

## **O USO DO MATHCAD COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO ENSINO DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS**

Gabriella Darold Vieira – gabiidarold@gmail.com

Pedro Henrique Gama Neiva – bending.ufpa@gmail.com

André Luís da Silva Batista – andrebatista.ufpa@gmail.com

Leandro Pantoja Paranhos – leandroparanhos1@globo.com

Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres – plinio@ufpa.br

Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Faculdade de Engenharia Civil  
66075 - 110 – Belém – Pará

**Resumo:** O estudo da Mecânica dos Sólidos é uma das bases na formação curricular de engenheiros de diversas especialidades, de modo que é matéria obrigatória na grade curricular de vários cursos de engenharia. Como a Mecânica dos Sólidos apresenta um considerável rigor matemático no desenvolvimento de seus conceitos físicos, ao seu aprendizado são impostas barreiras aos estudantes. Diante do exposto, esse trabalho teve como objetivo contribuir para o ensino da Mecânica dos Sólidos na graduação de Engenharia Civil, por meio do desenvolvimento de planilhas de cálculo de exercícios no software MathCad, que auxiliassem os alunos na resolução de exercícios. Inicialmente, o tópico escolhido para a aplicação da metodologia foi a Flexão. A metodologia do trabalho foi dividida em duas etapas: revisão bibliográfica, em que foram consultados os principais livros sugeridos na ementa da disciplina, sendo realizado um levantamento dos exercícios mais frequentes e importantes no ensino da Flexão Reta; e desenvolvimento das planilhas, criando um padrão de três tópicos, que são: 1) Determinação das propriedades geométricas da seção transversal, 2) Cálculo de momentos fletores em seções de interesse e 3) Cálculo de tensões normais. Para verificar se as planilhas estavam realizando os cálculos corretamente, foram selecionados exercícios do livro Resistência dos Materiais (Hibbeler, 2010), que foram resolvidos através das planilhas desenvolvidas e posteriormente comparados com os resultados apresentados pelo livro. No estudo apresentado, comprovou-se a eficiência das planilhas quanto a apresentar soluções corretas às questões propostas, ratificando assim, que a ferramenta elaborada desempenha satisfatoriamente a função para a qual foi desenvolvida.

**Palavras-chave:** Mecânica dos sólidos. Flexão. MathCad.



## 1 INTRODUÇÃO

A Mecânica dos Sólidos, ou Resistência dos Materiais, é um dos ramos da Mecânica Aplicada que estuda o comportamento dos sólidos quando estão sujeitos a diferentes tipos de carregamento (TIMOSHENKO; GERE, 1983). De acordo com Hibbeler (2010), a sua origem remete ao início do século XVII, quando Galileu realizou experiências para estudar os efeitos de cargas em hastes e vigas feitas de vários materiais. Já no século XVIII, foram desenvolvidos estudos experimentais e teóricos sobre o assunto, principalmente na França, por cientistas como Saint-Venant e Poisson. Como esses estudos se baseavam em aplicações da mecânica de corpos materiais, foram denominados “resistência dos materiais”.

Como corrobora Arruda (2001), o estudo da resistência dos materiais é a disciplina central na formação de várias modalidades da engenharia, e por isso se trata de uma matéria obrigatória em quase todas as engenharias. Como a Mecânica dos Sólidos apresenta um considerável rigor matemático no desenvolvimento de seus conceitos físicos, ao seu aprendizado são impostas barreiras aos estudantes das mais diversas engenharias. Ao lado de disciplinas como Mecânica dos Fluidos, Cálculo Diferencial e Integral, Física Teórica e Teoria das Estruturas, as disciplinas referentes ao conteúdo de Mecânica são caracterizadas por altos índices de reprovação e evasão de discentes em cursos de Engenharia (SILVA; KOSTESKI, 2015).

Frente a essas dificuldades, surgem algumas metodologias de ensino e ferramentas didáticas que auxiliam no aprendizado de diversas áreas do conhecimento. Uma dessas ferramentas é o software *PTC MathCad*. Baseado em Álgebra Computacional, ele é destinado a profissionais, professores e estudantes, para resolver cálculos matemáticos, realizar análises, verificar e compartilhar cálculos e memórias de engenharia. O seu uso é facilitado por sua interface intuitiva, sem programação e sem qualquer complexidade.

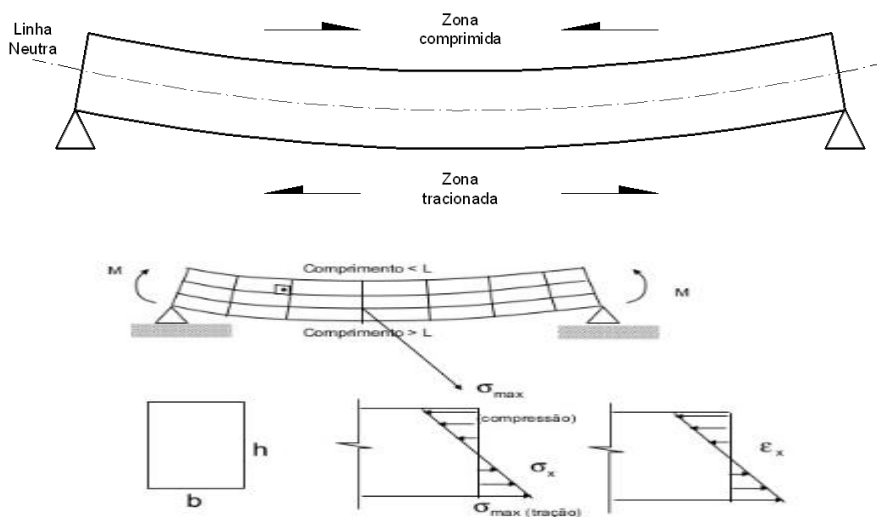
Diante do exposto, esse trabalho tem como objetivo otimizar o ensino da Mecânica dos Sólidos na graduação de Engenharia Civil, por meio do desenvolvimento de planilhas de cálculo de um determinado tópico no software *MathCad*, que auxiliassem os alunos na resolução de exercícios. Inicialmente, o tópico escolhido para a aplicação da metodologia foi a Flexão.

## 2 FLEXÃO

Um corpo pode ser submetido a vários tipos de cargas externas, como forças e momentos, que, quando aplicadas, geram esforços internos necessários para manter a integridade (equilíbrio) desse corpo (HIBBELER, 2010). Esses esforços internos resultantes são a força normal, a força de cisalhamento, o momento de torção e o momento fletor. Este último, que é responsável pela Flexão, é causado pelas cargas externas que tendem a fletir o corpo em torno de um eixo que se encontra no plano da seção transversal da barra.

O comportamento de qualquer barra deformável sujeita a um momento fletor provoca o alongamento das fibras de parte da seção e o encurtamento das demais. Em algum ponto entre as partes superior e inferior da viga, há uma superfície em que as fibras longitudinais não sofrem variação do comprimento. Esta superfície é denominada superfície neutra da viga (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

Figura 1 – Viga submetida a um momento fletor positivo.



Fonte: SlideShare.

De posse dessas informações, de acordo com HIBBELER (2010), para estudar o modo como a tensão deforma o material, podem ser adotadas três premissas. A primeira delas diz que o eixo longitudinal, que se encontra no interior da superfície neutra não sofre qualquer mudança no comprimento. A segunda expressa que todas as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal durante a deformação. Já a terceira discorre que qualquer deformação da seção transversal dentro de seu próprio plano será desprezada.

A flexão que ocorre em um elemento, ao ser submetido a um momento fletor, pode ser caracterizada de acordo com duas condições. A primeira delas leva em consideração o efeito do esforço cortante. Nesse caso, se a força de cisalhamento for nula, a flexão será considerada pura. Caso haja a presença de esforços cortantes, a flexão será denominada simples ou não-uniforme.

A outra condição diz respeito a posição do carregamento em relação à localização da seção transversal da peça. Dessa forma, se o momento aplicado coincidir com um dos eixos principais de inércia, a flexão será reta. Caso contrário, isto é, quando não existir coincidência entre o plano do momento e os eixos principais centrais de inércia da seção transversal a flexão será oblíqua. A flexão reta será aprofundada a seguir.

## 2.1 Flexão Reta

Como já exposto, quando um elemento é submetido a um momento fletor, surgem tensões de tração e compressão ao longo do elemento. É possível obter uma equação que permita calcular a tensão normal desenvolvida nos diversos pontos que constituem a seção transversal. A fórmula utilizada se baseia no fato de que o momento resultante na seção transversal é igual ao momento produzido pela distribuição linear da tensão normal em torno do eixo neutro, desse modo:

$$\sigma_{máx} = \frac{M * C}{I} \quad (1)$$



Onde,

$\sigma_{\text{máx}}$  = tensão normal máxima no elemento, que ocorre em um ponto na área da seção transversal mais afastado do eixo neutro;

M = momento interno resultante;

I = momento de inércia da área da seção transversal;

C = distância perpendicular do eixo neutro a um ponto mais afastado, onde  $\sigma_{\text{máx}}$  age.

Nessa expressão, M é positivo quando produz compressão no topo da viga e C é positivo quando o sentido é para baixo. Essa fórmula é usada para determinar a tensão normal em um elemento reto, com seção transversal simétrica em relação a um eixo, e momento aplicado perpendicularmente a esse eixo.

É importante ressaltar que a fórmula foi desenvolvida para o caso de flexão pura. Isto significa que não há força cortante na seção transversal. As tensões de cisalhamento provocam, na seção transversal, uma deformação tipo "empenamento", de modo que a seção plana antes da flexão não permanecerá plana depois da mesma. Porém, uma análise mais profunda mostra que as tensões normais não sofrem alterações fortes pela presença das tensões de cisalhamento, justificando assim o emprego da teoria da flexão pura no cálculo de tensões normais, mesmo no caso de flexão não-uniforme (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

### 3 METODOLOGIA

A metodologia do trabalho foi dividida em duas etapas: revisão bibliográfica e desenvolvimento das planilhas.

#### 3.1 Revisão bibliográfica

Nessa etapa, os principais livros utilizados como referência na disciplina de mecânica dos sólidos foram explorados, o objetivo foi o de fazer um levantamento dos exercícios mais frequentes e importantes no ensino da Flexão Reta. A princípio, foi constatado que alguns desses casos apresentados nos livros tinham certa semelhança entre si, havendo diferença apenas nos dados para resolução dos mesmos. Buscou-se então generalizar esses casos para que fossem utilizados posteriormente como base para a construção das planilhas de questões. É válido ressaltar que essas questões foram montadas de forma genérica, de modo que o aluno poderá interagir com as mesmas adaptando-as de acordo com seu objetivo.

#### 3.2 Desenvolvimento das planilhas

Os casos iniciais selecionados para as planilhas são: Viga biapoiada com carga uniforme e distribuída; Viga biapoiada com uma carga concentrada; Viga engastada-livre com carga distribuída; Viga engastada-livre com carga concentrada; Viga biapoiada com duas cargas concentradas.

Para o desenvolvimento das planilhas, criou-se um padrão de três tópicos principais que são comuns a todas as planilhas: 1) Determinação das propriedades geométricas da seção transversal, 2) Cálculo de momentos fletores em seções de interesse e 3) Cálculo de tensões normais. O primeiro

tópico é a área da planilha onde o usuário irá inserir as dimensões da seção que será utilizada no problema. Buscou-se empregar as seções mais usuais utilizadas no ensino para abranger um maior número de questões possíveis. As seções mencionadas anteriormente são as seguintes: Retangular, Retangular Vazada, Circular, Aro Circular Fino, “I”, “T” e a seção “U”.

No segundo tópico o usuário irá inserir os dados necessários para obter os momentos fletores, sendo eles o máximo na viga e em uma seção qualquer, cuja posição é informada pelo usuário. A quantidade de dados necessária varia de acordo com o problema. Já o terceiro tópico é o dos resultados em termos de tensões, onde o usuário não deverá mais inserir nenhum dado, mas sim realizar a análise dos dados obtidos.

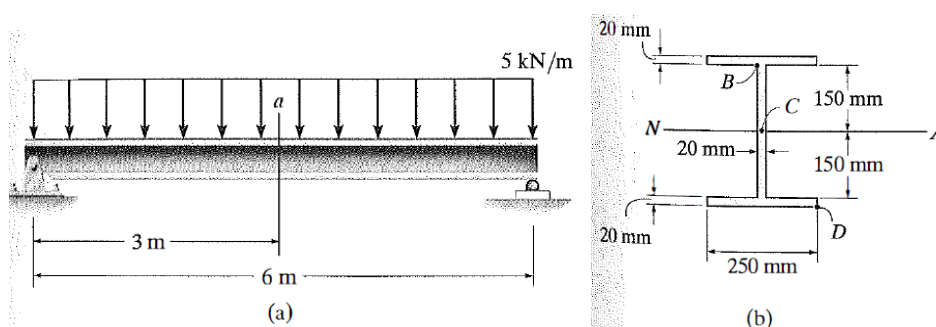
Uma vez escolhidos os exercícios, esses foram inseridos no software *MathCad*, atendendo às observações acima. Vale ressaltar que todos os tópicos das planilhas estão com suas funções detalhadamente descritas ao longo das mesmas, para evitar ao máximo o surgimento de dúvidas ao usuário, gerando assim condições para que o mesmo as utilize de forma autônoma.

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O funcionamento das planilhas desenvolvidas será demonstrado por meio da exibição de uma delas à flexão reta. A demonstração da uso da planilha será feita por meio da resolução de um exercício do livro Resistência dos Materiais (Hibbeler, 2010), que dispõe de solução para o problema, permitindo a comparação com o resultado obtido na planilha.

A planilha selecionada para tal será a de uma viga biapoiada com carga distribuída. O exercício escolhido é o Exemplo 6.15, que pede a tensão de flexão máxima absoluta na viga apresentada abaixo.

Figura 4 – Viga (a) e seção transversal (b) do exercício (Hibbeler, 2010).



Ao abrir a planilha, o usuário irá visualizar as informações iniciais, referentes ao tipo de viga e carregamento, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Planilha de cálculo para flexão reta.



Universidade Federal do Pará  
Instituto de Tecnologia  
Faculdade de Engenharia Civil  
Grupo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia (NICAIE)  
Conteúdo: Flexão Reta



VIGA BIAPOIADA COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA

1. Propriedades da seção

Nesse primeiro tópico são calculadas as propriedades geométricas de alguns tipos de seção transversal que são de interesse para o problema da flexão reta. O usuário deve informar o tipo de seção (entre as disponíveis na planilha) e suas dimensões, conforme exemplificado nas figuras de 1 a 7, e a planilha efetuará os cálculos dos momentos de inércia em torno dos eixos principais e das coordenadas máxima e mínima de tais eixos.

A seguir, são apresentadas sete tipos de seções transversais para vigas. Em cada imagem são apresentadas as dimensões de interesse para cada seção.



Figura 01: Seção retangular.



Figura 02: Seção retangular vazada.

O primeiro passo é a escolha da seção transversal de interesse entre as disponibilizadas na planilha, já citadas anteriormente. Cada seção é identificada por um número, de 1 a 7. Ao escolher a seção de interesse, o usuário deverá preencher a tabela exibida abaixo com o seu código e suas dimensões, como base, altura ou diâmetro, que são indicadas nas figuras mostradas nas planilhas e ilustradas na Figura 4. Essas informações serão fundamentais para o cálculo das propriedades geométricas da seção transversal da viga.

Relacionando essas informações com o exercício selecionado, a tabela será preenchida da seguinte forma:

Figura 5 – Tabela para a inserção das informações para o cálculo das propriedades da seção transversal da viga.

Seção	$b$	$h$	$D$	$t$	$b'$	$h'$	$d$	$b_f$	$t_f$	$t_w$
	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)
5	0	0	0	0	0	0	34	25	2	2

Tabela 2: O usuário deve informar as propriedades da seção transversal da viga.

Com essas informações, a rotina desenvolvida e apresentada abaixo calculará as propriedades geométricas da seção transversal escolhida.



Figura 5 – Rotina para cálculo das propriedades geométricas.

```

CalculaSeção (Seção, b, h, D, t, b', h', d, b_f, t_f, t_w) =
if Seção = 1
    I_x ← b · h³ / 12
    I_y ← b³ · h / 12
    y_max ← 0.5 · h
    y_min ← -0.5 · h
    x_max ← 0.5 · b
    x_min ← -0.5 · b
if Seção = 2
    I_x ← b · h³ / 12 - b' · h'³ / 12
    I_y ← b³ · h / 12 - b'³ · h' / 12
    y_max ← 0.5 · h
    y_min ← -0.5 · h
    x_max ← 0.5 · b
    x_min ← -0.5 · b
if Seção = 3
    I_x ← π · D⁴ / 64
    I_y ← π · D⁴ / 64
    y_max ← 0.5 · D
    y_min ← -0.5 · D
    x_max ← y_min
    x_min ← y_max
if Seção = 4
    I_x ← π · D³ · t / 8
    I_y ← π · D³ · t / 8
    y_max ← 0.5 · D
    y_min ← -0.5 · D
    x_max ← y_min
    x_min ← y_max
if Seção = 5
    h_w ← d - 2 · t_f
    I_x ← b_f · t_f³ / 6 + 2 · (b_f · t_f) · ((d - t_f) / 2)² + t_w · h_w³ / 12
    I_y ← b_f³ · t_f / 6 + h_w · t_w³ / 12
    y_max ← 0.5 · d
    y_min ← -0.5 · d
    x_max ← 0.5 · b_f
    x_min ← -0.5 · b_f
if Seção = 6
    h_w ← d - 2 · t_f
    I_x ← t_f · b_f³ / 6 + 0.5 · t_w³ · (d - 2 · t_f)
    I_y ← 2 · t_f · b_f · t_w + (d - 2 · t_f)³
    y_max ← 0.5 · d

```

As propriedades geométricas obtidas são armazenadas dentro de uma matriz, como mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Propriedades geométricas calculadas.

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ y_{\max} \\ y_{\min} \\ x_{\max} \\ x_{\min} \end{bmatrix} := \text{CalculaSeção}(\text{Seção}, b, h, D, t, b', h', d, b_f, t_f, t_w) = \begin{bmatrix} (3.013 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^4 \\ (5.228 \cdot 10^{-5}) \text{ m}^4 \\ 0.17 \text{ m} \\ -0.17 \text{ m} \\ 0.125 \text{ m} \\ -0.125 \text{ m} \end{bmatrix}$$

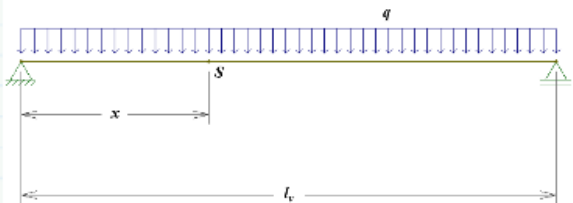
Com as propriedades geométricas calculadas, a próxima etapa de cálculo consiste na determinação do momento fletor atuante, podendo ser o momento máximo na viga ou em uma seção qualquer, cuja posição foi informada pelo usuário. Para isso, basta inserir o valor da carga distribuída, o comprimento da viga e, caso seja necessário, a posição em que se deseja determinar o momento fletor. Essas informações foram preenchidas de acordo com o exercício de verificação utilizado.

Figura 7 – Inserção dos dados para cálculo do momento fletor.

**2. Momento fletor**

Nesse tópico são calculados os valores do momento máximo na viga, que nesse caso é na seção localizada na metade do seu comprimento, e do momento em uma seção qualquer, localizada em uma distância  $x$  (em relação à origem) informada pelo usuário.

Inicialmente, devem ser informados pelo usuário os valores da carga uniformemente distribuída na viga ( $q$ ), o comprimento da viga ( $l_v$ ) e, caso deseje calcular o momento em alguma seção específica, deve informar a posição  $x$  dessa seção.



- Insira o valor da carga distribuída  $q$ :  $q := 5 \frac{kN}{m}$
- Insira o valor do comprimento da viga  $l_v$ :  $l_v := 6 \text{ m}$
- Insira o valor da distância da seção para a origem:  $x := 3 \text{ m}$

Os cálculos dos momentos fletores é feito conforme exibido a seguir:

Figura 8 – Cálculo do momento fletor.

**2.1 Momento máximo na viga:**

$$M_{m\acute{a}x} := \frac{q \cdot l_v^2}{8} \quad M_{m\acute{a}x} = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**2.2 Momento em uma seção qualquer da viga:**

$$M_x := \frac{q \cdot l_v}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 \quad M_x = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Assim, a última etapa de cálculo é a determinação das tensões normais, feito como se segue:

Figura 9 – Cálculo da tensão máxima.

**3. Tensões normais**  
Aqui são calculadas as tensões normais para a seção com maior momento na viga (tensão máxima) e numa seção qualquer informada pelo usuário (tensões máximas e mínimas). Também é calculado o valor de tensão numa fibra qualquer, cuja coordenada y é informada pelo usuário, na seção com maior momento na viga.  
Tais cálculos são feitos para dois casos de flexão: em torno do eixo x e depois em torno do eixo y.

**3.1 Flexão em torno do eixo X:**

**3.1.1 Tensão máxima na seção com maior momento:**

$$\sigma_{m\acute{a}x} := \frac{M_{m\acute{a}x} \cdot y_{m\acute{a}x}}{I_x} \quad \sigma_{m\acute{a}x} = 12.694 \text{ MPa}$$

Também podem ser determinadas as tensões normais máxima e mínima na seção da viga selecionada. Nesse caso, como a distância escolhida foi o centro do vão, que coincide com o ponto de momento máximo, a única variação será nos sinais, indicando momento máximo e mínimo:

Figura 10 – Cálculo das tensões máxima e mínima numa seção qualquer.

**3.1.2 Tensão máxima e mínima numa seção qualquer:**

$$\sigma_{sm\acute{a}x} := \frac{M_s \cdot y_{m\acute{a}x}}{I_x} \quad \sigma_{sm\acute{a}x} = 12.694 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{sm\grave{i}n} := \frac{M_s \cdot y_{m\grave{i}n}}{I_x} \quad \sigma_{sm\grave{i}n} = -12.694 \text{ MPa}$$

Comparando os resultados obtidos com os fornecidos pelo livro, pode-se observar que esses coincidem, isto é, a planilha cumpre a função para a qual foi desenvolvida.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento da aprendizagem do aluno se faz com grande participação do professor, mas também com o auxílio de ferramentas que possam dar um subsídio complementar à aprendizagem e que viabilizem o exercício da matéria, completando assim, o ciclo de aprendizagem e facilitando o entendimento do conteúdo por parte dos estudantes. As planilhas elaboradas tornam-se importantes ao desempenharem esse papel de assistir o aluno na resolução de exercícios (de livros, apostilas, sala de aula, etc.), servindo como comparativo para as respostas obtidas nas resoluções das questões por parte do usuário, principalmente em relação às questões envolvendo

cálculo de tensões em seções de vigas fletidas, havendo também a possibilidade das planilhas servirem para o auxílio na criação de questões por parte de docentes.

No estudo apresentado, comprova-se a eficiência das planilhas quanto a apresentar soluções corretas às questões propostas, ratificando assim que a ferramenta elaborada desempenha satisfatoriamente a função para a qual foi desenvolvida.

## REFERÊNCIAS

ARRUDA, J.R.F. **Introdução histórica à Mecânica dos Sólidos**. Disponível em: [http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/mecsol1/Introducao\\_Historica\\_a\\_Mecanica\\_dos\\_Solidos.pdf](http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/mecsol1/Introducao_Historica_a_Mecanica_dos_Solidos.pdf)  
Acesso em: 29 mar. 2018.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7ª edição, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SILVA, R.A.F.; KOSTESKI, L.E. Monitoria para Mecânica dos Sólidos 2015. In: VII Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão, 2016, Alegrete. **Anais**. Alegrete, 2016.

TIMOSHENKO, S. P; GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos**: volume I. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos. 1983.

## THE USE OF MATHCAD AS A DIDATIC TOOL IN THE TEACHING OF SOLID MECHANICS

**Abstract:** *The study of Solid Mechanics is one of the bases in the curricular formation of engineers of the most diverse specialties, so that it is an obligatory subject in the curriculum of several engineering courses. As Solid Mechanics presents a considerable mathematical rigor in the development of their physical concepts, it pose a barrier to students learning. In view of that, this article has the objective to contribute to the teaching of Solid Mechanics in Civil Engineering graduation, by means of the development of spreadsheets for calculating exercises in MathCad software, to assist students in solving exercises. Initially, the topic chosen for the application of the methodology was Bending. The methodology of the study was divided into two stages. First, was made a bibliographical review, in which the main books suggested in the syllabus of the discipline were consulted, being carried out a survey of the most frequent and important exercises in the simple bending teaching. Second, we develop the spreadsheets, creating a pattern of three topics, which are: 1) Determination of the geometric properties of the cross section, 2) Calculation of bending moments in sections of interest and 3) Calculation of normal stresses. To check if the spreadsheets were performing the calculations correctly, exercises from the book Strength of Materials (Hibbeler, 2010) were selected, which were solved through the developed worksheets and later compared with the results presented by the book. In the presented study, it was verified the efficiency of the spreadsheets in order to present correct solutions to the proposed questions, thus confirming that the elaborated tool satisfy the function for which it was developed.*

**Key-words:** Solid mechanics. Bending. MathCad.