



## USO DO GEOGEBRA APLICADO À ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**Souza, Wagner de Jesus** – wagner.souza@magnesita.com  
Universidade Salgado de Oliveira, Departamento de Ensino  
Rua Paru, 784 – Bairro: Nova Floresta  
CEP: 31.140-320 - Belo Horizonte – MG

**Berbari, Maíra Rancatti** – mrberbari@hotmail.com  
Universidade Salgado de Oliveira, Departamento de Ensino  
Rua Paru, 784 – Bairro: Nova Floresta  
CEP: 31.140-320 - Belo Horizonte – MG

**Santos Filho, Constantino Veríssimo dos** – constantinofilho@yahoo.com.br  
Universidade Salgado de Oliveira, Departamento de Ensino  
Rua Paru, 784 – Bairro: Nova Floresta  
CEP: 31.140-320 - Belo Horizonte – MG

**Mendonça, Diego César Monteiro de** – diegomendonca@gmail.com  
Universidade Salgado de Oliveira, Departamento de Ensino  
Rua Paru, 784 – Bairro: Nova Floresta  
CEP: 31.140-320 - Belo Horizonte – MG

**Resumo:** O artigo apresenta uma abordagem sobre o uso do software GeoGebra como recurso ferramenta de auxílio à Engenharia de Produção utilizando metodologia de Programação Linear. Foi apresentada a resolução de um problema de logística, onde busca a maximização de lucros de uma empresa automobilística através da melhor opção de fabricação entre dois lotes de modelos diferentes de automóveis. O software GeoGebra é gratuito e está disponível online para baixar no site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).

**Palavras-chave:** GeoGebra; Logística; Pesquisa Operacional; Resolução.

### 1. INTRODUÇÃO

Este artigo surgiu de uma iniciativa dos professores orientadores deste trabalho, Constantino Veríssimo (M.Sc.) e Diego Mendonça (D.Sc.), com a criação de um grupo de Iniciação Científica para investigar a utilização do GeoGebra como ferramenta no processo ensino-aprendizagem de Matemática e Física no ensino público de Belo Horizonte e como ferramenta para aplicações no ramo da Engenharia. O objetivo geral deste trabalho é fazer uso do GeoGebra, *software* matemático livre e de interface gráfica amigável, como ferramenta para a solução de problemas em Logística, e em particular na área de Engenharia de Produção.



As tomadas de decisão da empresa devem ser bastante elaboradas para que sejam feitas as melhores escolhas, e que a empresa mantenha sua estabilidade no mercado. Desta maneira, Hillier e Liberman (2006, p. 2) mostram que a Pesquisa Operacional (PO) é uma ferramenta poderosa como mecanismo para tratar de problemas típicos de uma organização, bem como auxilia no gerenciamento de tomada de decisão.

O estudo de caso em questão utilizou a ferramenta Geogebra com suporte para a resolução de um problema logístico real da empresa automobilística Y. O aspecto da Geometria Dinâmica (interface gráfica), implícita no Geogebra, foi utilizado com a finalidade de auxiliar os engenheiros a realizarem as análises para tomada de decisão. Após a extração dos dados da proposição do problema, deve ser realizado o tratamento destes dados para se chegar à solução viável a partir das ferramentas do *software* escolhido.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Muito se discute sobre o quadro econômico brasileiro. As empresas estão sempre em busca da conquista e da sobrevivência no mercado. A concorrência que se encontra no meio competitivo faz com que estas busquem satisfazer seus clientes agregando valor a seu produto, seja em preço, qualidade ou tempo. Segundo Dornier *et al* 2000, p. 82-83), “[...] a tendência rumo à economia mundial integrada e à arena competitiva global está forçando as empresas a projetar produtos para um mercado global e a racionalizar seus processos produtivos de forma a maximizar os recursos corporativos”.

Um dos fatores que agregam valor no custo destes produtos e dissemina um olhar crítico dos gerentes é a logística. Tal aspecto pode ser observado nas considerações de Caxito (2011, p. 2) que estabelece ser a logística o elo que representa todas as expectativas originadas pelos demais setores, sejam elas vendas, marketing, finanças, custos, pesquisa e desenvolvimento, produção ou por outras áreas que visam uma mesma finalidade, o triunfo do seu sucesso. Portanto, a logística pode ser conceituada como um dos pilares na base do sucesso de grandes companhias, pois faz parte de um significativo vínculo de todas as áreas empresariais. Caxito (2011, p. 8) resume que a “[...] logística precisa participar do processo de tomada de decisões da estratégia corporativa e não simplesmente ser um departamento que as executa, uma vez que as decisões já foram tomadas”.

Desta maneira, é importante que os gestores tenham uma visão clara da importância das atividades logísticas, que são: Armazenar, transportar e distribuir. Conforme (Meirim, 2017, p. 1) a logística está relacionada “[...] aos diversos métodos de se movimentar produtos e insumos e por isso é essencial ao processo logístico, sendo ainda responsável por uma grande parte dos custos logísticos da empresa.” Um dos aspectos importantes nos processos logísticos de uma instituição é a tomada de decisão, que conforme estabelece Lachtermacher (2004, p.4), se faz necessário entender a tomada de decisão como: “o processo de identificar um problema ou uma oportunidade e selecionar uma linha de ação para resolvê-lo”.

Um método científico que auxilia na tomada de decisão é a Pesquisa Operacional (PO). Hillier e Liberman (2006, p. 2) acrescentam que o termo surgiu em meados da Segunda Guerra Mundial, com a necessidade de selecionar, coordenar e escolher as melhores frotas e recursos para problemas militares.

Silva *et al.* (2007, p. 14) mostra que a programação linear é uma das técnicas mais utilizadas no tratamento de problemas em PO. E como a simplicidade do modelo envolvido e sua livre técnica de solução programável em computadores, simplificam a sua aplicação.

O desenvolvimento da programação linear foi considerado como um dos mais importantes avanços científicos dos meados do século XX. Hoje é a ferramenta padrão que tem

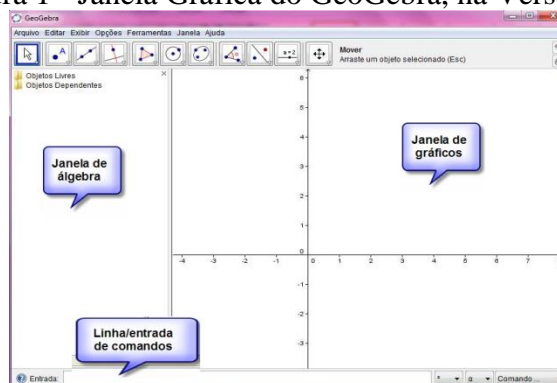


economizado milhares ou milhões de dólares para muitas companhias nas nações industrializadas do mundo. (HILLIER; LIBERMAN, 2006. p. 25)

De acordo com Belfiore e Fávero (2013, p. 5) a programação linear tem como objetivo estabelecer uma solução ótima do modelo, que em geral, maximiza os lucros ou minimiza custos. Essa resolução é encontrada através de uma função objetivo (função linear das variáveis de decisão). Silva *et al* (2007, p. 15) mostram que se o problema identificado é a programação de produção, as variáveis de decisão são as quantidades a produzir no intervalo de tempo. Entretanto, se for um problema de programação de aplicação de capital as variáveis irão retratar as decisões de aplicação de capital, ou seja, quanto aplicar em cada momento e em que período. Junior *et al.* (2016 p. 5) mostram que além da função objetivo, existem as restrições do problema que garantem que a(s) solução(ões) esteja(m) assimilada(s) com as limitações específicas do sistema. Segundo Ragsdale (2009, p. 5), caso as restrições sejam representadas por recursos limitados, a aplicação da PO evita o desperdício dos mesmos. Conforme BELFIORE; FÁVERO, (2013), “por ser um modelo determinístico, todas suas variáveis são lineares, constantes e conhecidas. Os modelos podem ser resolvidos por métodos analíticos (problemas de baixa complexidade) ou computacionais (problemas de média e alta complexidade) por meio de algoritmos como o *simplex*”.

Uma forma eficiente de resolver problemas de Programação Linear é fazer uso de *softwares* matemáticos como o GeoGebra. Segundo Pereira (2012, p. 31) o Geogebra é um *software* livre, desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo, escrito em Java e em múltiplas plataformas, onde é possível utilizar recursos de geometria, álgebra e cálculo. Na tela inicial da interface do Geogebra (Figura 1) observa-se a Janela de Gráficos, local destinado a representação gráfica dos objetos construídos, onde é possível alterar a espessura, cores e formas, medir distâncias, colocar legendas, etc. A Janela de álgebra exibe a representação algébrica de todo objeto construído e a Linha de comandos é o espaço destinado para escrever todas as coordenadas, comandos e funções desejadas, de forma que teclando *Enter*, os mesmos serão representados na janela de álgebra.

Figura 1 - Janela Gráfica do GeoGebra, na Versão 5.0



Fonte: Tela coletada pelos autores, 2017.

Através desta interface, é possível construir de modo simples pontos, figuras, segmentos, retas, vetores, polígonos e também gráficos de funções dinamicamente modificáveis com o mouse, que será uma das ferramentas principais a serem utilizadas para solução de nosso problema, além de opções de texto que também ajudarão no leiaute final da solução. O GeoGebra também admite expressões implícitas e oferece uma gama de comandos, entre os que cabe destacar as operações de derivação e de integração.



### 3. METODOLOGIA

Para a modelagem do problema, analisou-se dados logísticos da empresa Y do ramo automobilístico localizada em Betim. Considerou-se interessante a influência do transporte de peças em carretas pelas diferentes características de transporte, com o objetivo de maximização do lucro final na fabricação de lotes de dois modelos de veículos da empresa.

A análise foi realizada utilizando os conceitos de PO, mais especificamente a programação linear por meio da maximização ou minimização da função objetivo (função linear), onde observou-se a restrição do modelo por meio de um sistema linear.

### 4. ESTUDO DE CASO

No sistema interno de transporte da empresa, sabe-se que algumas das principais carretas não obtinham lucro máximo no fechamento da fabricação de certos lotes de veículos e que algumas carretas sempre obtinham resultados melhores em seus transportes.

Sabendo-se da situação acima, foi proposto utilizar um *Software* que calcule e exiba graficamente o melhor resultado para o transporte, com o objetivo de proporcionar maior lucro para a empresa.

A opção em utilizar o GeoGebra perpassa pelo alto custo de *softwares* tradicionais tais como: *TMS*, do inglês “*Transportation Management System*” e do Alemão “*Systeme, Anwendungen, Produkte in der Datenverarbeitung*”, (*SAP*), ambos voltados para o Gerenciamento de Materiais. Destaca-se que o *TMS* é utilizado na gestão dos transportes, dos fretes, nas otimizações e planejamentos de cargas e o Sistema de Gerenciamento de Armazém (*WMS*, do inglês *Warehouse Management System*) tem como sua função principal o gerenciamento centralizado de tarefas.

### 5. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A empresa automobilística Y necessita do transporte de peças para o seu negócio automotivo, sendo que os principais itens a serem transportados têm pesos e volumes diferentes. Cada lote necessita de certa quantidade de peças, e de um ponto de vista logístico precisa-se definir qual lote de modelo de veículo, “A” ou “B”, obtém maior lucro para a empresa. Abaixo seguem as premissas principais para analisarmos o problema:

1. Em cada carreta são transportados: Trinta toneladas de peças para fabricação do bloco de motor dentre eles cabeçote, bloco e cârter; 24 toneladas de peças para fabricação do sistema de suspensão - traseiro e dianteiro; 27 toneladas de peças para fabricação do sistema de transmissão - platô e rolamento.

2. Existe a necessidade de produção de lotes de veículos de dois modelos (A e B) cujas peças são universais para estes.

3. Para a fabricação de um lote do modelo A é necessário: Oito toneladas de peças do bloco motor; Dez toneladas de peças do sistema de suspensão; Oito toneladas de peças do sistema de transmissão;

4. Para a fabricação de um lote do modelo B é necessário: Doze toneladas de peças do bloco motor; Oito toneladas de peças do sistema de suspensão; Quinze toneladas de peças do sistema de transmissão;

5. O lucro de um lote do modelo A é de R\$350.000,00.

6. O lucro de um lote do modelo B é de R\$430.000,00.



A tabela 1 sumariza os dados expostos anteriormente.

Tabela 1 - Dados do Problema Proposto

	Bloco de Motor (Ton)	Sistema de Suspensão (Ton)	Sistema de Transmissão (Ton)	Custo do Lote (R\$)
Modelo A	8	10	8	350.000
Modelo B	12	8	15	430.000
Ton/Carretas	30	24	27	

Fonte: Empresa automobilística Y, 2017.

O objetivo é determinar sobre um ponto de vista logístico, qual lote dos modelos considerados obterá o maior lucro para essa empresa por meio do conceito da “Maximização de Lucros” onde se busca estabelecer qual modelo é o mais indicado considerando as restrições impostas (vide Tabela 1). Ao se aplicar os conceitos de PO e utilizar o método de programação Linear, tem-se a seguinte descrição para o problema:

Variáveis de decisão – São as incógnitas a serem determinadas pela solução do problema, ou seja, o valor de referência para cada lote: Quantidade de lote a ser fabricado do Modelo A, denotada de  $x_1$ ; Quantidade de lote a ser fabricado do Modelo B, denominado de  $x_2$ . Para  $(x_1, x_2)$  utiliza-se  $(x, y)$ .

Restrições – São as disponibilidades de itens em toneladas para cada modelo, tais como: Disponibilidade de bloco de motor (Ton); Disponibilidade de sistema de suspensão (Ton); Disponibilidade de sistema de transmissão (Ton).

Para maximizar a função:

$$z = 350.000x + 430.000y \quad (1)$$

Têm-se as restrições:

$$8x + 12y \leq 30 \quad (2)$$

$$10x + 15y \leq 24 \quad (3)$$

$$8x + 15y \leq 27 \quad (4)$$

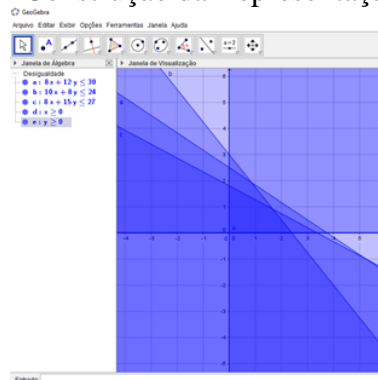
Restrições de não negatividade:

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$

Após a inserção das inequações, obtém-se o gráfico exposto na Figura 2.

Figura 2 - Construção da Representação Gráfica



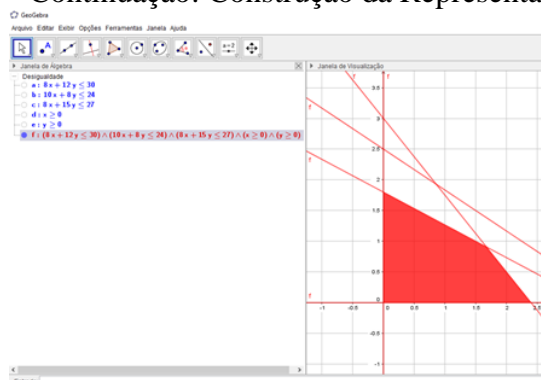
Fonte: Tela construída pelos autores, 2017.

Para se encontrar a área da solução ótima, utilizou-se o comando “cunha”(Λ), também denotado como “lógico” cuja sua função é estabelecer a junção de todas as inequações.





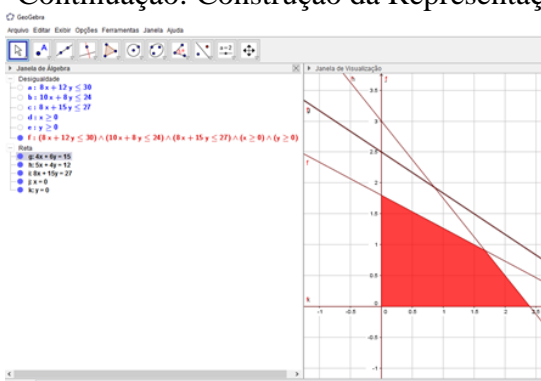
Figura 3 - Continuação: Construção da Representação Gráfica



Fonte: Criação dos autores, 2017.

Assim tem-se o conjunto de soluções viáveis, a área vermelha na Figura 3 é a área de solução ótima. Por fim, constroem-se as retas transformando as inequações em equações, ou seja, substituiu-se os sinais de desigualdade ( $\leq$  e  $\geq$ ) por um sinal de igualdade ( $=$ ), vide Figura 4.

Figura 4 - Continuação: Construção da Representação Gráfica



Fonte: Criação dos autores, 2017.

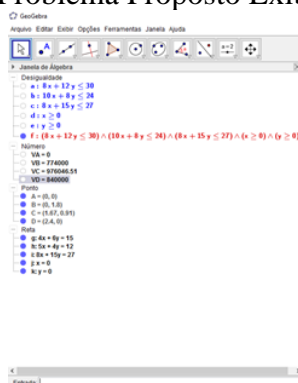
Após a identificação de todas as interseções marcando-as com pontos, é necessário verificar na função Z (Equação 1) onde o mesmo terá o maior valor. Insere-se a função:

$$VA = 350000X(A) + 430000Y(A) \quad (7)$$

Dessa forma tem-se que o valor de Z no ponto de A=0, as coordenadas “X” e “Y” são iguais a “0”. No entanto, não existe lucro neste ponto, como visto na Figura 5. Deve-se repetir esta análise para todos os pontos encontrados, ou seja, VB, VC, VD....



Figura 5 - Resultados do Problema Proposto Exibidos na Janela de Álgebra



Fonte: Criação dos autores, 2017.

Ao se analisar as informações na Figura 5, é possível visualizar qual ponto terá maior lucro, pois dentro dos valores de Z nos pontos selecionados o ponto C já apresenta valor maior. Na implementação de recursos para visualização da solução do problema identificou-se todos os pontos de interseção da área da solução ótima, daí criou-se um comando que identifica o ponto de nossa solução ótima onde obtém-se o maior valor, o “Controle Deslizante”. Tal comando é utilizado para simular as variações que podem ocorrer com a função Z, para tanto basta deslizá-lo sobre a área e atingir o ponto com maior lucro (vide Figura 6).

Para a simulação, foi estabelecido que a função Z (Equação 1) seja igual a “0”, ficando:

$$350000x + 430000y = 0 \quad (8)$$

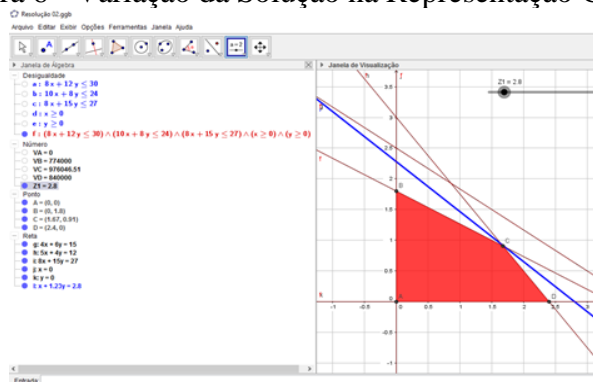
Isolando uma das variáveis tem-se:

$$x = -\frac{430000y}{350000} \quad (9)$$

Somado ao que foi criado o controle deslizante, denota-se de Z1, onde:

$$x = -\frac{430000y}{350000} + z1 \quad (10)$$

Figura 6 - Variação da Solução na Representação Gráfica



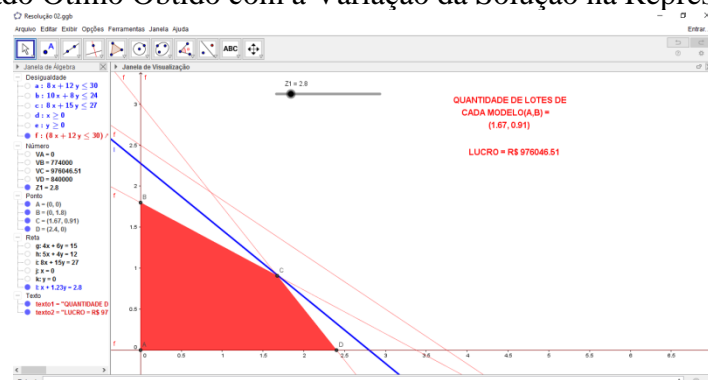
Fonte: Criação dos autores, 2017.

Identificado o ponto com maior resultado, por consequência este será o de maior necessidade. Para obtenção do maior lucro de um ponto vista logístico diante das restrições para esta fábrica, deve-se produzir as seguintes quantidades de lote de cada modelo: Modelo A: fabricação de 1,67 lotes; Modelo B: fabricação de 0,91 lotes.

$$Lucro = 350000(1,67) + 430000(0,91) = \sim R\$976000,00 \quad (11)$$



Figura 7 - Resultado Ótimo Obtido com a Variação da Solução na Representação Gráfica



Fonte: Criação dos autores, 2017.

A área em vermelho (vide Figura 7) onde todas possíveis soluções para o problema estão representadas nesta região. Nesta região, cada ponto, definido pelo par de coordenadas  $(x_1, x_2)$  será solução viável, onde satisfaz o conjunto das restrições. Denota-se que o problema admite soluções infinitas, porém o que se quer é encontrar a solução ótima, ou seja, o ponto que maximize o lucro total. Então se considera que este ponto encontra-se sempre na região exequível, em um dos seus vértices.

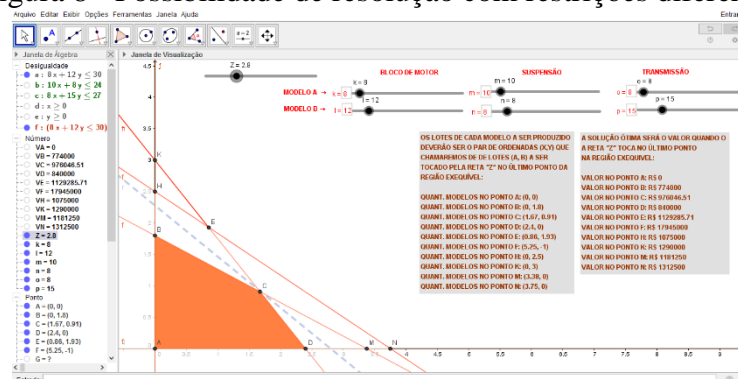
A área delimitada (vide Figura 7) representa no problema a região onde estão todas as soluções possíveis. Cada ponto dessa região é uma solução viável, satisfazendo o conjunto de restrições. Portanto, o problema admite infinitas soluções, porém o que se quer é encontrar o ponto que maximize o lucro total, ou seja, que gera a solução ótima.

No intuito de fundamentar a importância do GeoGebra, tendo como referência a resolução anterior, ponderou-se sobre a necessidade de aprimorar o método utilizado rumo a uma plataforma de testes, ou seja, um método que pode ser utilizado para resolução de qualquer problema envolvendo a Programação Linear.

Para aprimoramento da primeira plataforma utilizada, foi necessário providenciar a implantação dos controles deslizantes, sendo possível variar os coeficientes de todas as funções, obtendo um conjunto infinito de possibilidades.

Com a inserção do “Campo de Entrada”, pode-se inserir valores para os coeficientes diretamente na janela gráfica, modificando o problema interativamente. A figura 8 ilustra uma nova possibilidade de análise:

Figura 8 - Possibilidade de resolução com restrições diferentes



Fonte: Criação dos autores, 2017.





## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O intuito deste artigo foi apresentar uma proposta de resolução de um problema específico relacionado à logística. Como o problema requeria a busca por uma solução ótima, o aspecto de tentativas por meio de algébricos e gráficos se mostrou necessário. Porém, como a equipe de Iniciação Científica da Universidade Salgado de Oliveira - Universo vem estudando as contribuições do software Geogebra no processo ensino aprendizagem, especificamente no campo da formação do futuro engenheiro, a utilização deste software se mostrou pertinente. Para tanto, alguns aspectos fundamentaram a escolha: ser um software que concebe a condição de simulação/exploração, utilizando o processo algébrico ou gráfico, inerente à propriedade advinda da Geometria Dinâmica - GD, que está incorporada ao Geogebra; ser um software livre, ferramenta que pode ser utilizada por empresas de engenharia pequenas, que estão iniciando no mercado, bem como por qualquer estudante de engenharia como ferramenta de apoio aos seus estudos.

Com a apresentação da problematização por um dos membros do grupo da Iniciação Científica, sobre a sua percepção na variação no lucro dos lotes de dois modelos de veículos a serem fabricados na empresa (Y), onde o mesmo é funcionário. A partir deste relato teve-se início a elaboração da pesquisa, cuja opção foi o de estudo de caso e no campo da logística, o que promoveu a pesquisa bibliográfica preponderantemente sobre os temas logística e pesquisa operacional (Programação Linear). De posse da fundamentação teórica obtida, foi realizada pela equipe a criação de uma ferramenta simulatória no Geogebra para resolução do problema.

Com a ferramenta criada, a primeira etapa da resolução consistiu em analisar o problema e retirar os dados para montagem dentro de um modelo inicial de programação linear, definindo o objetivo e as restrições. O resultado apresentado na solução (Figura 7) representa o número de lotes ideal para obter maior lucro na fabricação dos lotes nos dois modelos analisados. Contudo, em uma situação ótima, diante da solução obtida, seria necessária a fabricação de frações do lote, ou seja, não fabricar o lote inteiro de veículos.

Com a criação da reta “Z” foi possível realizar a análise gráfica do problema no GeoGebra, sendo possível obter-se uma representação mais eficiente, ou seja, detectar onde a função “Z” seja máxima. Tal fato foi possível pela característica da GD que o software possui, sendo possível locomover a reta na direção do gradiente da função, cuja inclinação permanece constante, sendo então possível verificar que o ponto que determina o máximo valor na função objetivo é aquele que será o último a ser tocado na região exequível, sendo o mesmo na aresta da região formada.

Em razão do aspecto de incrementação contínua da ferramenta criada no Geogebra, notou-se a possibilidade de se analisar situações diferentes ao alterar os valores das restrições, no problema representadas pela quantidade em toneladas de peças a serem transportadas, podendo assim aumentar sua aplicabilidade e obter uma ferramenta para a análise de pequenas variações em relação ao problema original. Tal aspecto torna o Geogebra um forte aliado no processo de aprendizagem do futuro engenheiro pois instiga a conexão entre o conceito estudado e os problemas pertinentes à área da engenharia, bem como possibilita a percepção da importância da simulação na resolução de problemas.



## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### ***Livros:***

BALLOU, Ronaldo. Logística Empresarial Transporte, Administração de Materiais e Distribuição Física. São Paulo: ATLAS, 2017.

BELFIORE, Patrícia; FÁVERO, Luiz Paulo. Pesquisa Operacional para cursos de Engenharia. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

CAXITO, Fabiano. Logística um Enfoque Prático. Saraiva, 2011.

DORNIER, P. P. et al. Logística e Operações Globais. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

HILLIER, Frederick S., and Gerald J. Lieberman. Introdução à pesquisa operacional. McGraw Hill Brasil, 2013.

LACHTERMACHER, Gerson. Pesquisa Operacional na tomada de decisão. 4<sup>a</sup> Ed. São Paulo: Person, 2004.

RAGSDALE, Clift T. Modelagem e Análise de Decisão. 6 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

SILVA, Ermes. *et. al.* Pesquisa Operacional para os cursos de Economia, Administração e Ciências Contábeis. São Paulo: Atlas, 2007.

### ***Artigos de periódicos:***

PEREIRA, Thales de Lélis Martins *et al.* O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012.

### ***Internet:***

Hélio Merim. (2007). As atividades primárias da logística. Disponível em <http://www.administradores.com.br/artigos/negocios/as-atividades-primarias-da-logistica/14168/>. Acesso em: 05 de maio de 2017.

GeoGebra. Disponível em: <[http //www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)> acesso em 04 de Março de 2017.

## USE OF GEOGEBRA APPLIED TO PRODUCTION ENGINEERING

**Abstract:** *The article presents an approach on the use of GeoGebra software as a tool to aid Production Engineering using Linear Programming methodology. The resolution of a logistics problem was presented, where it seeks to maximize the profits of an automobile company through the best manufacturing option between two lots of different models of cars. GeoGebra software is free and available online for download at [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).*

**Key-words:** *GeoGebra; Logistics; Operational Research; Resolution.*