



## IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DE UM CIRCUITO RC DE PRIMEIRA ORDEM POR MÍNIMOS QUADRADOS NÃO RECURSIVOS COMO FORMA DE ABORDAGEM EDUCACIONAL

**Tiago Alves da Costa** – tiagoadc1@gmail.com

**Leonardo de Araujo Moraes** – leocefetpb@gmail.com

Laboratório de Instrumentação, Sistemas de Controle e Automação (LINSCA)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB)

**Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo** – icarobqa@gmail.com

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

**Gabriel Bruzaca Cavalcante** – gabriel.cavalcante@academico.ifpb.edu.br

**Adriano Júnio de Souza Soares** – academic\_adrianosoares@outlook.com

**Ademar Gonçalves da Costa Junior** – ademar.costa@ifpb.edu.br

Laboratório de Instrumentação, Sistemas de Controle e Automação (LINSCA)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB)

João Pessoa (PB), Brasil

**Resumo:** As técnicas de Identificação de Sistemas são uma forma alternativa ao modelamento matemático baseado nas equações fenomenológicas dos diversos sistemas dinâmicos existentes. Tais técnicas de identificação podem ser aplicadas a sistemas dinâmicos de baixo custo, tais como circuitos montados em protoboard com resistores e capacitores. A proposta neste trabalho é que os alunos possam montar esse tipo de circuito para o entendimento e aprimoramento dos conhecimentos da disciplina de Identificação de Sistema. Dessa forma, um circuito RC de primeira ordem é utilizado para que sejam obtidos os parâmetros do modelo matemático do circuito, como forma de aprendizado do passo a passo a ser realizado quando se utiliza a identificação de sistemas, por meio do método dos mínimos quadrados não-recursivo, que é um dos primeiros algoritmos a serem aprendidos na disciplina.

**Palavras-chave:** Identificação de sistemas, mínimos quadrados não-recursivo, sistemas lineares, circuito RC, modelo ARX.

### 1. INTRODUÇÃO

A área de identificação de sistemas dinâmicos estuda técnicas alternativas à modelagem matemática. Uma das principais características dessas técnicas é que pouco, ou nenhum, conhecimento prévio sobre o comportamento do sistema é necessário, baseadas, fundamentalmente, nos dados da(s) entrada(s) e saída(s), onde são denominados de modelagem (ou identificação) caixa preta (LJUNG, 1997).

Na modelagem matemática baseada nas equações fenomenológicas que regem o comportamento dos sistemas dinâmicos, além da necessidade de estar bem familiarizado com o sistema, também se deve conhecer as relações matemáticas que descrevem as equações,



nem sendo sempre viável esse procedimento de modelagem devido ao conhecimento e ao tempo despendido para tal desenvolvimento (AGUIRRE, 2004).

Segundo Coelho e Coelho (2004), a identificação consiste na determinação de um modelo matemático que represente os aspectos essenciais do sistema caracterizado pela manipulação de sinais de entrada e saída, onde estão correlacionados por meio, por exemplo, de uma função de transferência contínua ou discreta.

Trabalhos recentes utilizando a identificação de sistemas são apresentados com o foco de investigação científica ou de inovação em diversas áreas como, por exemplo, em sistemas de levitação magnética (COELHO & BAUCHSPIESS, 2013), em processos químicos (CARMO *et al*, 2014), em sistemas de navegação (SOUZA & SANTISTEBAN, 2016), em sistemas de mineração (MALDONADO *et al*, 2016), em robótica (COSTA JUNIOR *et al*, 2016), entre outras áreas. Na área educacional, no entanto, para que a identificação de sistemas se consolide como uma ferramenta de uso pelos diversos alunos, não só nas diversas áreas de Engenharia, como também em outras áreas que necessitem da utilização de modelos matemáticos, que não necessariamente, precisariam utilizar as equações fenomenológicas que regem os comportamentos dos diversos sistemas dinâmicos, onde se encontram poucos trabalhos.

Gittleman *et al* (1992) discute um experimento para desenvolver funções de transferência para sistemas de rastreamento humano. Galvão *et al* (2003) apresentam um conjunto de conceitos básicos para a identificação de sistema de levitação magnética didático. Klerk e Craig (2004) descrevem um experimento cuja finalidade é ensinar conceitos básicos de identificação de sistemas em malha fechada. Basilio e Moreira (2004) descrevem o uso de espaço de estados na identificação do comportamento dinâmico de um motor de corrente contínua e seu uso como uma ferramenta educacional. Özbek e Eker (2015) discutem estratégias de ensino e avaliação para identificação de sistemas e controle adaptativo.

A proposta deste artigo é apresentar resultados da identificação paramétrica de um sistema linear determinístico invariante no tempo, baseado em um circuito RC (resistor-capacitor) que representa um sistema de primeira ordem como uma forma de ilustrar o uso da identificação de sistemas em um sistema de fácil montagem em *protoboard* e de baixo custo. A aquisição de dados é realizada por meio de um osciloscópio da Agilent Technologies, modelo DSO-X 2012A, onde se utiliza a identificação por mínimos quadrados com algoritmos desenvolvidos em Matlab<sup>®</sup>.

O artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2 são apresentados os conceitos principais da identificação de sistemas; na seção 3 a metodologia empregada para a modelagem matemática do circuito RC de primeira ordem; na seção 4, a apresentação dos resultados obtidos e por fim, na seção 5, as considerações finais do artigo.

## 2. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Segundo Ljung (1997), o processo de identificação, normalmente, é tratado como um problema de otimização, sendo influenciado por diversos fatores, tais como, o conhecimento a priori do sistema, a presença de ruídos, a complexidade e as propriedades do modelo, além do critério para o cálculo do erro. Os métodos de identificação se utilizam de dados da(s) entrada(s) e da(s) saída(s) do sistema dinâmico no domínio do tempo (discreto ou contínuo) ou no domínio da frequência, sendo divididos em (AGUIRRE, 2004):

- Métodos paramétricos e não-paramétricos;
- Métodos no domínio da frequência.

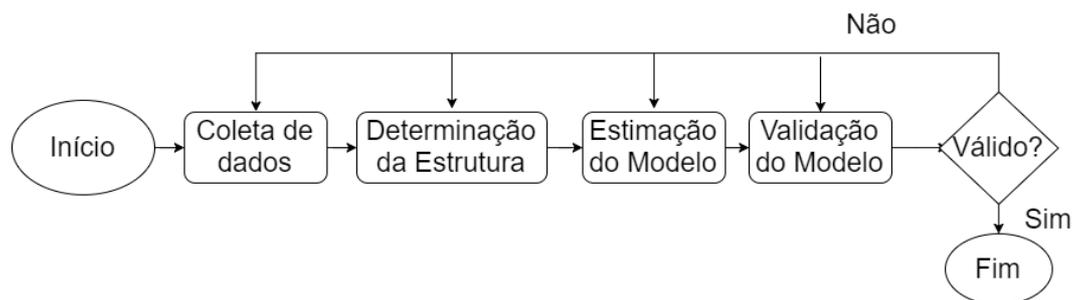


Os métodos paramétricos consideram que a estrutura do modelo é conhecida onde se busca estimar os valores dos seus parâmetros e os métodos não-paramétricos são utilizadas quando a estrutura do modelo é desconhecida, resultando em representações gráficas que caracterizam o comportamento dinâmico do sistema (AGUIRRE, 2004).

Os métodos também são classificados de acordo com o ruído presente em seus dados, que são: os métodos determinísticos, em que não há nenhum tratamento especial ao ruído presente nos dados; os métodos estocásticos, que utilizam recursos adequados para considerar o ruído, de forma que haja uma redução de seus efeitos sobre o modelo identificado.

A identificação de sistemas consiste nos seguintes passos ilustrados na Figura 1.

Figura 1 – Fluxograma do processo de identificação de sistemas.



De forma sucinta, as etapas descritas na Figura 1 se estendem as ações:

### 2.1. Planejamento do experimento e obtenção de dados

Nessa etapa são planejados a escolha da(s) saída(s) e entrada(s) e o(s) tipo(s) de sinal(is) de excitação do sistema dinâmico, além do tempo de amostragem para a aquisição dos dados.

### 2.2. Determinação da estrutura do modelo

Nessa etapa é escolhida a representação matemática do modelo, bem como, seus números de pólos, zeros e atrasos de transporte. Uma das representações utilizadas é por meio de equações diferenças que podem ser representadas como uma entrada e uma saída, que de acordo com o polinômio utilizado, recebem diferentes nomes de modelos, tais como FIR (*Finite impulse response*), ARX (*AutoRegressive with eXogeneous inputs*), ARMAX (*AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*), ARMA (*AutoRegressive Moving Average*), ARARX, ARARMAX, OE (*Output Error*) e BJ (*Box-Jenkins*). A estrutura de modelo utilizada nesse trabalho foi a ARX, que pode ser escrita na Equação (1):

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (1)$$

onde  $e(k)$  é o ruído branco e as matrizes  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  são dados por:

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{na} a_i z^{-i} \quad (2)$$

$$B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{nb} b_i z^{-i} \quad (3)$$



### 2.3. Estimação dos parâmetros

Essa etapa começa com a escolha do algoritmo a ser utilizado, onde a maioria é variante do método clássico dos mínimos quadrados (AGUIRRE, 2007; COSTA JUNIOR *et al*, 2016). A estimação de parâmetros é um procedimento numérico que determina os valores dos parâmetros dos modelos (desconhecidos) e pode ser formulado como um problema de otimização, onde o melhor modelo é aquele que se ajusta às medidas para um dado critério (COELHO & COELHO, 2004).

Para o modelo da Equação (1), tem-se  $(na + nb + 1)$  parâmetros a estimar, onde para estimar os parâmetros  $a_i$  e  $b_i$ , devem ser utilizadas as medidas de entrada e de saída do sistema dinâmico adquiridas.

Definindo o vetor de medidas  $\varphi(k)$ , de dimensão  $(na + nb + 1) \times 1$  (LJUNG, 1997):

$$\varphi(k) = -y(k-1) \quad -y(k-2) \quad \dots \quad -y(k-na) \quad -u(k-d) \quad \dots \quad -u(k-d-nb) \quad (4)$$

O vetor de parâmetros  $\theta(k)$ , também de mesma dimensão de  $\varphi(k)$ , é definido como:

$$\theta^T(k) = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{na} \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{nb}] \quad (5)$$

Utilizando o método dos mínimos quadrados não-recursivo, onde todos os dados adquiridos estão disponíveis, o vetor de parâmetros estimado  $\hat{\theta}(k)$  pode ser obtido por (LJUNG, 1997):

$$\hat{\theta}(k) = [\varphi^T \varphi]^{-1} \varphi^T y \quad (6)$$

Dessa forma, o modelo de regressão linear é escrito, onde a saída estimada  $\hat{y}(k)$  é definida como:

$$\hat{y}(k) = \varphi^T(k) \hat{\theta}(k) + e(k) \quad (7)$$

### 2.4. Validação dos modelos

Nessa etapa, entre as diversas técnicas de validação, pode-se utilizar a comparação das respostas do sistema real com a resposta obtida pelo modelo estimado, onde esse é adequado se o erro cometido no ajuste está em uma faixa de valores preestabelecidos (COELHO & COELHO, 2004).

## 3. METODOLOGIA

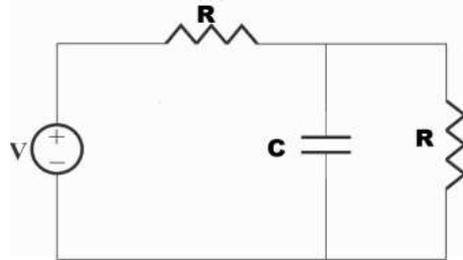
Para que as técnicas de identificação de sistemas dinâmicos sejam válidas como uma alternativa a modelagem matemática baseada nas equações fenomenológicas que regem determinado sistema dinâmico, a proposta é que os alunos de Engenharia utilizem um circuito RC (resistor-capacitor) de primeira ordem, de fácil montagem e de baixo custo, além da modelagem matemática baseada na lei de Ohm ser de baixa complexidade, o que, de certa forma, será utilizada para a comparação com o modelo obtido pelo uso da identificação de sistemas, como forma de validação.

O circuito RC utilizado é ilustrado na Figura 2, onde foi alimentado por um gerador de funções Agilent 33521A e os dados de saída e de entrada foram coletados por meio de um osciloscópio Agilent DSOX 2012A, disponíveis no laboratório. Vale salientar que podem ser



utilizadas outros sistemas de aquisições de dados, inclusive de baixo custo, como a plataforma Arduino, porém foi dada preferência a utilização dos equipamentos mencionados.

Figura 2 – Circuito RC com carga resistiva.



Os dados adquiridos não passaram por nenhum tratamento dos sinais, com o intuito de eliminar possíveis ruídos. Como afirmado anteriormente, o modelo escolhido foi o ARX, onde o algoritmo de estimação utilizado foi os mínimos quadrados não-recursivos, além da utilização do Matlab®.

Os valores utilizados para o circuito da Figura 2 são  $R = 20 \text{ k}\Omega$  e  $C = 10 \text{ nF}$ , onde a função de transferência que representa o comportamento dinâmico da carga e descarga no capacitor  $C$  é dada por:

$$H(s) = \frac{5000}{s + 10000} \quad (8)$$

O circuito possui como constante de tempo 0,1 ms, com o tempo de amostragem escolhido em um décimo da constante de tempo do sistema, com a utilização do método *zero-order hold* (ZOH) para a conversão do sistema no domínio de Laplace (contínuo no tempo) para o domínio  $z$  (discreto no tempo). Dessa forma, a função de transferência no domínio  $z$  é:

$$H(z) = \frac{0,04758}{z - 0,9048} \quad (9)$$

A equação de diferenças para essa função de transferência é definida como:

$$y(k) = a_1 y(k - 1) + b_0 u(k) \quad (10)$$

sendo  $a_1$  e  $b_0$  os parâmetros a serem estimados. Deve-se ressaltar que a análise da quantidade de parâmetros a serem estimados não foi realizada nesse trabalho, devido ao trabalho ser demonstrativo do uso da identificação de sistemas, sabendo qual seria a quantidade de parâmetros (circuito RC). Em sistemas dinâmicos desconhecidos, onde não se sabe a quantidade de parâmetros a serem estimados, essa análise deve ser realizada por meio, por exemplo, do critério de informação de Akaike (AIC – *Akaike Information Criterion*) ou de Bayes (BIC – *Bayes Information Criterion*) (AGUIRRE, 2004).

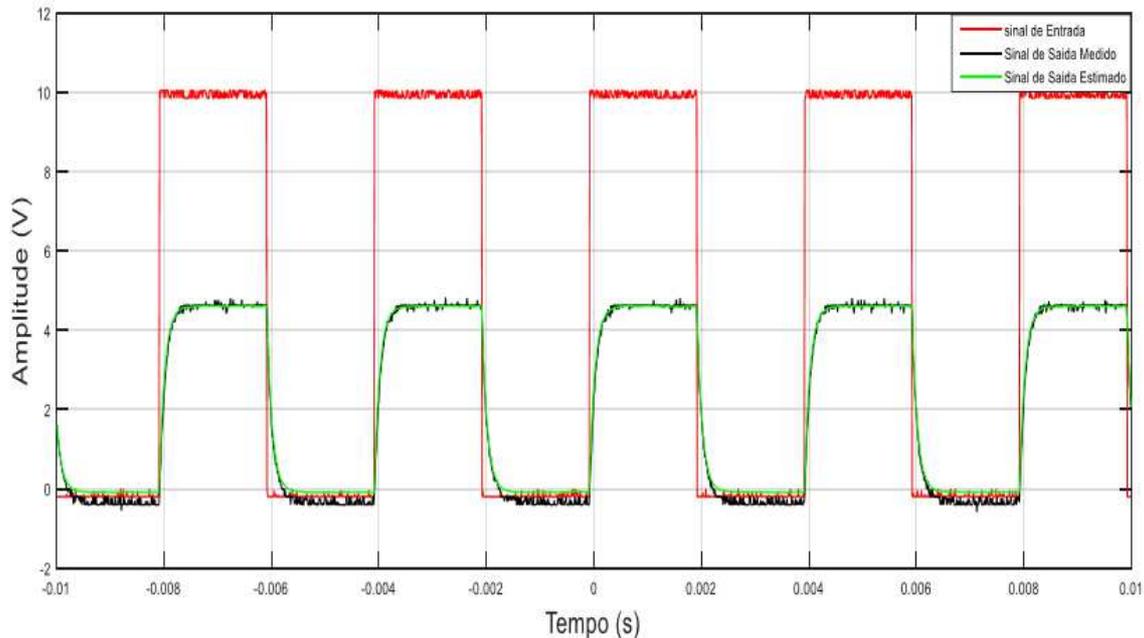
#### 4. RESULTADOS OBTIDOS

Determinada a estrutura e realizada as estimações, os resultados obtidos são ilustrados na Figura 3, onde foi gerada uma onda quadrada de 250 Hz na entrada do circuito RC. Dos 4000 dados adquiridos de cada (entrada e saída), referentes a 10 ciclos de carga e descarga do circuito, metade foi utilizada para a identificação e a outra metade para a validação. Na



identificação dos parâmetros, percebe-se que o sinal de saída estimado (em verde) é muito próximo ao sinal de saída adquirido (em preto).

Figura 3 – Sinais de entrada, e de saída estimado e adquirido para o circuito RC.



Os valores estimados dos parâmetros são  $a_1 = -0,9050$  e  $b_0 = 0,0438$ , onde a função de transferência no domínio z estimada é:

$$H(z) = \frac{0,0438}{z - 0,905} \quad (11)$$

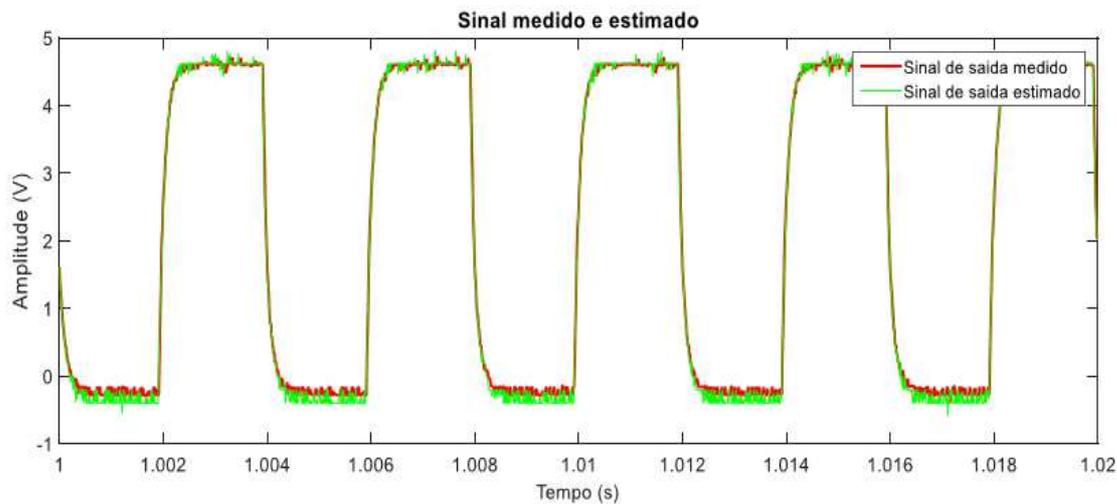
Com o conjunto de dados separados para a validação, a Figura 4 ilustra a validação do modelo matemático estimado para o circuito RC. Para que o modelo fosse avaliado de uma forma não subjetiva, foi utilizado um índice de avaliação para a quantificação do erro entre a saída adquirida e a saída estimada pelo modelo matemático. Entre os diversos itens que podem ser utilizados, o erro quadrático médio (RMSE – *Root Mean Square Error*) foi escolhido, dado por (AGUIRRE, 2004):

$$RMSE = \left( 1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}} \right) \quad (12)$$

Com a utilização do índice RMSE, o percentual obtida foi de 95,19% (entre 0 e 100%), indicando que o modelo matemático estimado ajusta-se aos dados adquiridos da saída.



Figura 4 – Validação do modelo estimado do circuito RC.



## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A identificação de sistemas lineares utilizando o método dos mínimos quadrados não-recursivo, em um circuito RC, apresentou resultados excelentes. Dessa forma, na contextualização do ensino de identificação de sistemas como uma alternativa ao modelamento matemático baseado nas equações fenomenológicas, pode ser estabelecida de forma que os alunos possam montar um sistema dinâmico simples, onde podem discutir e aplicar o conhecimento da metodologia da identificação de sistemas.

A ideia é que em trabalhos futuros sejam discutidos resultados com sistemas de ordem superior a um, além do estudo e aplicação de outros modelos e algoritmos de estimação, formando um arcabouço de conhecimentos na área de identificação de sistemas de modo a ser construído um sistema didático iterativo para que os alunos possam aperfeiçoar o aprendizado em identificação de sistemas.

### *Agradecimentos*

Os autores agradecem ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB) campus João Pessoa pelo suporte neste projeto e no envio do artigo ao COBENGE 2017.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. Introdução à identificação de sistemas – técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2004.

BASILIO, J. C.; MOREIRA, M. V. State-space parameter identification in a second control laboratory. IEEE Transactions on Education, v. 47, n. 2, p. 204-210, 2004.

CARMO, S. K. S. Identificação de sistema e controle em uma unidade de compressão de cloro. Anais: XX Congresso Brasileiro de Engenharia Química (COBEQ 2014), Florianópolis (Brasil), 2014.

COELHO, A. A. R.; COELHO, L. S. Identificação de sistemas dinâmicos lineares. Florianópolis (Brasil): Ed. UFSC, 2004.



COELHO, M. A. E.; BAUCHSPIESS, A. Identificação em kit didático para levitação magnética. Anais: XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2013), Fortaleza (Brasil), 2013.

COSTA JUNIOR, A. G. *et al.* Identificação de sistemas lineares por predição de erro e seus principais algoritmos recursivos. In: Ademar Gonçalves da Costa Junior; José Bezerra de Menezes Filho. (Org.). Estudos e aplicações em sistemas de controle, telecomunicações, acionamentos e sistemas elétricos: enfoques com inovações e tecnologias. João Pessoa - PB: Editora IFPB, 2016.

COSTA JUNIOR, A. G. *et al.* Application of the subspace identification method using the N4SID technique for a robotic manipulator. Revista IEEE América Latina, v. 14, n. 4, p. 1588-1593, 2016.

GALVÃO, R. K. H. *et al.* A simple technique for identifying a linearized model for a didactic magnetic levitation system. IEEE Transactions on Education, v. 46, n. 1, p. 22-25, 2003.

GITTLEMAN, B. *et al.* System identification: human tracking response. IEEE Transactions on Education, v. 35, n. 1, p. 31-37, 1992.

KLERK, E.; CRAIG, I. K. A laboratory experiment to teach closed-loop system identification. IEEE Transactions on Education, v. 47, n. 2, p. 276-283, 2004.

LJUNG, L. System identification: theory for the user. New Jersey: Pearson Education, 1999.

MALDONADO, J. L. B. *et al.* Modelamento matemático de um protótipo de britador de minérios utilizando identificação por subespaços com o método MOESP. Anais: XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016), Vitória (Brasil), 2016.

ÖZBEK, N. S.; EKER, İ. An interactive computer-aided instructional strategy and assessment methods for system identification and adaptive control laboratory. IEEE Transactions on Education, v. 58, n. 4, p. 297-302, 2015.

SOUZA, C. C. M.; SANTISTEBAN, J. A. Modelagem do sistema de hélice de passo controlado das fragatas tipo MK22. Anais: XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2016), Vitória (Brasil), 2016.

## IDENTIFICATION OF PARAMETERS IN A FIRST ORDER RC CIRCUIT BY NON-RECURSIVE LEAST SQUARES AS A FORM OF EDUCATIONAL APPROACH

**Abstract:** *The System Identification techniques are an alternative form to mathematical modeling based on the phenomenological equations of the dynamical systems. Such identification techniques can be applied to low-cost circuit models with resistors and capacitors, which are easily assembled in a protoboard. The proposal in this work is that the students can assemble this type of circuit for the understanding and improvement of the knowledge of the discipline of System Identification. Thus, a first order RC circuit is used to obtain the circuit mathematical model parameters, as a way of learning the performed step by step when using the systems identification, non-recursive least square mean method, which is one of the first algorithms to be learned in the course.*

**Key-words:** *System identification, RC circuit, non-recursive least squares, linear systems, ARX model.*

Organização



**UDESC**  
UNIVERSIDADE  
DO ESTADO DE  
SANTA CATARINA



Promotor

