

## PROTÓTIPO DIDÁTICO DE BAIXO CUSTO PARA ENSINO DE CONTROLE PID

**João Victor Galvão da Mata** – Jvictormata@hotmail.com

Universidade Federal da Bahia, Departamento de Engenharia elétrica  
Rua Prof. Aristides Novis, 02, Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia  
40210-630 – Salvador – Bahia

**Mayda Lopes de Lucena** – Mayda.lucena@gmail.com

Universidade Federal da Bahia, Departamento de Engenharia elétrica  
Rua Prof. Aristides Novis, 02, Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia  
40210-630 – Salvador – Bahia

**Resumo** O Presente trabalho tem como objetivo apresentar e descrever um protótipo didático e seu emprego para o estudo do controle PID. Será discutido todo o processo de construção de um sistema “ball and beam”, partindo desde o modelo matemático até a síntese do controlador e implementação. Os materiais de baixo custo e fácil acesso tornam possível a construção do modelo por qualquer estudante em casa. O protótipo possibilitará uma análise de cada uma das ações de controle individualmente, em busca da sintonia do controlador ideal.

**Palavras-chave:** Protótipo, didático, controle, PID.

### 1 INTRODUÇÃO

Nos dias atuais os controladores estão presentes nas mais diversas áreas, desde sistemas simples como o controle da velocidade de uma esteira em um shopping até em sistemas mais complexos como o controle de estabilidade de aeronaves. O controlador PID, entre os diversos modelos de controladores, tem um grande destaque devido a sua ampla utilização na indústria, na qual cerca de 96% dos controladores são do tipo PID (PINTO, 2014).

A alta aplicabilidade do controlador PID em contraste com a falta de uma visão mais prática nos cursos de engenharia, que hoje são extremamente teóricos (CNI - Confederação Nacional da Indústria, 2015), tornam metodologias ativas com uma abordagem mais prática de grande valor para o aprendizado. Diante deste contexto, protótipos didáticos são capazes de tornar o ensino de vários conteúdos da engenharia muito mais atraente e motivador.

Foi escolhido um sistema “ball and beam” para utilização como protótipo didático, devido a sua característica instável. A rápida resposta do sistema permite a fácil visualização da sua saída e sua sensibilidade a variação dos parâmetros do controlador.

Na seção 2 será obtido o modelo matemático do sistema. A seção 3 apresentará o controlador PID e discutirá um dos possíveis métodos de obtenção dos parâmetros do controlador. A seção 4 discutirá a construção do protótipo. A seção 5 trará resultados de análises em cima do protótipo, para o controlador obtido e para a variação dos parâmetros do mesmo.

## 2 MODELO MATEMÁTICO

Por se tratar de um sistema mecânico translacional e rotacional, o modelo foi obtido através das leis de Newton, considerando as seguintes variáveis:

**J**: momento de inércia, **m**: massa da bola, **r**: posição da bola, **R**: raio da bola,  **$\alpha$** : ângulo da plataforma,  **$\Theta$** : ângulo do servo,  **$\varphi$** : aceleração angular, **L**: comprimento da plataforma e **d**: comprimento do braço do servo.

$$\sum F = m \cdot \ddot{r} \quad (1)$$

$$\sum T = J \cdot \ddot{\varphi} \quad (2)$$

Figura 1 – Representação do sistema

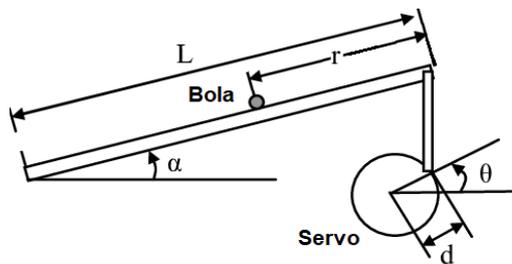
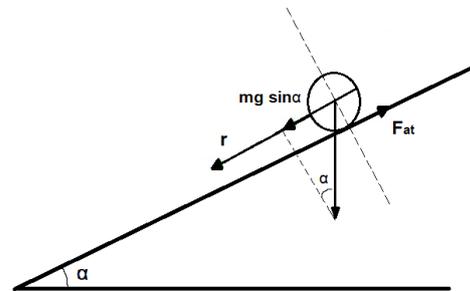


Figura 2 – Diagrama de corpo livre



Fonte: Adaptado de (Xiaohu 2011).

Fonte: Próprios autores.

Com as equações (1) e (2) tem-se:

$$mg \cdot \sin \alpha - F_{at} = m\ddot{r} \quad (3)$$

$$F_{at} \cdot R = J \cdot \ddot{\varphi} \quad (4)$$

Como  $\varphi = \frac{\dot{r}}{R}$ , tem-se que:

$$F_{at} = \frac{J}{R^2} \cdot \ddot{r} \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (3) se obtém:

$$mg \sin \alpha - \frac{J}{R^2} \cdot \ddot{r} = m\ddot{r} \quad (6)$$

Logo:

$$\ddot{r} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}} \quad (7)$$

Como o momento de inércia de uma esfera é  $J = \frac{2}{5}mR^2$  tem-se:

$$\ddot{r} = \frac{5}{7} g \sin \alpha \quad (8)$$

A relação entre o ângulo da plataforma e o ângulo do servo é dada por:

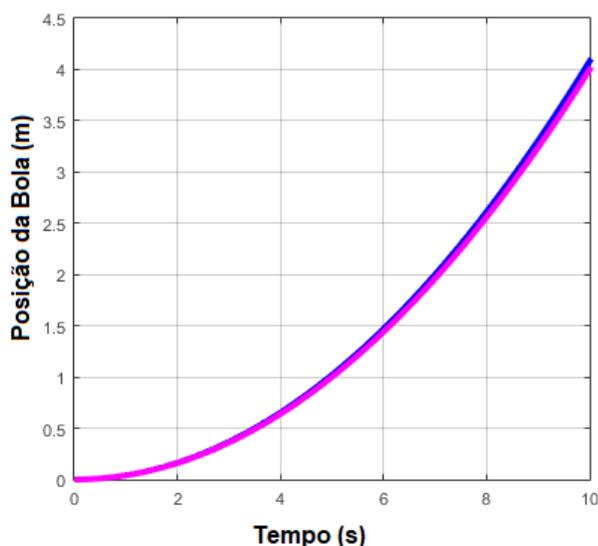
$$\alpha = \frac{d}{L} \theta \quad (9)$$

Um modelo mais completo pode ser obtido através da mecânica lagrangeana, conforme (HAM, 2015) e (VIRSEDA, 2004), o mesmo é dado por:

$$\ddot{r} = \frac{5}{7} g \sin \alpha + r \cdot (\dot{\alpha})^2 \quad (10)$$

Os dois modelos foram simulados em malha aberta no através do simulink, presente no software MATLAB, e em seguida comparados:

Figura 3 – Resultado da comparação, simulação em malha aberta da resposta ao degrau.



Fonte: Próprios autores.

Como os modelos apresentaram uma divergência muito pequena na resposta ao degrau (figura 3) e os sinais de entrada aplicados serem de baixa amplitude, foi utilizado para análise e representação do sistema o modelo da mecânica newtoniana, descrito pela equação (8).

Supondo que o ângulo da base varie muito pouco em torno do 0, pode-se fazer a seguinte linearização:

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (11)$$

Desse modo a partir de (8) e (9) temos que:

$$\ddot{r} = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \frac{d}{L} \theta \quad (12)$$

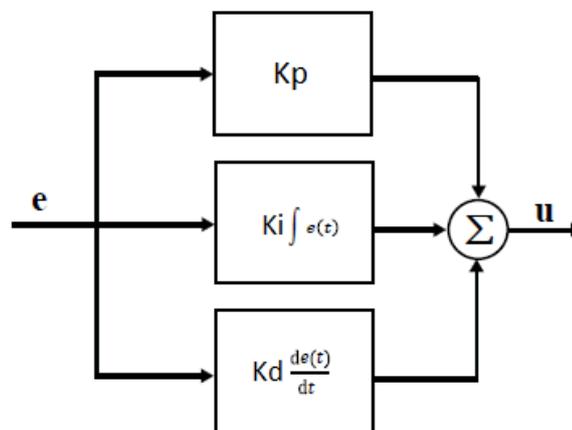
Logo, para um servo motor como um braço de 4cm e uma plataforma com 35 cm de comprimento, e fazendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$  temos que a função transferência da planta é:

$$G(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{40}{49} \quad (13)$$

### 3 CONTROLADOR PID

O controlador PID paralelo tem como característica uma saída composta por uma componente proporcional, uma integral e uma derivativa do sinal de erro:

Figura 4 – Estrutura do controlador PID.



Fonte: Próprios autores.

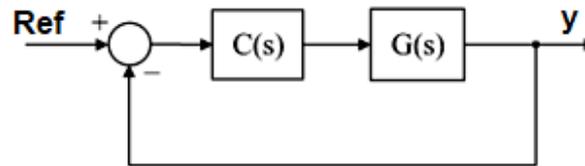
$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t) dt \quad (14)$$

O acesso a planta física real do sistema a ser controlado, amplia muito as possibilidades de síntese do controlador. Pode-se, por exemplo, obter um controlador utilizando uma análise teórica e em seguida reajustar seus parâmetros de forma experimental com a planta. Para o sistema proposto o projeto do controlador foi feito em duas etapas, primeiramente o parâmetro  $K_i$  foi adotado como sendo nulo e para determinação dos parâmetros  $K_d$  e  $K_p$  foram estabelecidos os seguintes requisitos de resposta:

- Sobressinal menor que 30%
- tempo de acomodação (critério de 5%) menor que 4,2 segundos

Desse modo, fechando a malha se tem:

Figura 5 – Malha de controle



Fonte: Próprios autores.

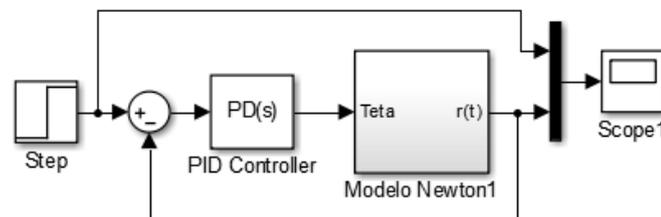
Com  $C(s) = K_p + k_d s$ , o controlador PD. Desse modo a função de transferência em malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{(K_d s + K_p) \cdot \frac{40}{49}}{s^2 + (K_d s + K_p) \cdot \frac{40}{49}} \quad (15)$$

O cálculo dos parâmetros foi feito ignorando o efeito do zero e considerando o sistema como tendo um comportamento de segunda ordem sub-amortecido, sem zeros. Para as especificações propostas se obteve um fator de amortecimento  $\zeta = 0,3539$  e uma frequência natural  $\omega_n = 2,020$ , e com isso  $K_p = 5$  e  $k_d = 1,4$ .

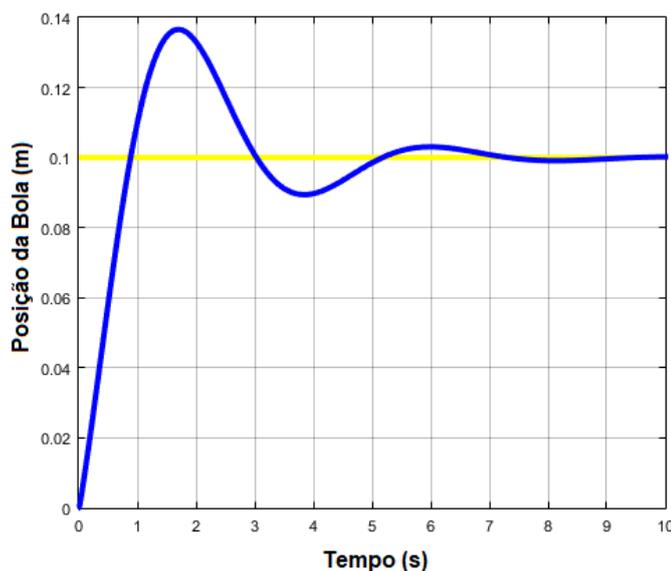
A simulação do modelo não-linear, equação (8), com o controlador em malha fechada no simulink mostrou que as especificações foram atendidas.

Figura 6 – Simulação em malha fechada



Fonte: Próprios autores.

Figura 7 – Resultado da simulação em malha fechada



Fonte: Próprios autores.

A segunda etapa do projeto teve como objetivo a determinação do parâmetro  $K_i$ . Com os parâmetros  $K_p$  e  $K_d$  fixos e de posse do protótipo foram testados diversos valores para  $K_i$  de forma empírica. O valor de  $K_i$  obtido que estabilizou o sistema mais rapidamente foi  $K_i=0,08$ .

A nova função transferência em malha fechada foi:

$$T(s) = \frac{1,143s^2 + 4,082s + 0,06531}{s^3 + 1,143s^2 + 4,082s + 0,06531} \quad (16)$$

Essa metodologia de síntese a partir de uma análise teórica seguida de um ajuste de parâmetros experimental é bastante eficiente. A fase experimental é capaz de contornar erros decorrentes do processo de modelagem do sistema, como dinâmicas não consideradas, linearizações e aproximações, pelo fato das correções dos parâmetros serem feitas com base na resposta do sistema real.

#### 4 CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO

Para construir a estrutura mostrada na Figura 1 foram avaliados inicialmente vários aspectos práticos, como: custo, robustez do material, resistência, elasticidade e peso.

O modelo do servo escolhido foi o 9g SG90 TowerPro, pela sua disponibilidade e simplicidade. Devido ao baixo torque do servo utilizado, a escolha do material sustentado pelo servo teria de

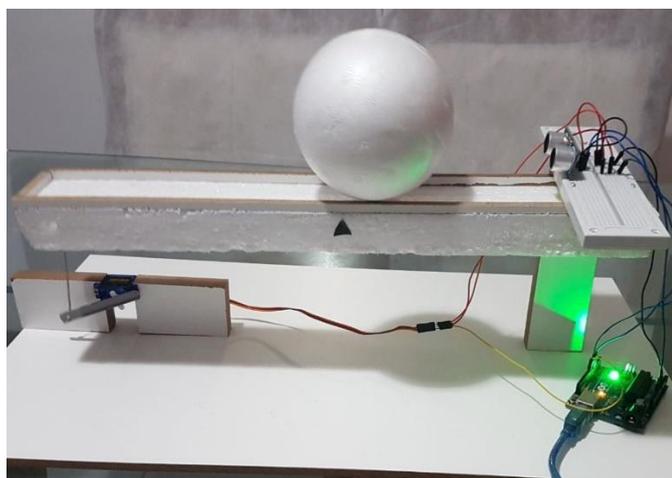
priorizar este aspecto. Por isto, o material selecionado para a plataforma e a esfera foi o isopor. Sendo o isopor da esfera de maior densidade que o da base, logo, apresentando menor deformação e sofrendo menor influência do ar.

Na construção da base inferior e lateral do protótipo foi utilizado o MDF, devido à sua estética e resistência.

O controle do sistema foi feito através de um microcontrolador Arduino Uno, através da biblioteca “PID\_V1.h”. Como saída, temos a posição da bola, que é medida de forma indireta através do tempo de envio e resposta de uma onda sonora a partir de um sonar HC-SR04. A entrada de controle é o ângulo do servo motor (atuador).

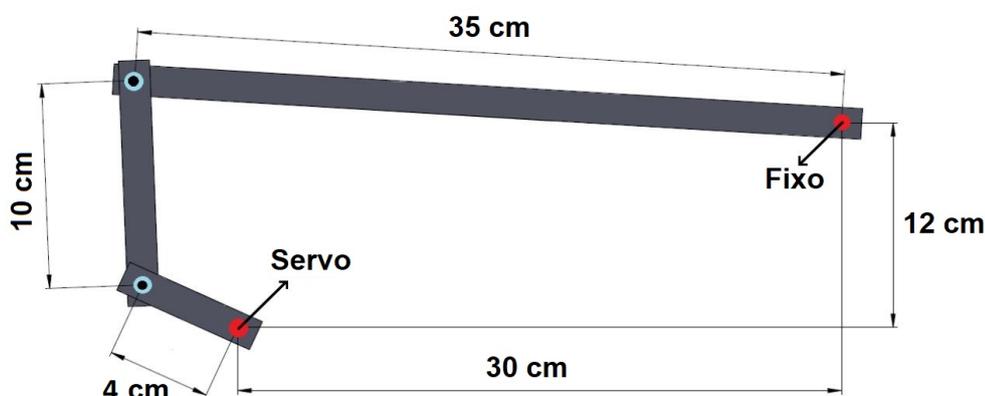
As dimensões do protótipo estão mostradas na figura 9.

Figura 8 – Foto do Protótipo Construído



Fonte: Próprios autores.

Figura 9 – Dimensões de Projeto do Protótipo



Fonte: Próprios autores.

## 5 RESULTADOS OBTIDOS

De posse do protótipo pronto, é possível verificar o impacto da variação dos parâmetros do controlador e analisar aspectos como a precisão do controlador, o tempo de acomodação, sobressinal e caráter oscilatório. Desse modo o protótipo pode ser usado para o estudo das ações de controle proporcional, integral e derivativa e seus efeitos na saída do sistema de forma prática.

Como exemplo, foram realizados testes utilizando o protótipo com o controlador sintonizado e com o controlador com o ganho proporcional elevado.

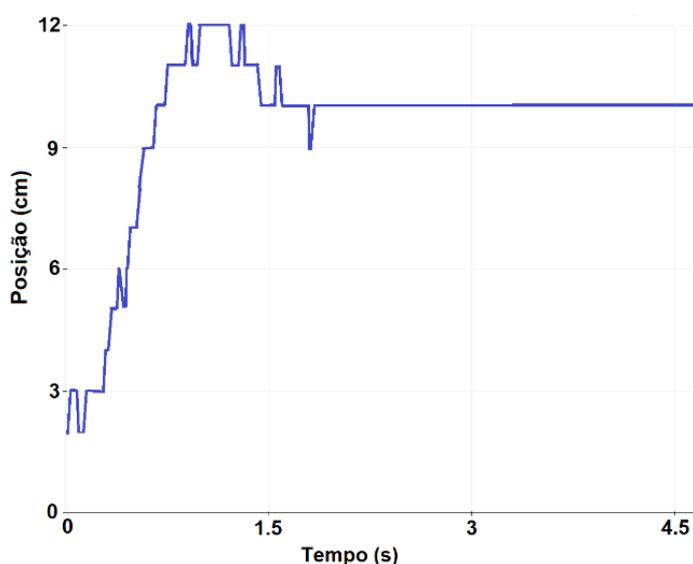
### 5.1 CONTROLADOR SINTONIZADO

Para o controlador obtido na seção 3 foram realizados dois testes:

No primeiro teste, a bola foi solta no início da plataforma e o valor de referência definido em 10cm. O sistema rapidamente atingiu o equilíbrio conforme mostrado na figura 10.

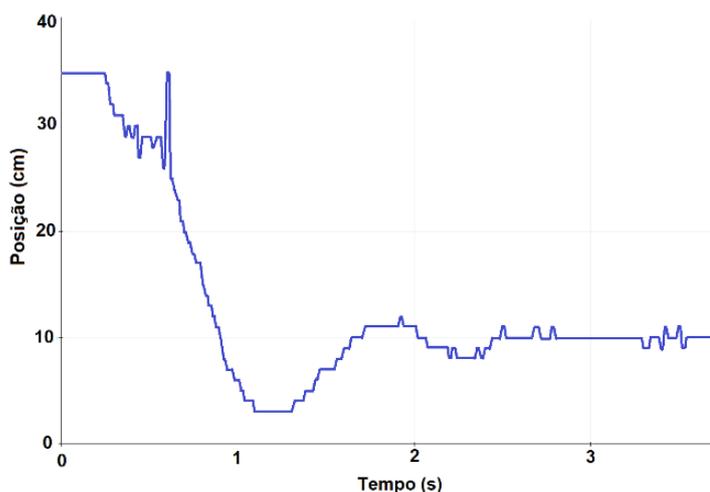
No segundo teste, mantendo o valor da referência em 10cm, a bola foi lançada ao final da plataforma. Novamente o sistema atingiu o equilíbrio rapidamente, conforme mostrado na figura 11.

Figura 10 – Resultado obtido com o lançamento da bola no início da plataforma



Fonte: Próprios autores.

Figura 11 – Resultado obtido com o lançamento da bola no final da plataforma

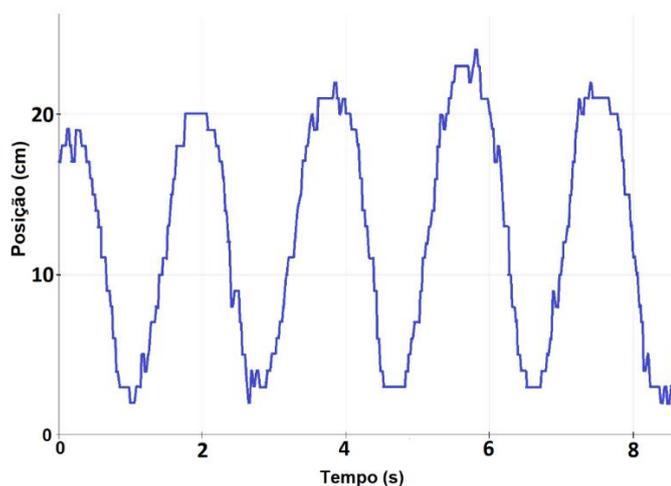


Fonte: Próprios autores.

## 5.2 CONTROLADOR COM GANHO PROPORCIONAL KP ELEVADO

Partindo do controlador sintonizado na seção 3, o parâmetro de ganho proporcional  $K_p$  foi sendo aumentado gradativamente, em consequência disso foi notado um aumento da velocidade de resposta do sistema e ao mesmo tempo um aumento do sobressinal. Foi notado que para valores de  $K_p$  maiores que 14 a saída do sistema passava a oscilar, a figura 12 mostra o gráfico da posição da bola para um controlador com os parâmetros  $K_p = 20$ ,  $K_d = 1,4$  e  $K_i = 0,08$ .

Figura 12 – Saída do sistema para um ganho  $K_p=20$ .



Fonte: Próprios autores.

## 6 CONCLUSÃO

A utilização de protótipos didáticos para o ensino nos cursos de engenharia gera grande motivação nos estudantes, tornando o ensino dos conteúdos muito mais prazeroso. O protótipo

apresentando neste artigo pode ser utilizado tanto em disciplinas introdutórias dos cursos de engenharia, com o objetivo de apresentar uma ideia do que é teoria de controle, como em matérias mais avançadas dentro da área de controle, para desenvolvimento de análises práticas do efeito da variação dos parâmetros do controlador na saída de um sistema real.

Através do protótipo foi possível a obtenção de um controlador PID que estabiliza o sistema e atende alguns requisitos de resposta propostos. Também foi possível visualizar o efeito da variação do ganho proporcional  $K_p$ , desde o valor obtido para o controlador sintonizado, até valores em que a saída do sistema adquirisse um caráter oscilatório.

### Referências:

CHEN, Chi-Tsong. **Analog and Digital Control System Design**, Saunders College Publishing, 1993.

CNI - CONFEDERAÇÃO NACIONAL DA INDÚSTRIA. **Fortalecimento das engenharias**. Brasília, Brasil, 2015. Disponível em: <<http://www.portaldaindustria.com.br/cni/canais/mobilizacao-empresarial-pela-inovacao/publicacoes/fortalecimento-das-engenharias/>> . Acesso em: abril de 2017.

HAM, Chan. **Development of a Ball-and-Plate System**, 122nd ASEE Annual Conference & Exposition, 2015.

PINTO, Jan Erik Mont Gomery. **Aplicação prática de sintonia de controladores PID utilizando o método do relé com histerese**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, UFRN. Natal, RN, 2014.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**, 4ª edição, São Paulo, Pearson, 2003.

VIRSEDA, Marta. **Modeling and Control of the ball and Beam Process**, Dissertação de mestrado, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 2004.

XIAOHU, Lv et al. “**Design of Ball-Beam Control System Based on Machine Vision**”, Applied Mechanics and Materials Vols 71-78 (2011) pp 4219-4225, Trans Tech Publications, Switzerland.

## LOW COST DIDACTIC PROTOTYPE FOR TEACHING PID CONTROL

**Abstract:** *The present work aims to present and describe a didactic prototype and its use for the study of PID control. We will discuss the whole process of building a “ball and beam” system, starting from the mathematical model to the controller synthesis and implementation. The choice of low-cost and more affordable materials make it possible to any student be able to construct the prototype at home. The prototype will allow an analysis of each of the control actions individually, in search of the optimal controller tuning.*

**Key-words:** *Prototype, didactic, control, PID.*