práticas. Por analogia e de uma maneira bem simples isto nos leva à ideia do que significa a metodologia ativa nas aulas dos cursos de graduação. Ela é uma linha educacional que permite aos estudantes serem agentes de seu próprio aprendizado. O professor funciona como um mediador do tema da aula. São os estudantes que promovem a construção do aprendizado, de uma forma mais protagonista, uma vez que a participação deste estudante é que faz acontecer a Metodologia Ativa.

De acordo com Souza e Morales (2015), busca-se, por meio desta linha educacional, aprimorar a autonomia individual do estudante, desenvolvendo-o como um todo, para que ele seja capaz de construir os significados daquilo que estuda e fazer a apreensão destes. Assim, este processo faz com que os estudantes sejam os principais personagens da aula. Desta forma, termina por confrontar-se com o ensino das faculdades tradicionais, que enfatizam a informação, com disciplinas fragmentadas, métodos excessivamente expositivos, totalmente centrados no professor e que aplicam avaliações que exigem apenas memorização. Isso já fez algum sentido quando o acesso à informação era mais difícil. Mas hoje vivemos em um mundo de avanços tecnológicos à velocidade exponencial e os métodos de ensino também precisam avançar.

Gastamos muito tempo ensinando com materiais expositivos, orais e audiovisuais, previamente selecionados ou elaborados. São importantes, mas é preciso inovar, combinar atividades práticas, desafios e informação contextualizada. As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se o objetivo é desenvolver a autonomia dos estudantes, precisamos adotar metodologias que possibilitem que eles se envolvam em atividades cada vez mais práticas, mais complexas, de contexto real e para que tomem decisões e avaliem os resultados, com apoio de materiais relevantes. Para aguçar a criatividade precisamos manipular diversas possibilidades.

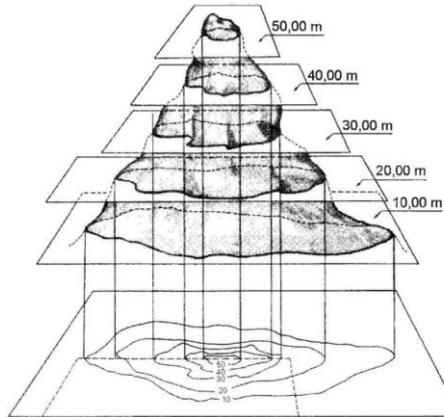
Pensando nisso, que a proposta desta atividade se realiza. A busca por uma metodologia diversificada nas aulas de Cálculo II, de forma que os estudantes possam participar e ser ativos no processo de construção do conhecimento.

3 CURVAS DE NÍVEL

No estudo das funções utilizam-se diagramas de setas e gráficos para visualizar seu comportamento. Mas pode-se também utilizar mapas de contornos, cujos pontos com elevações constantes são ligados para formar curvas de contorno, as quais também se denominam curvas de nível.

Uma curva de nível é o lugar geométrico dos pontos de uma superfície que estão à mesma altitude, como mostrado na figura 1 a seguir. O seu estudo pode esclarecer as características dos acidentes do relevo de um terreno, permitindo analisar as elevações ou depressões existentes.

Figura 1 – Exemplo de curvas de nível



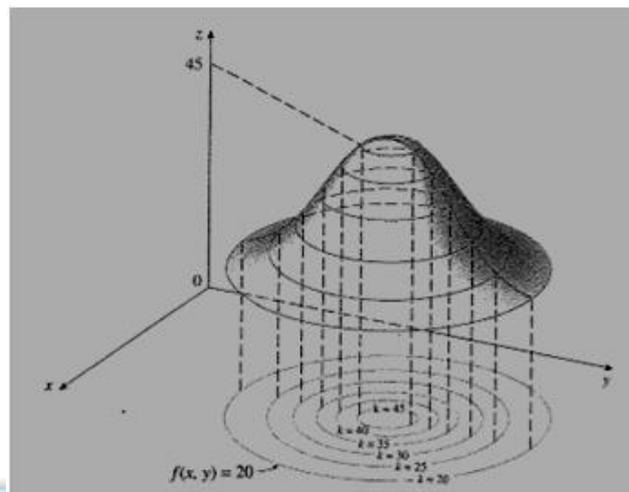
Fonte: ACTIVIDADES em La Naturaleza (2018)

Temos com características das curvas de nível: são linhas que ligam pontos da mesma altitude em relação à superfície do terreno, os intervalos entre as curvas de nível equivalem à diferença de altitude entre duas curvas consecutivas; e o intervalo entre curvas deve ser constante na mesma representação gráfica. Sobre o intervalo entre as curvas de nível devemos ressaltar que o intervalo escolhido depende de cada trabalho com base em dois fatores importantes: a escala da planta e a declividade ou sinuosidade do terreno.

Segundo Stewart (2007), matematicamente uma curva de nível é uma função $f(x, y) = k$, de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k , isto é, as curvas de nível nos mostra onde o gráfico de f tem a altura k .

Na figura 2 a seguir é possível visualizar a relação entre as curvas de nível e os traços horizontais. As curvas de nível da função f são traços horizontais do gráfico desta função no plano horizontal $z = k$ projetado sobre o plano xy . Assim, ao traçar as curvas de nível de f e observá-las elevadas para a superfície na altura k , pode-se se ter uma ideia do gráfico da função cruzando as duas informações. Assim, pode-se perceber que a superfície será mais inclinada onde as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras e aproximadamente planas onde as curvas de nível estão mais distantes umas das outras.

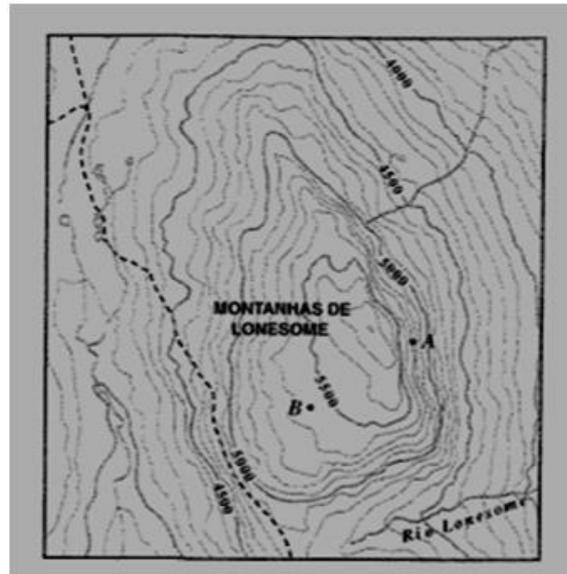
Figura 2 – Exemplo de curvas de nível



Fonte: Stewart (2007)

Um exemplo muito comum de curvas de nível é utilizado na construção de mapas topográficos de regiões montanhosas, como sugere a figura 3 a seguir.

Figura 3 – Curvas de nível de uma região montanhosa

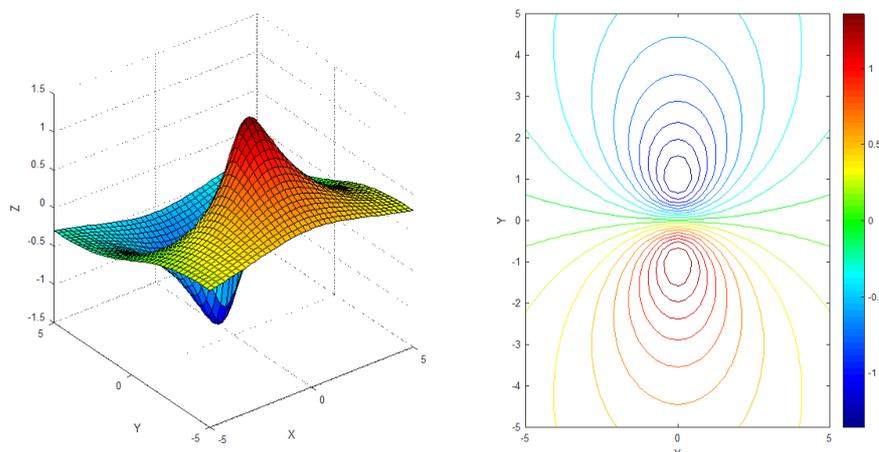


Fonte: Stewart (2007)

As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante. Para exemplificar, se uma pessoa caminhar sobre um desses contornos, não “subirá” nem “descerá”, ou seja, permanecerá na mesma altitude. A figura 4 apresentada a seguir mostra as curvas de nível e o gráfico da função $f(x, y) = \sin(x) * \sin(y)$, gerados através do programa computacional MATLAB^{®1}.

Pode-se notar que as curvas de nível apresentadas no gráfico da direita (bidimensional) estão aglomeradas perto da origem, e isto corresponde, no gráfico da esquerda (tridimensional), uma mudança de inclinação muito acentuada. As curvas de nível podem auxiliar na visualização da função e nos dar uma ideia melhor de suas características e comportamento, uma vez que o esboço do gráfico no domínio tridimensional (R3) muitas vezes não é tão simples quanto no domínio bidimensional (R2).

Figura 4 – Curvas de nível e gráfico de uma função



¹ MATLAB[®] é marca registrada da The MathWorks, Inc.

Fonte: Stewart (2007)

A partir desta compreensão referente ao conceito das curvas de nível, segue relato da atividade desenvolvida.

4 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

A seguir está descrita a atividade que foi desenvolvida na disciplina de Cálculo II para estudantes dos seguintes cursos:

- Engenharia Civil, turno diurno (turmas A e B);
- Engenharia Civil, turno noturno (turma única);
- Engenharia de Produção, turno diurno (turma única);
- Engenharia da Computação, turno diurno (turma única);
- Engenharia de Controle e Automação, turno noturno (turma única).

A atividade foi realizada em duplas ou trios e os seguintes materiais foram solicitados previamente:

- Duas porções de cores diferentes de massa de modelar;
- Palitos de sorvete;
- Linha de costura;
- Régua.

O primeiro passo foi construir com a massa de modelar dois tipos de montanha, sendo que uma delas com um pico mais acentuado. Em seguida, cada equipe marcou nos palitos de sorvete, com a ajuda de uma régua, intervalos de 1,5 cm. O próximo passo foi fazer cortes na montanha, começando na parte inferior e indo de baixo para cima, respeitando os intervalos de 1,5 em 1,5 centímetros (uma dica útil: segurar a massa caso o relevo ameace desmoronar durante o corte).

Figura 5 – Construção das curvas de nível usando massa de modelar



Organização:

Realização:

Fonte: Autores (2018)

Figura 6 – Construção das curvas de nível usando massa de modelar



Fonte: Autores (2018)

Para finalizar, cada equipe desenhou os cortes em seu caderno, mediu a altura dos picos (ou vales) que se encontravam entre os cortes, marcou os picos e vales com um “x” e identificou a altura de cada curva. Os passos realizados para a atividade podem ser observados nas figuras 5 e 6.

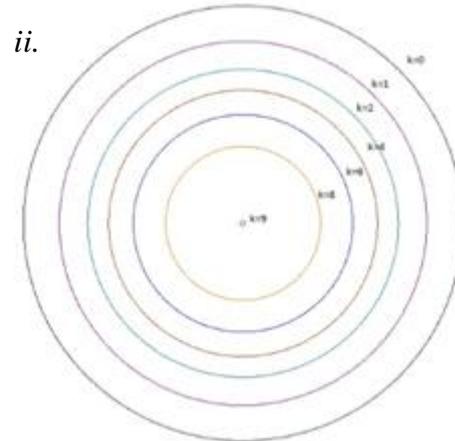
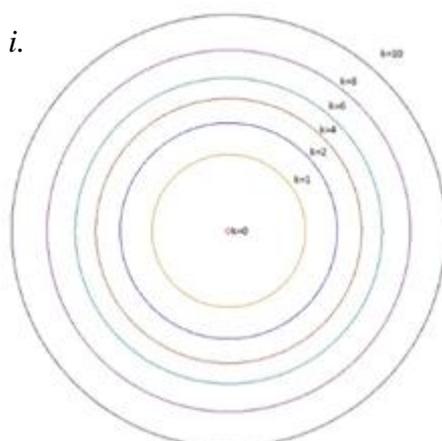
Depois da realização desta fase inicial com o uso das massas de modelar, os estudantes foram submetidos a um questionário, descrito a seguir.

4.1 Questionário aplicado aos estudantes no final da atividade

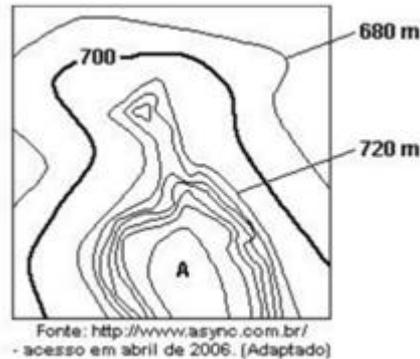
A seguir está detalhado o questionário que foi submetido aos estudantes depois de terem concluído a atividade prática com o uso da massa de modelar.

1. Responda as seguintes questões:

- O que indicam as curvas de nível consecutivas muito afastadas? E as muito próximas?
- É possível as curvas de nível se cruzarem? Em caso afirmativo, dê um exemplo.
- A partir das curvas de nível dadas construa com a massa de modelar a sua superfície correspondente.



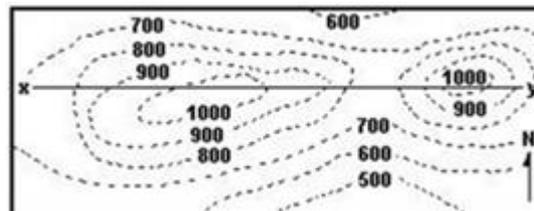
2. O mapa topográfico contém informações de relevo, codificadas em curvas de nível, dispostas de forma mais ou menos concêntricas, conforme a representação cartográfica abaixo.



A partir das informações contidas na figura, é possível afirmar que no local assinalado pela letra A, temos:

(a) uma depressão. (b) as maiores altitudes. (c) uma depressão e um lago. (d) um rio.

3. Considerando a figura a seguir, que representa esquematicamente uma região da superfície terrestre por meio de curvas de nível e onde estão situadas as localidades x e y, é correto afirmar:



(a) A área que está representada é uma planície em que o desnível topográfico não ultrapassa 100 metros.

(b) Os pontos mais baixos da área representada na figura estão na porção norte.

(c) As altitudes máximas da área estão representadas pela curva de nível de 1.000 metros.

(d) Entre as localidades x e y existem duas elevações, separadas por uma área mais baixa com altitude inferior a 600 metros.

(e) As curvas de nível apenas representam os desníveis do terreno.

4. Formalizando o conceito de Curva de Nível:

Definição:

Uma curva de Nível C_k , de uma função $z = f(x,y)$ é o conjunto de todos os pontos $(x,y) \in D_f$ tais que $f(x,y) = k$, em que $k \in \mathbb{R}$ (na imagem de f).

Uma curva de nível $f(x,y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio da f nos quais o valor de f é k , em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k .

As curvas de nível $f(x,y) = k$ são apenas traços do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetado sobre o plano xy . Assim, se você traçar as curvas de nível da função e visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada poderá imaginar o gráfico da função (STEWART, 2007).

Observação: O gráfico de f é um subconjunto de R^3 . Uma curva de nível é um subconjunto do domínio da f , portanto R^2 .

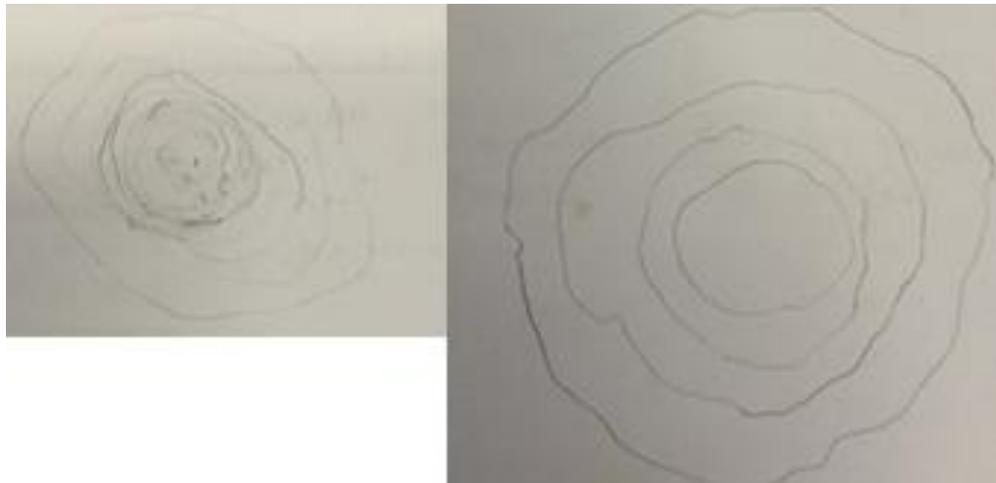
5. Pensando agora pela definição matemática de curva de nível, são possíveis curvas de nível se cruzarem? Justifique sua resposta.

6. Para encerrar a atividade, foram dadas algumas funções para que os alunos pudessem desenhar suas curvas de nível.

4.2 Resultados obtidos

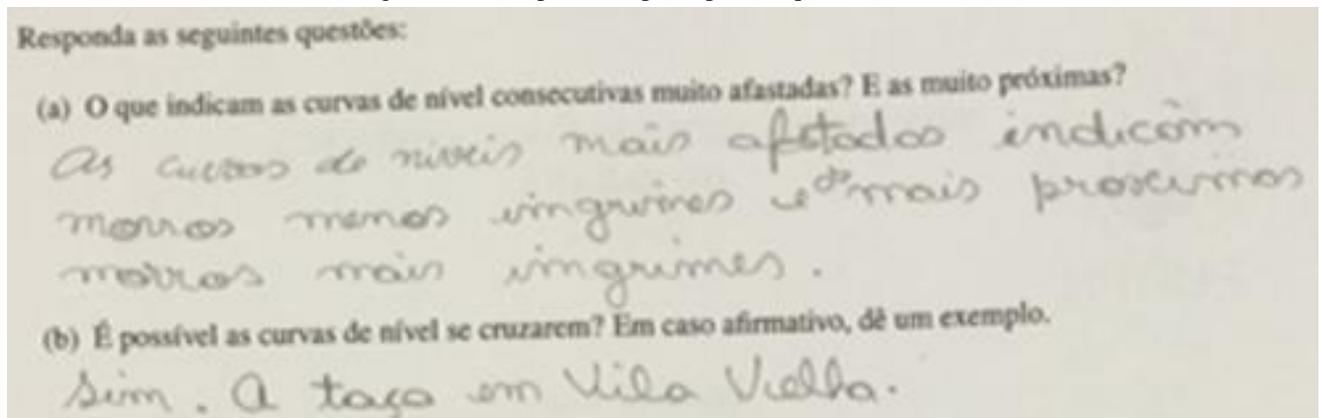
A seguir as figuras 7 a 9 evidenciam alguns exemplos das respostas apresentadas pelos estudantes durante a realização da atividade. Houve inicialmente uma conversa em pares e depois cada equipe expôs a sua resolução para a turma, para que houvesse uma discussão envolvendo todos os estudantes. A partir deste debate foi possível extrair uma conclusão sobre cada uma dos exercícios.

Figura 7 – Exemplo de desenho da curva de nível das montanhas modeladas por uma equipe



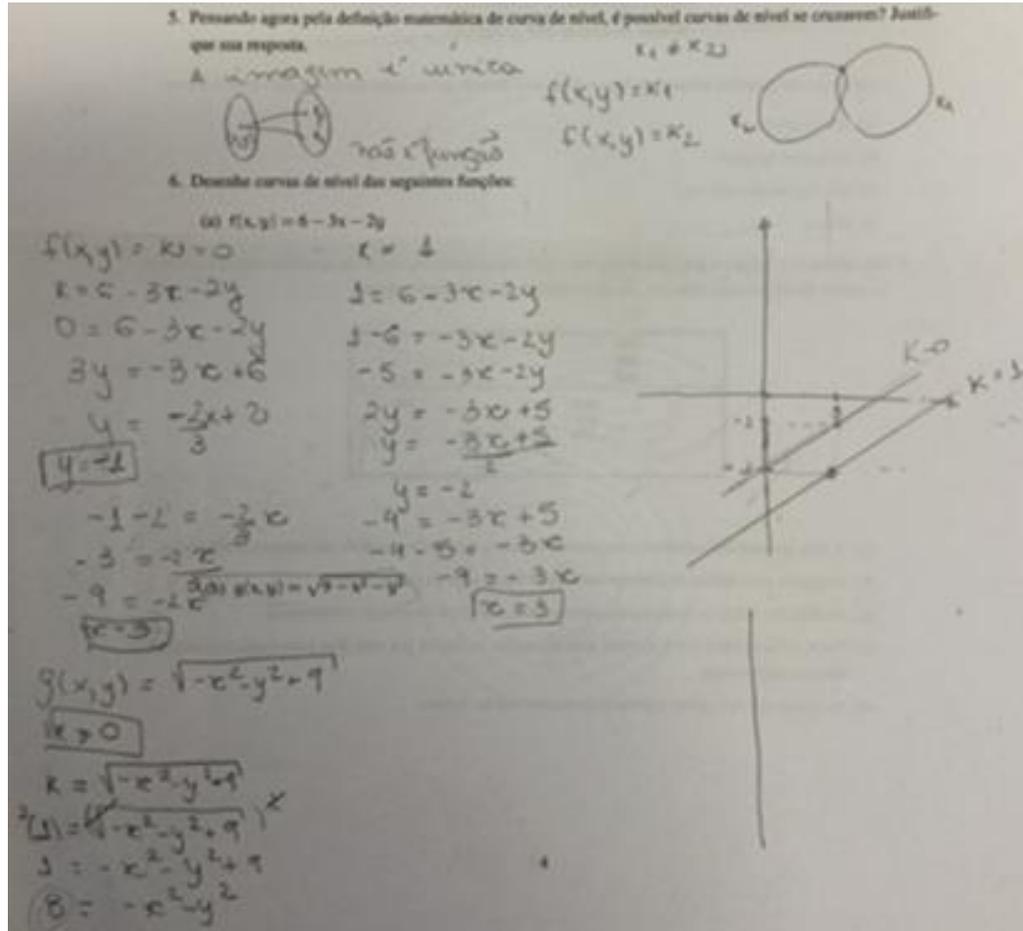
Fonte: Autores (2018)

Figura 8 – Exemplo de resposta para as questões 1a e 1b



Fonte: Autores (2018)

Figura 9 – Exemplo de resposta para as questões 5 e 6



Fonte: Autores (2018)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi discutido anteriormente, propor atividades em que a participação dos estudantes seja estimulada, em situações onde é oferecida a possibilidade deles serem os protagonistas da construção do conhecimento, faz com que o interesse pela aula aumente significativamente. Através desta atividade, onde os estudantes estiveram 100% do tempo de aula ativos, foi possível constatar que o comprometimento e o envolvimento é muito maior do que quando há muita interferência do professor. Quando o estudante entra em contato com a prática antes da teoria seu interesse em formalizá-la aumenta, pois ele percebe inicialmente a necessidade do conteúdo.

Outro ponto fundamental foi a escolha do tema, pois trata de um assunto de base para o desenvolvimento da disciplina de Cálculo II. Nos semestres anteriores os estudantes tiveram dificuldade de visualizar o que são as curvas de nível e por conta disso, as dúvidas e dificuldades na compreensão dos assuntos seguintes se tornaram cada vez maiores. Por outro lado, depois que essa atividade foi realizada, percebeu-se que quando fora necessário relembrar o conceito de curva de nível, rapidamente os estudantes lembraram.

Sendo assim, reforça-se a necessidade de buscar novas formas de metodologias ativas para que o estudante seja o principal autor no seu processo de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ATIVIDADES em La Naturaleza. Disponível em: <https://sites.google.com/site/atividadesenlanaturaleza/curvas-de-nivel>. Acesso em: 10 mai. 2018.

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**. Porto Alegre: Bookman, 2000.

SOUZA, C. A. e MORALES, O. E. T. **Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. Vol. II**. PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: <http://www.youblisher.com/p/1121724-Colecao-Midias-Contemporaneas-Convergencias-Midiaticas-Educacao-e-Cidadania-aproximacoes-jovens-Volume-II>. Acesso em 10 mai. 2018.

STEWART, J. **Cálculo Volume 2**. São Paulo: Editora Thomson, 2007.

THE USE OF MODELING CLAY FOR THE UNDERSTANDING OF THE CONCEPT OF LEVEL CURVES

Abstract: *In this paper we are exploring a mathematical concept usually addressed in the discipline of Calculus II, the Level Curve, through manipulable materials. In this case, we chose a very popular children's toy: the modeling clay. It is reported the concept, detailed the activity developed and presented some of the results obtained in the classroom. This activity was carried out in the engineering classes of the Polytechnic School of the Pontifical Catholic University of Paraná and had as reference the multimedia material Professor's Guide produced by Unicamp. When working with the manipulation of mathematical contents, from the perspective of Active Methodologies, it is possible for students to explore their capacity for generalization, abstraction and analysis of the properties that exist in many natural phenomena or even created by man. This all allows students to satisfactorily understand the subject of study. The intention was to seek differentiated and more attractive way to introduce this theme (level curves) in engineering teaching classes. The books used in higher education are still very traditional with a focus on definitions and techniques, usually with the help of computer programs, but it still treat as if the student had already learned it. It is concluded that if the student has the opportunity to work with different forms of presentation and manipulation of the subject, he / she will obtain greater understanding and appropriation of the proposed content, and thus, make their own analyzes and constructions*

Key-words: *Active methodologies. Engineering teaching. Calculus. Curves of level. Modeling clay.*