ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO COM UMA VARIÁVEL REAL

ECKL, Wilson C. – wilsoncarlose@gmail.com
Universidade Regional de Blumenau – FURB
Campus 1 – Rua Antônio da Veiga, 140 – Itoupava Seca
CEP 89012 – 000 – Blumenau – Santa Catarina

BAIER, Tânia – taniabaier@gmail.com

Resumo: *Neste artigo inicialmente são apresentados aspectos históricos da criação da área da matemática hoje denominada Cálculo Diferencial e Integral focando as dificuldades encontradas por importantes cientistas nas justificativas formais dos métodos por eles criados. Em seguida, é apresentado o conceito de obstáculo da experiência primeira segundo Gáston Bachelard e são abordados temas relacionados com a utilização de tecnologias no mundo da educação. Considerando as dificuldades encontradas pelos estudantes particularmente no entendimento de limite de uma função, um conceito fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, e refletindo sobre a prática docente na busca de alternativas pedagógicas, no texto são apresentadas atividades didáticas que podem contribuir para o entendimento do conceito de limite de uma função com uma variável real.*

Palavras-chave: *Limite de uma função. Obstáculos Epistemológicos. Estratégia pedagógica.*

1 INTRODUÇÃO

No decorrer da vivência[1] como docentes no ensino superior, mais especificamente ministrando aulas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) em cursos de graduação em Engenharia, observamos dificuldades apresentadas pelos estudantes com relação aos temas abordados nessa disciplina, constatando que uma pequena parcela dos estudantes consegue entender os conceitos fundamentais, principalmente a definição de *limite de uma função com uma variável real*. Nesse contexto, considerando as dificuldades dos estudantes e refletindo sobre a prática docente na busca de alternativas pedagógicas, surge o questionamento: quais atividades didáticas podem contribuir para o ensino do conceito de *limite de uma função com uma variável real*?

O objetivo que focamos é o de apresentar uma proposta de atividades didáticas para ser usada no ensino de *limite de uma função com uma variável real*. No sentido de alcançar o objetivo proposto, apresentamos o suporte teórico constituído por tópicos de História da Matemática enfatizando obstáculos encontrados pelos cientistas no decorrer da criação da área da Matemática hoje denominada Cálculo Diferencial e Integral. Apresentamos o conceito de *obstáculo da experiência primeira* segundo Gáston Bachelard e abordamos temas relacionados

[1] Vivência profissional dos autores deste artigo.

com a utilização de tecnologias no mundo da educação. Finalizamos apresentando uma proposta de atividades didáticas para o ensino do conceito de *limite de uma função com uma variável real*.

2 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: ASPECTOS HISTÓRICOS, OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS

Iniciamos apresentando os aspectos históricos da criação do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), mostrando algumas das dificuldades encontradas por cientistas no desenvolvimento de novos ramos da Matemática e descrevendo em seguida os obstáculos epistemológicos conforme Gáston Bachelard, enfocando o obstáculo da *experiência* primeira, e trazendo reflexões de pesquisadores que tratam sobre o uso de tecnologias na educação.

2.1 Criação do Cálculo Diferencial e Integral

No texto, estão descritos alguns aspectos históricos da criação do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), partindo de Zenão de Eléia, cerca de 450 a.C., que ficou conhecido por seus paradoxos em relação aos conhecimentos antigos sobre os infinitesimais (EVES, 1995). Kirk, Raven e Schofield (2010, p. 278, grifo do autor) reescreveram fragmentos de Empédocles traduzindo para a língua inglesa. No texto a seguir transcrito, fragmento 315, esses autores apresentam o entendimento de Zenão:

> 315 Ao demonstrar, uma vez mais, que, se há muitas coisas, estas mesmas são limitadas e ilimitadas, Zenão escreve textualmente o seguinte:
>
> «Se há muitas coisas, força é que elas sejam tantas quantas existem, e nem mais nem menos do que estas. Mas se são tantas quantas existem, terão de ser limitadas.
>
> «Se há muitas coisas, são ilimitadas as coisas existentes; pois há sempre outras entre as coisas que existem, e de novo outras no meio delas. E assim as coisas que existem são ilimitadas.»

Os paradoxos de Zenão geraram conflitos no pensamento grego antigo. Retomados e enunciados por Aristóteles, um deles é suficiente para explicitar o raciocínio utilizado por Zenão, o *paradoxo de Aquiles*, que sustenta a ideia de que o movimento é impossível, devido à sudivisão infinita do espaço e do tempo. Aquiles aposta corrida com uma tartaruga, sendo que a mesma sai com determinada distância de vantagem e, a cada movimento de Aquiles, ela sempre estará à frente dele, pois no instante que ele alcançar o ponto onde ela estava, a mesma já terá avançado um pouco mais (BOYER, 1974).

Os argumentos utilizados por Zenão entraram em conflito com o pensamento vigente naquela época e geraram uma crise na matemática grega, a qual evidenciou o pensamento em torno do problema dos infinitesimais e dos incomensuráveis. O período de crise estende-se por dimensões políticas, econômicas e sociais, gerando novas características à história da Grécia. Entre a concentração de riquezas para classes dominantes e o aumento da miséria e insegurança dos pobres, alguns pensadores, como Platão e Aristóteles, ocupavam-se estudando filosofia e ética.

A Academia de Platão contou com alguns matemáticos que viveram por volta de 360 a.C., sendo Eudoxo um deles. O método da exaustão de Eudoxo é considerado a resposta da escola platônica para Zenão, tendo como base a lógica formal e evitando as dificuldades dos infinitesimais, enfrentando uma crise resultante do incomensurável (EVES, 1995).

Outro pensador, considerado o maior matemático da antiguidade, foi Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C). Recebeu tal honraria devido à grande quantidade de problemas matemáticos que resolveu, tendo em vista a complexidade de tais problemas e a formulação matemática que utilizou para resolvê-los. A solução para o problema da quadratura da parábola foi uma descoberta de Arquimedes, enunciada como a área do segmento parabólico, é quatro terços da área do triângulo com a mesma base e mesmo vértice (BOYER, 1992).

A matemática antiga, relacionada à criação do CDI, finda-se basicamente nos estudos deixados por Arquimedes e cessa seu desenvolvimento por mais de mil e quinhentos anos, ressurgindo no final do século XVI e início do século XVII com estudos sobre a Geometria Analítica, área da Matemática que segue seu desenvolvimento junto com o Cálculo. Desse período em diante, aparecem vários outros matemáticos, entre eles, John Wallis (1616–1703) e Isaac Barrow (1630–1677), predecessores dos estudos de Isaac Newton, na Inglaterra. Um dos trabalhos de Wallis foi a demonstração da área de um triângulo por uma composição de infinitos paralelogramos, formando uma progressão aritmética de infinitos termos que, somados, resultam exatamente na área da figura descrita, tendo ainda sugerido o uso do símbolo para representar infinito (∞) pela primeira vez na história. Do mesmo modo que Wallis deu suas contribuições para o Cálculo, outro extraordinário pensador foi Isaac Barrow, que criou um método para determinação de tangentes a curvas pelo uso do *triângulo diferencial*, às vezes chamado *triângulo de Barrow*, atualmente conhecido como derivadas (BOYER, 1992).

De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008), sobre o método criado tanto por Newton como por Leibniz:

> No fim dos anos 1660, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), independentemente, descobriram um tal método. Na verdade, descobriram dois métodos ligeiramente diferentes. A abordagem de Newton enfatizava o que ele chamava de "quantidades fluentes" e suas taxas de fluxo, que ele chamava "fluxões". A de Leibniz usava a ideia de "infinitésimos" ou quantidades infinitamente pequenas. (BERLINGOFF; GOUVEA, 2008, p.43, grifo dos autores)

A teoria das fluxões, de Newton, recebeu críticas severas do bispo Berkeley, em 1734, devido às confusões geradas pela dificuldade de compreensão da mesma. Leibniz, assim como Newton, também foi alvo de críticas devido às imprecisões em seus resultados sobre os estudos de diferenciais, tendo como um de seus opositores o matemático Bernard Nieuwentijt. Influenciado por Huygens e pelo estudo de Descartes e Pascal, e ainda, estimulado por rumores de que Newton era possuidor de determinado método para o Cálculo Infinitesimal, Leibniz encontrou o seu novo método entre 1673 e 1676. Leibniz escreveu menos que Newton, mas, ao contrário deste, publicou rapidamente seus feitos, sendo que o inglês chegou antes à invenção do Cálculo, no entanto, o alemão publicou primeiro (EVES, 1995).

Newton e Leibniz foram os nomes que marcaram a história do Cálculo, mesmo não tendo entendimento pleno do que estavam inventando, mas expondo conhecimento sobre o assunto, conseguiram mostrar a aplicabilidade do cálculo, devido aos métodos que desenvolveram. No século XIX a Matemática passa por inúmeros avanços, o Cálculo começa a ganhar maior rigor demonstrativo e surgem termos e símbolos utilizados até os dias atuais. O rigor da apresentação moderna e formal do conceito de *limite* tem seu início com o matemático Augustin Louis Cauchy (1789–1857), deixando importantes contribuições para a formalização rigorosa do

Cálculo Diferencial e Integral que, mesmo carentes de precisão, já ofereciam melhor entendimento. No entanto, é com Karl Weierstrass (1815-1897) que o conceito de limite é esclarecido com forma e rigor definitivos (BOYER, 1992).

Esta breve visão histórica mostra as dificuldades na construção da definição formal de *limite da uma função f(x)*, encontradas pelos criadores do CDI. Considerando que acadêmicos, na atualidade, encontram dificuldade no entendimento dos conceitos de Cálculo, a seguir, são tecidas considerações sobre obstáculos epistemológicos conforme Gáston Bachelard.

2.2 Obstáculos epistemológicos segundo Gáston Bachelard

As reflexões de Bachelard (1996) relacionam a história do pensamento científico com a formação individual do espírito científico, propondo a passagem por três estados, o *estado concreto*, o *estado concreto-abstrato* e o *estado abstrato*, os quais iniciam do entendimento essencialmente natural de fenômenos observados, onde se apresenta um apego de crença por uma generalização através da imagem do funcionamento das coisas, passando pelo estado onde são atribuídos esquemas geométricos aos fenômenos observados, o que não torna o espírito livre de algum possível paradoxo, mas fornece uma certa segurança de um entendimento um pouco mais sensível, e finalmente chegando ao estado em que o espírito se desliga de modo intrigante da primeira experiência, por esta ser sempre impura e informe (BACHELARD, 1996).

Interpretar um objeto ou algum fenômeno, puramente pela simples opinião, representa o obstáculo da experiência primeira, que Bachelard (1996, p.18) apresenta do seguinte modo:

> A ciência, tanto por sua necessidade de coroamento como por princípio, opõe-se absolutamente à opinião. Se, em determinada questão, ela legitimar a opinião, é por motivos diversos daqueles que dão origem à opinião; de modo que a opinião está, de direito, sempre errada. A opinião *pensa* mal; não *pensa: traduz* necessidades em conhecimentos. Ao designar os objetos pela utilidade, ela se impede de conhecê-los. Não se pode basear nada na opinião: antes de tudo, é preciso destruí-la. Ela é o primeiro obstáculo a ser superado.

Bachelard (1006) explica que o espírito humano tende a ser repetitivo e usar o que lhe parece mais claro, com maior frequência. A observação primeira é concreta, composta por um repertório de imagens já formuladas, carregadas de ideias pré-definidas que tendem a explicar o que está sendo observado, de modo fácil, dando a falsa impressão de ter compreendido por completo. No entanto, os obstáculos epistemológicos podem ser vencidos, apresentando como um conhecimento está interligado com o outro (BACHELARD, 1996).

Faria, Simões e Trindade (2013) afirmam que os processos de ensino devem ter como objetivo didático a superação de obstáculos de aprendizagem e, para compreender a resistência da parte dos estudantes e a sua dificuldade na superação de obstáculos, apresentam a explicação de Astolfi (1994)[2], o qual analisa que a ocorrência de obstáculos não se dá de modo isolado, mas sim, imbricados em uma rede de diversos obstáculos sendo que tal entendimento contribui para que seja possibilitado, na sala de aula, o entendimento dos conceitos científicos escolares (FARIA; SIMÕES;TRINDADE, 2013).

---

[2] ASTOLFI, J. P. **El trabajo didáctico de los obstáculos, en el corazón de los aprendizajes científicos. Enseñanza de las Ciencias**. v. 12, n.2, Barcelona/Valencia, 1994.

No que se refere à criação de situações didáticas amparadas na ideia de objetivo-obstáculo, Astolfi (1993, 1994)[3], "sugere quatro etapas que não necessitam serem seguidas nesta ordem: a identificação, a fissuração, a superação e a automatização" (ASTOLFI, 1993, 1994, apud FARIAS; SIMÕE; TRINDADE, 2013, p.124).

A primeira etapa refere-se à identificação do obstáculo, manifestado por meio das representações dos estudantes. Pretende-se então que eles as expressem de forma escrita ou gráfica, visando a tomada de consciência de seu sistema de funcionamento intelectual. A identificação é um preâmbulo indispensável para se trabalhar didaticamente o obstáculo. Ela faz parte da preparação das aulas e do processo didático, mas não o caracteriza por completo. A segunda etapa é a fissuração do obstáculo, em que ocorre a desestabilização das representações e explicações dos estudantes devido ao estabelecimento de um conflito inicial sociocognitivo na procura da convergência de ideias. Na terceira etapa ocorre a superação do obstáculo. Portanto, após a desestabilização, o indivíduo se encontra com um novo modelo representativo, possibilitando a resolução do problema a ser resolvido e, em seguida, procura aplicar esse modelo a situações diferentes, e, assim, realizando a superação do obstáculo. Na quarta etapa ocorre a automatização do novo modelo, descrito como uma alternativa conceitual que serve de instrumento aplicado a outras situações (FARIA; SIMÕES;TRINDADE, 2013).

As investigações sobre identificação e superação de obstáculos epistemológicos ocorreram no decorrer da história da criação do CDI, por exemplo, quando mentes geniais encontraram dificuldade na definição formal do que hoje conhecemos como *limite de uma função*, e continuam a ser realizadas na contemporaneidade. Os educadores refletem continuamente sobre a superação dos obstáculos no ensino e na aprendizagem de temas curriculares, e uma das possibilidades é a utilização de recursos tecnológicos diferenciados.

2.3 Recursos tecnológicos na educação

Na busca de entender o que é ciência, pode-se afirmar, de fato, que essa é obra resultante dos últimos trezentos anos da história da humanidade. Foi por volta de 1660, na Europa Ocidental, que se estabeleceu uma nova forma de vida em sociedade, baseada na exploração do comércio e da indústria, buscando formas diferentes do entendimento medieval de mundo, que era passivo e simbólico, pautado na interpretação do conhecimento como obra do Criador. A ciência passa a ser obra da atividade humana resultante da criação e operação de novos instrumentos utilizados para navegação, passando da máquina à vapor para a eletricidade, e avançando para os estados intermutáveis da matéria e energia, da ciência da certeza à ciência da probabilidade (MATTAR NETO, 2003).

Junto com a história do conhecimento humano e a evolução científica, encontra-se a criação e o desenvolvimento do ensino universitário, como apresenta Mattar Neto (2003). Nas primeiras universidades eram ensinados conhecimentos como as artes liberais: gramática, retórica, dialética, aritmética, música, astronomia e geometria; a ciência sagrada; e disciplinas práticas como o direito e a medicina. Por volta do século XV aparecem as bibliotecas universitárias, a quantidade de estudantes universitários começa a aumentar expressivamente, ocasionando a diversificação de modelos universitários, dando espaço para a criação de novos tipos de instituições de saber, como academias e escolas profissionalizantes. Nos próximos séculos, em diferentes localidades do ocidente e do oriente, as universidades vão aparecendo, como reflexo

---

[3] ________. **Los Obstáculos para El Aprendizaje de Conceptos en Ciencias: La forma de fraquearlos didácticamente**. In: PALÁCIOS, C.; ANSOLEAGA, D.; AJO, A. (Org.). Diez anos de investigación e innovación en enseñanza de lãs ciências. Madrid, 1993.

do desenvolvimento econômico, social e político de suas localizações. Surgem inúmeras transformações e reorganizações do ensino universitário pelo mundo, abrindo espaço para o aparecimento de uma tendência educacional tecnicista, principalmente nos Estados Unidos, apostando alto no uso de novas técnicas e instrumentos de aprendizagem (MATTAR NETO, 2003).

A educação de modo geral e o ensino universitário iniciam um período de transformação incomum, a sociedade e suas estruturas organizacionais dependem cada vez mais da comunicação, seja essa oral, escrita, impressa ou eletrônica. No ano de 1960, é desenvolvida a *Arpanet*, pelo Departamento de Defesa Norte-Americano, com o objetivo de resistir a guerras nucleares ou grandes desastres, logo recebe o nome de *Internet* e passa a conectar universidades e laboratórios, sendo utilizada para pesquisas acadêmicas somente a partir da década de 1980. Em seguida, a história das tecnologias da informação aplicadas à educação alcança um momento de realização de treinamentos por meio de *softwares*, agregando melhores possibilidades ao sistema tradicional de ensino (MATTAR NETO, 2003).

Atualmente, os recursos pedagógicos mais utilizados são o quadro e o giz e os conteúdos matemáticos são frequentemente abordados de maneira mecânica sem um aprofundamento dos conceitos teóricos, o que é um desafio e uma oportunidade para aplicar mudanças pedagógicas, tornando as informações parte do referencial do estudante. Então, é fundamental inovar na dinâmica de sala de aula, variando de técnicas e métodos para a criação e evolução de hábitos de aprendizagem (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2013).

As mudanças constantes no mundo e a evolução da tecnologia atingem diretamente a ação do professor em sala de aula e também a forma com a qual os estudantes aprendem. Portanto, o professor deve refletir e entender que concepções os estudantes possuem em relação aos conhecimentos a serem estudados, para elaborar estratégias pedagógicas que auxiliem na aprendizagem. Desse modo, foram organizadas atividades didáticas que podem auxiliar no ensino do conceito de *limite de uma função com uma variável real*.

3 PROPOSTA DE ATIVIDADES DIDÁTICAS

Apresentamos a seguir quatro atividades pedagógicas e as considerações didáticas para sua aplicação, como uma proposta para o ensino do conceito de *limite de uma função de uma variável real*.

3.1 Atividade 1: entendimento inicial da palavra *limite*

A primeira atividade proposta contempla o questionamento: "O que você entende por *limite*?". O objetivo é conhecer os significados atribuídos pelos estudantes para a palavra *limite*, e indica-se que a atividade seja entregue impressa em uma folha de papel, contendo o enunciado da questão e que seja realizada no início da primeira aula em que é abordado o tema *limite de uma função*, individualmente e sem forma alguma de pesquisa. Assim poderá ser conhecido o entendimento primeiro que os estudantes possuem da palavra *limite*.

3.2 Atividade 2: noção intuitiva e limites laterais

A segunda atividade proposta pode ser divida em duas partes, sendo a primeira, a apresentação de uma noção intuitiva de *limite* de uma sequência numérica, como mostra-se a seguir:

Quadro 1 – Parte 1: Noção intuitiva do *limite* de uma sequência numérica.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Noção intuitiva do *limite* de uma sequência numérica:

Observe os seguintes exemplos de sucessões numéricas**:**

(a) **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...**

Os termos desta sucessão tornam-se cada vez maiores sem atingir um ***limite*** dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encontrar um termo maior na sucessão. Os termos desta sucessão **tendem para o infinito** e o ***limite*** da sucessão é infinito. Indica-se: $x \rightarrow +\infty$ (x tende para $+\infty$).

(b) $\mathbf{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} ...}$

Nesta sucessão os termos decrescem e aproximam-se cada vez mais do valor 0, sem nunca atingir esse valor. Indica-se: $x \rightarrow 0$ (x tende para zero).

(c) **1, 0, –1, –2, –3, –4 ...**

Os termos desta sucessão decrescem infinitamente. Indica-se: $x \rightarrow -\infty$ (x tende para $-\infty$).

Fonte: ECKL, BAIER, 2018.

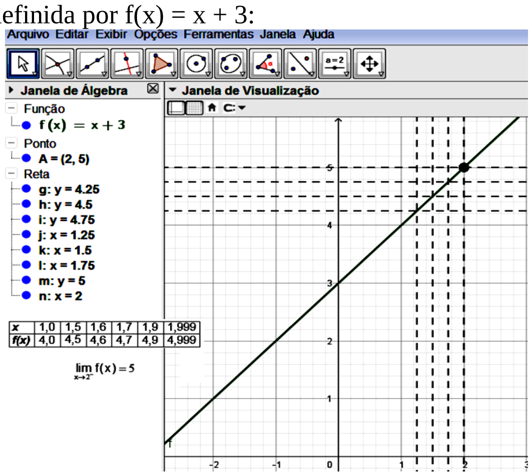
Na Parte 2 explana-se sobre a construção das tabelas de aproximações e dos gráficos, para analisar o comportamento da função em um determinado ponto de existência, ou seja, o *limite da função* quando *x* tende para um valor numérico de real. Sugere-se que a atividade seja entregue impressa, primeiramente, já resolvida, para que os estudantes possam fazer suas anotações enquanto acompanham as explanações do professor sobre os conteúdos.

Quadro 2 – Parte 2: Conceito intuitivo do *limite* de uma função.

Conceito intuitivo do limite de uma função:

Exemplo 1 – análise por valores menores.

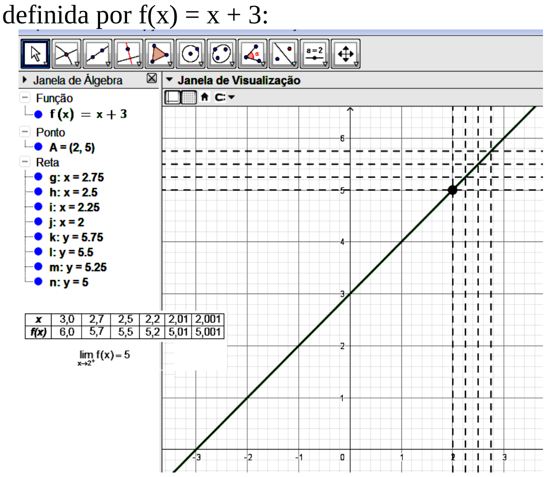
Observe o gráfico da função f: IR→ IR, definida por f(x) = x + 3:



Neste exemplo temos $\lim_{x\to 2^-} f(x)=5$.

Exemplo 2 – Análise por valores maiores.

Observe o gráfico da função f: IR→ IR, definida por f(x) = x + 3:



Neste exemplo temos $\lim_{x\to 2^+} f(x)=5$.

Pode-se perceber então, que teremos $\lim_{x\to 2} f(x)=5$, ou seja, os *limites* laterais são iguais. Quando os *limites* laterais são iguais dizemos que existe o *limite* da função, neste exemplo representado por $\lim_{x\to 2} f(x)=5$.

Fonte: ECKL, BAIER, 2018.

Em um segundo momento, entrega-se a atividade impressa, mas sem a resolução, para que os estudantes realizem a tarefa sozinhos, sob a supervisão do professor. Recomenda-se que os estudantes tragam materiais como lápis, papel, régua e calculadora, para preencher tabelas e construir os gráficos do comportamento lateral do *limite da função*.

3.3 Atividade 3: tabelamentos e o gráfico das retas secantes

A terceira atividade proposta, refere-se ao processo de construção do conceito de derivada através da utilização da definição de *limite de uma função com uma variável real*, e contempla quatro etapas, apresentadas a seguir:

Quadro 3 – Etapas da Atividade 3: Tabelas de tendência e gráfico das retas secantes.

Etapa 1 – Dada a função $y = 0{,}5x^2 – 2x + 3$, que também pode ser escrita como $f(x) = 0{,}5x^2 – 2x + 3$, complete a seguinte tabela calculando os valores de y:

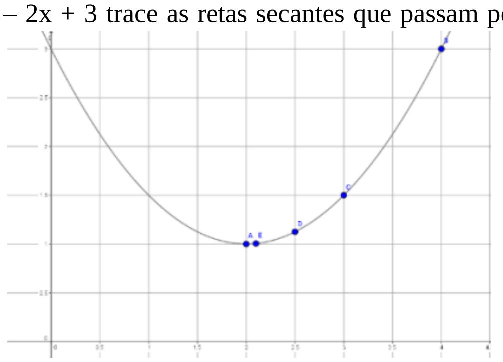
x	4	3	2,5	2,1	2,01	2,001
$y = 0{,}5x^2 – 2x + 3$						

Etapa 2 – Preencha a tabela abaixo para encontrar o coeficiente angular das retas secantes ao gráfico de $y = 0{,}5x^2 – 2x + 3$ que passam pelos pontos indicados:

(x_1,y_1)	(x_2,y_2)	$\Delta y = y_2 – y_1$	$\Delta x = x_2 – x_1$	$a = \Delta y/\Delta x$
(2,1)	(4 ; 3)			
(2,1)	(3 ; 1,5)			
(2,1)	(2,5 ; 1,125)			
(2,1)	(2,1 ; 1,005)			
(2,1)	(2,01 ; 1,00005)			
(2,1)	(2,001 ; 1,0000005)			

Etapa 3 – Dado o gráfico de $y = 0{,}5x^2 – 2x + 3$ trace as retas secantes que passam pelos pontos dados na tabela:

(x_1,y_1)	(x_2,y_2)
(2,1)	(4 ; 3)
(2,1)	(3 ; 1,5)
(2,1)	(2,5 ; 1,125)



Etapa 4 – As inclinações das retas secantes calculadas na tabela da Etapa 2 tendem para o valor numérico __. Utilizando a definição de derivada encontre f'(x), no ponto $x_1 = 2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O valor de f'(2) é igual à _______ e, desse modo, podemos identificar que f'(2) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 0{,}5x^2 – 2x + 3$ no ponto $x_1 = 2$.

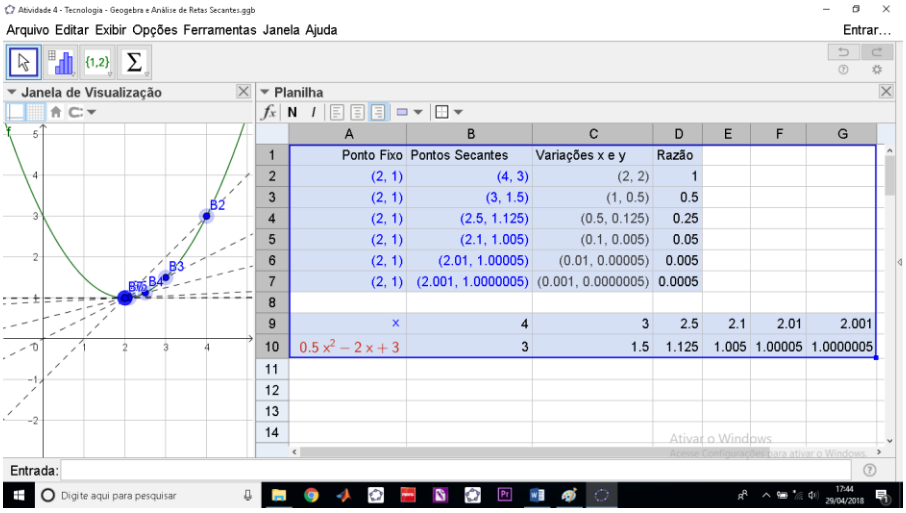
Fonte: ECKL, BAIER, 2018.

Sugere-se o uso de calculadora, para agilizar os cálculos de preenchimento das tabelas de tendências, e o uso de régua para traçar as retas no gráfico. O objetivo da atividade é visualizar e entender o comportamento angular das retas secantes ao gráfico de *y = f(x)*. Ao final, os estudantes devem preencher as lacuna da quarta etapa da atividade.

3.4 Atividade 4: Geogebra® e o gráfico das retas secantes

A quarta proposta de atividade deve ser realizada em laboratório de informática, utilizando do *software* livre Geogebra® e desenvolvendo as mesma etapas da Atividade 3, podendo ainda, usar o aplicativo Geogebra® em *smartphones*.

Figura 1 – Atividade utilizando o *software* livre Geogebra®.



Fonte: ECKL, BAIER, 2018.

Ao término da atividade, sugere-se entregar novamente aos estudantes uma folha de papel contendo a pergunta inicial: "O que você entende por *limite*?". Desse modo pode ser verificado se os estudantes superaram o entendimento usual de *limite*, que tinham quando da primeira vez em que foram questionados.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudantes ingressos no ensino superior, em cursos de Engenharia, podem encontrar dificuldades com relação ao entendimento de conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral porque consideram o significado de palavras (por exemplo, o termo *limite*) e processos matemáticos (por exemplo, operações matemáticas que produzem um resultado fixo) que ocorrem em suas experiências cotidianas e consistem em obstáculos epistemológicos a serem superados. O conhecimento de tópicos da história da criação do Cálculo Diferencial e Integral referentes às dificuldades encontradas pelos seus criadores possibilita um incremento na autoestima dos estudantes, uma vez que a fundamentação formal dos conceitos não ocorreu de modo imediato.

A aplicação de atividades didáticas, focadas em noções intuitivas e na construção de tabelas relacionadas com a realização de operações matemáticas estudadas na educação básica, pode surtir efeito positivo no aprendizado dos estudantes, auxiliando no entendimento de conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral.

Nesse sentido, entendemos que após a realização das atividades introdutórias sugeridas neste artigo os estudantes estarão melhor preparados para o estudo das definições formais de *limite* e *derivada de função de uma variável real*.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gáston. **A formação do espírito científico**: uma contribuição para uma psicanálise do conhecimento. trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. 316 p.

BERLINGHOFF, William Peter; GOVÊA, Fernando Quadros. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e estudantes**. trad. Elza Gomide, Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher – Ed. Universidade de São Paulo, 1974, 488p.

__________. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala e aula: Cálculo**. trad. de Hygino H. Domingues. v. 6. São Paulo: Atual, 1992.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995, 1ed. 844 p.

FARIAS, Tiago; SIMÕES, Bruno dos Santos; TRINDADE, Elizabeth Cristine Adam. Tentativas de superar obstáculos de aprendizagem. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 3, p. 121–150, novembro 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/viewFile/38021/29021. Acessado em: 21/03/2016.

KIRK, Geoffrey; RAVEN, J. E.; SCHOFIELD, Malcom. **Os Filósofos Pré-Socráticos**. trad. Carlos Alberto Louro Fonseca – Lisboa: Fundação Colouste Gulbenkian, 2010. Disponível em: https://martaluzie.files.wordpress.com/2014/09/kirk-raven-schofield-os-filc3b3sofos-prc3a9-socrc3a1ticos.pdf. Acessado em: 15/05/2017.

MATTAR NETO, João August. **Metodologia Científica na Era da Informática**. São Paulo: Saraiva, 2003.

MORAN, José Manoel; MASETTO, Marcos Tarciso; BEHRENS, Ilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas: Papirus, 2013. 21ed. rev. e atual. 4 re. 2015. 176p.

PEDAGOGICAL STRATEGY FOR TEACHING THE CONCEPT OF LIMIT OF A FUNCTION WITH A REAL VARIABLE

Abstract: *Initially, this paper presents historical issues about the creation of the Mathematics field called Differential and Integral Calculus, with emphasis on the difficulties that scientists have in the formal justification in their methods. Next, the concept of obstacle of first experience according to Gáston Bachelard is presented and some themes related to the using of technologies in the world of education are approached. Considering the difficulties found by students particularly in understanding the limit of a function, a main concept in Differential and Integral Calculus, and thinking about the practice of teaching when searching for pedagogical alternatives, this text presents didactical activities that may contribute to the understanding of the concept of limit of a function with a real variable.*

Key-words: *Limit of a function. Epistemological obstacles. Pedagogical Strategy.*