



## **FERRAMENTAS QUE AUXILIAM NO ENSINO DE ENGENHARIA: COMPARAÇÃO DO CÁLCULO ANALÍTICO E COMPUTACIONAL DAS TENSÕES EM ENGRENAGENS**

**Adriel Magalhães Souza** – adrielmagalhaes@usp.br  
Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos  
Avenida dos Trabalhadores São-carlense, 400  
13566-590 – São Carlos – SP

**Cleomar Silva de Jesus** – cleomarjesus@gmail.com  
Universidade de Franca, Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Dr. Armando de Sales de Oliveira, 201  
14404-600 – Franca – SP

**Resumo:** Transmitir potência é uma das funções mais comuns das máquinas, fazendo uso de sistemas de relações de transmissão para modificar o torque e velocidade. As engrenagens de dentes retos são peças cilíndricas cujo contato tem formato de dentes, os quais transmitem movimentos sem deslizamento. O estudo das tensões na raiz do dente é importante para verificar se as engrenagens não falharão sob tensão de flexão. Esta pesquisa apresenta a análise de tensões de flexão na raiz dos dentes de engrenagens cilíndricas de dentes retos. Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo entre dois métodos distintos (analítico e computacional), visando à formação destes conceitos aos alunos, das tensões de flexão na raiz dos dentes de engrenagens de dentes retos, provocadas por carregamento tangencial em uma transmissão de potência, e realizar uma comparação com os resultados obtidos pelos dois procedimentos. Além do desenvolvimento da capacidade do aluno na resolução de problemas pelos dois métodos supracitados objetiva-se a consolidação de ferramentas computacionais como suporte para o ensino de engenharia. Os resultados obtidos evidenciam uma sinergia entre as análises uma vez que as tensões obtidas convergiram para valores aproximados. O resultado adquirido também reforça a utilização de softwares de simulação para auxílio no ensino em engenharia, visando tornar as aulas mais interessantes e dinâmicas, contribuindo assim para o fortalecimento de conceitos essenciais aos futuros engenheiros.

**Palavras-chave:** Engrenagem cilíndrica, Tensão de flexão, Elementos finitos, Ferramentas computacionais no ensino de engenharia.

### **1 INTRODUÇÃO**

A transmissão de potência pelas máquinas mecânicas tornou-se um recurso essencial para humanidade, pois esse recurso é utilizado em várias áreas, como: indústria, agricultura, transporte etc. Transmitir potência é uma das funções comuns das máquinas, fazendo uso de



sistemas de relações de transmissão, como: engrenagens, polias e correia para alterar o torque e velocidade, chegando assim, nos objetivos do projeto.

As engrenagens de dentes retos são peças cilíndricas cujo contato tem formato de dentes, os quais transmitem movimentos sem deslizamento e a relação de transmissão é constante, independente do carregamento. A engrenagem cilíndrica de dentes retos é uma engrenagem simples, sendo ela um tipo bastante utilizado para transmitir relações cinemáticas na forma de dentes (NORTON, 2013).

Segundo Chandrupatla (2014), o Método de Elementos Finitos (MEF), do inglês *Finite Element Analysis* (FEA), é uma eficiente ferramenta numérica para análise de elementos sujeitos a esforços, sendo assim, é imprescindível em ensino, pesquisa e desenvolvimento em projetos de engenharia. Todavia, componentes simples podem ser analisados com métodos analíticos, fornecendo respostas precisas.

Tendo em vista o escopo supracitado, percebe-se a importância do conhecimento dos métodos analíticos e computacionais, visando a formação de alunos, futuros engenheiros, com conceitos sólidos para a futura ligação entre teoria e prática. Sendo assim, este trabalho tem como objetivo fazer um estudo por dois métodos distintos (analítico e computacional), das tensões de flexão na raiz dos dentes de engrenagens de dentes retos, provocadas por carregamentos em uma transmissão de potência, e realizar uma comparação com os resultados obtidos pelos dois métodos. Além, do desenvolvimento da capacidade do aluno na resolução de problemas pelos dois métodos supracitados objetiva-se a consolidação de ferramentas computacionais como suporte para o ensino de engenharia.

Este artigo está estruturado em seis capítulos, contando com a presente seção. No Capítulo 2 foi realizada uma breve revisão bibliográfica acerca dos principais assuntos abordados durante a realização do trabalho. No Capítulo 3 são apresentados os materiais e métodos utilizados, como os pré-requisitos para cálculo da transmissão de potência, os dados para modelamento em *Computer Aided Design* (CAD), assim como as condições de contorno para realização do cálculo computacional. No Capítulo 4 será apresentada a aplicação da equação da *American Gear Manufacturers Association* (AGMA) para cálculo de tensão de flexão e a apresentação do método computacional para cálculo de tensão de flexão, com análises e discussões dos resultados encontrados. Por fim, os Capítulos 5 e 6, apresentam a comparação dos resultados e as conclusões do trabalho, respectivamente.

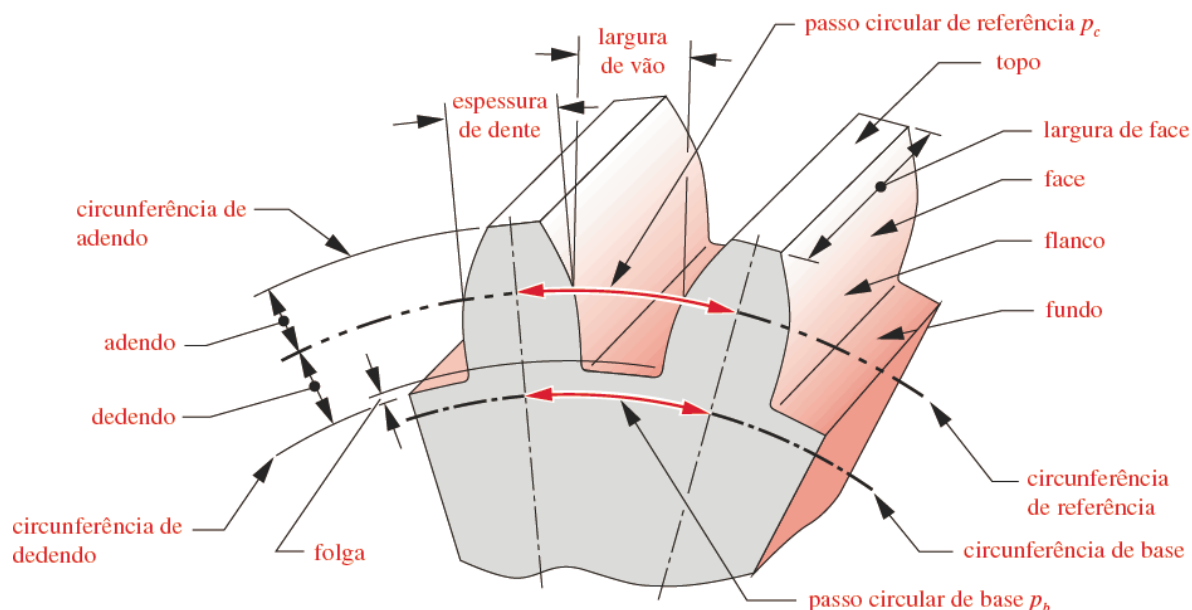
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão da literatura foi dividida em três partes, sendo que a primeira busca sintetizar os conceitos relevantes sobre engrenagens. Ulteriormente, uma recapitulação sobre as tensões em engrenagens cilíndricas retas com ênfase nas equações de Lewis e da AGMA. Finalizando, com um resumo sobre o MEF.

### 2.1 Engrenagens

Para o dimensionamento de engrenagens é necessário conhecer as variáveis envolvidas nos cálculos e, principalmente, conhecer a nomenclatura de cada parte da engrenagem, como apresentado na Figura 1 e descrito a seguir.

Figura 1 – Nomenclatura do dente da engrenagem (NORTON, 2013).



Círculo primitivo ou circunferência de referência, é um círculo imaginário onde ocorre o engrenamento, é usado como base para a maioria dos cálculos. Passo circular ( $p$ ) é a distância medida de um ponto em um dente, na altura do círculo primitivo até o mesmo ponto em um dente adjacente. O módulo ( $m$ ) é a razão entre o passo diametral ( $P$ ) e o número de dentes ( $N$ ). Adendo é a distância radial entre o topo do dente e o círculo primitivo. O dedendo é a distância entre a base do dente e o círculo primitivo. A altura do dente é a soma do adendo com o dedendo (NORTON, 2013). Segundo Budynas & Nisbett (2011), as Equações (1) - (4) representam as relações entre as variáveis supracitadas:

$$P = N/d \quad (1)$$

$$m = d/N \quad (2)$$

$$p = \pi d/N = \pi m \quad (3)$$

$$pP = \pi \quad (4)$$

Onde:  $P$  é o passo diametral em dentes por polegada ou milímetro,  $N$  é o número de dentes,  $d$  é o diâmetro primitivo,  $m$  é o módulo e  $p$  é o passo circular.

## 2.2 Tensões em engrenagens cilíndricas retas

De acordo com Hibbeler (2010), vigas, sendo a engrenagem caracterizada como uma destas, são componentes delgados que suportam carregamentos perpendiculares ao seu eixo longitudinal. A deformação causada por estes carregamentos é chamada de flexão. Os esforços internos provocados pela tração e compressão no interior da viga, são chamados, respectivamente, de tensão de tração e compressão, que são as componentes da tensão de flexão.

A primeira equação para calcular a tensão em dentes de engrenagens foi introduzida pela primeira vez por Wilfred Lewis em 1892. Para desenvolver esta equação, Lewis considerou o



dente da engrenagem como uma viga em balanço, desenvolvendo assim a equação que ainda hoje é utilizada para cálculo da maioria das engrenagens, conhecida como a equação de Lewis (NORTON, 2013; BUDYNAS & NISBETT, 2011), conforme Equação (5):

$$\sigma_b = W_t p_d / FY \quad (5)$$

Onde:  $\sigma_b$  é a tensão de flexão na engrenagem;  $W_t$  é a força tangencial no dente;  $p_d$  é o passo diametral;  $F$  é a largura da face;  $Y$  é o fator adimensional para considerar a geometria do dente, também conhecido como fator de forma de Lewis.

De acordo com Norton (2013) nos dias de hoje a equação Lewis não é utilizada na sua forma original, pois quando Lewis a desenvolveu não era conhecida a concentração de tensão. Atualmente, o fator de forma  $Y$  foi substituído por  $J$ , que leva em consideração a concentração de tensão no pé do dente.

Segundo Budynas & Nisbett (2011), a AGMA vem sendo por anos a autoridade em disseminação do conhecimento ao que concerne à projeto e análise de engrenagens. A AGMA descreve que, a equação de flexão americano em relação à do sistema internacional são descritas na Equação (6) pelo Sistema dos Estados Unidos (US) e Equação (7) no Sistema Internacional (SI)<sup>1</sup>:

$$\sigma_b = W_t K_o K_v K_s p_d K_b K_m / FJ \quad (6)$$

$$\sigma_b = W_t K_o K_v K_s p_d K_b K_m / mFJ \quad (7)$$

Como citado anteriormente, a essência desta equação é a equação de Lewis com o fator de forma atualizado para  $J$  (fator geométrico de resistência à flexão). As incógnitas  $W_t$ ,  $F$  e  $p_d$  têm o mesmo significado da equação de Lewis e  $m$  é o módulo métrico. Os fatores  $K$  são modificadores que levam em conta diversas condições:  $K_o$ , fator de aplicação baseado no impacto transmitido;  $K_v$ , fator dinâmico que leva em consideração as vibrações;  $K_s$ , fator de tamanho do corpo de prova;  $K_b$ , fator de espessura da borda do anel da engrenagem;  $K_m$ , fator de distribuição de carga que leva em consideração o aumento da tensão na face do dente da engrenagem devido ao desalinhamento axial ou imperfeições.

### 2.3 Método de elementos finitos (MEF)

De acordo com Soriano (2009) e Chandrupatla (2014), o MEF é a resolução numérica de um sistema de equações diferenciais parciais e teve início na segunda metade da década de 1950 com a evolução da análise matricial e com o advento do computador.

De acordo com Budynas & Nisbett (2011) e Norton (2013), são usados elementos de diversas formas para análise no software de MEF. Os elementos podem ter uma, duas ou três dimensões e são chamados de 1-D, 2-D e 3-D, respectivamente. A dimensão de cada grupo define a quantidade de graus de liberdade, portanto os elementos com formas mais complexas possuem mais graus de liberdade.

Para Norton (2013) e Chandrupatla (2014), os refinamentos de elementos utilizados nas análises é o refinamento h-adaptativo e o refinamento p-adaptativo. O primeiro (h-adaptativo) reduz o tamanho dos elementos nos locais de maior tensão e aumenta o tamanho dos elementos nas regiões em que as variações de tensão são menores; já o segundo (p-adaptativo)

<sup>1</sup> Neste trabalho serão abordadas as duas unidades, pois a maioria dos catálogos e livros com relação à engrenagens ainda trazem as unidades no sistema americano.



permite aumentar a ordem do polinômio interpolador até nove ou mais, desta forma os elementos deste refinamento podem ser maiores que os do primeiro.

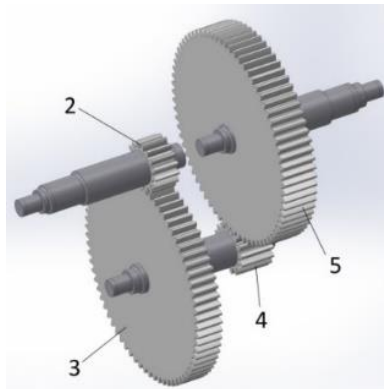
Segundo Chandrupatla (2014) e Soriano (2009), a malha é o resultado da divisão do modelo de estudo em vários elementos finitos com ligações nodais compartilhadas. Os pré-processadores, rotinas realizadas antes do processamento, em alguns *softwares* de simulação dão a opção de uma geração de malha manual, semi-automática e automática.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Neste capítulo, serão apresentados os pré-requisitos para o cálculo das tensões nas engrenagens de dentes retos e condições utilizadas na análise computacional. Primeiramente, para os cálculos analíticos, apresentou-se os dados essenciais, como: potência transmitida, velocidade de entrada e saída e o tamanho da caixa de engrenagem que alojará o trem de engrenagem. Na sequência calculou-se: torques, razões de transmissão, passo diametral, número de dente do pinhão e da engrenagem, velocidades e forças tangenciais que provocarão a tensão de flexão nos dentes. Ulteriormente, para os cálculos computacionais, apresentou-se os parâmetros utilizados na modelagem, tais como: dados construtivos da engrenagem, condições de contorno, carregamento submetido e local onde a força foi aplicada.

As engrenagens irão compor o trem de engrenagens composto de dois estágios de reversão, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Trem composto com duas inversões.



Para efeito de cálculo, adotou-se os seguintes parâmetros: a potência do motor a ser transmitida é 1,5 kW. A rotação do motor é 1.750 rpm. A velocidade de saída está entre 82 a 88 rpm. A altura máxima da caixa de engrenagens não deve exceder a 22 polegadas (558,8 mm). As engrenagens irão compor um trem de engrenagens composto de dois estágios de reversão.

Tendo em vista as definições supracitadas, os alunos ficaram encarregados de explorar livros e catálogos sobre as formulações utilizadas no cálculo analítico utilizadas em engrenagens de dentes retos. Além disso, para o cálculo computacional tiveram que utilizar conceitos interdisciplinares para a modelagem e simulação no *software*.

#### 3.1 Parâmetros e fórmulas utilizadas nos cálculos analíticos

A seguir serão determinados: torques, razão de engrenamento ( $m_v$ ), passo diametral mínimo ( $P_{min}$ ), diâmetros primitivos ( $d$ ) das engrenagens e dos pinhões, número de dentes no





pinhão ( $N_p$ ), velocidades ( $V$ ) e forças ( $W'$ ) tangenciais. Tais parâmetros foram definidos como essenciais para as formulações do cálculo analítico.

De acordo com Hibbeler (2010) e Beer & Johnston (2006) a relação de torque e potência está estabelecida, conforme Equação (8):

$$P = T_i \omega_i = T_f \omega_f \quad (8)$$

Onde:  $P$  é a potência transmitida;  $T_i$  e  $T_f$  são os torques de entrada e saída, respectivamente;  $\omega_i$  e  $\omega_f$  são as rotações de entrada e de saída, respectivamente. Assim, os torques ( $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  e  $T_5$ , para as engrenagens 2, 3, 4 e 5, respectivamente) podem ser determinados, conforme Equações (9) - (11):

$$T_2 = P/\omega_2 \quad (9)$$

$$T_3 = T_4 = T_2 \omega_2 / \omega_3 \quad (10)$$

$$T_5 = T_2 \omega_2 / \omega_5 \quad (11)$$

Para determinar a largura da face  $F$  de acordo com Mazzo (2013) e Budynas & Nisbett (2011),  $F$  deve possuir de três a cinco vezes o passo circular, conforme Equações (12) e (13) a seguir:

$$F = 4\pi/P \quad (12)$$

$$F = 3\pi/P \quad (13)$$

A razão de velocidades é dada manipulando a Equação (8) chegando à Equação (14):

$$m_v = T_i / T_f = \omega_f / \omega_i = N_2 N_4 / N_3 N_5 \quad (14)$$

Sendo:  $m_v$  a razão das velocidades (razão/fator de engrenamento);  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$  e  $N_5$  o número de dentes da engrenagem 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Conforme Budynas & Nisbett (2011), para calcular o passo diametral mínimo ( $P_{min}$ ), em um trem composto, em função da altura da caixa de transmissão, utiliza-se a Equação (15):

$$P_{min} = (N_3 + N_2/2 + N_5/2 + 2) / (\text{altura da caixa-folgas-espessura da parede}) \quad (15)$$

Pode-se calcular os diâmetros primitivos ( $d$ ) das engrenagens e dos pinhões, dividindo o número de dentes ( $N$ ) pelo passo diametral ( $P$ ), conforme Equações (16) e (17) a seguir:

$$d_2 = d_4 = N_2/P \quad (16)$$

$$d_3 = d_5 = N_3/P \quad (17)$$

Quando a engrenagem possui maior número de dentes que o pinhão, o menor número de dentes no pinhão ( $N_p$ ) para não haver interferência, é dado pela Equação (18) (MAZZO, 2013):



$$N_p = 2k\{m+[m^2+(1+2m)\sin^2\phi]^{1/2}\}/(1+2m)\sin^2\phi \quad (18)$$

Sendo:  $N_p$  o número mínimo de dentes do pinhão;  $k$  o coeficiente de altura (igual a 1 para dentes completos);  $m$  a razão entre a engrenagem e o pinhão;  $\phi$  o ângulo de pressão.

De acordo com Mazzo (2011), a velocidade tangencial ( $V$ ) do diâmetro primitivo pode ser calculada pela Equação (19):

$$V = \pi d \omega / 12 \quad (19)$$

Conforme Equação (20), a força tangencial será igual a (PROVENZA, 1991):

$$W^t = 33.000H/V \quad (20)$$

Onde:  $W^t$  a força tangencial;  $H$  a potência em HP;  $V$  é a velocidade tangencial no diâmetro primitivo.

Vale ressaltar, que a análise das formulações foram executadas pelos alunos. Todavia, apenas a aplicação de fórmulas é algo trivial na formação e ensino de engenharia, porém a análise destes resultados e a busca pela sinergia entre o cálculo analítico e computacional fomentaram aos alunos motivação para a resolução do problema. Algo que, infelizmente, muitas vezes não é fornecida em disciplinas de engenharia.

### 3.2 Parâmetros e condições utilizadas no cálculo computacional

De acordo com Provenza (1991) e Provenza (1976) para fabricação de engrenagem de dentes retos utiliza-se os requisitos de acordo com a Tabela 1. Como o número de dentes e o passo diametral são conhecidos eles foram utilizados como parâmetros para cálculo das demais variáveis. A Figura 3 apresenta o perfil dos dentes das engrenagens, evidenciando as medidas utilizadas.

Durante a modelagem, os cantos vivos foram suavizados, permitindo assim que o software SolidWorks® 2016 efetuasse a discretização dos elementos finitos sem o efeito dos cantos vivos, que atuam como concentradores de tensão, elevando assim, de forma significativa, a tensão na raiz dos dentes da engrenagem.

Figura 3 – Perfil dos dentes. (a) engrenagens 2 e 4 e (b) engrenagens 3 e 5.

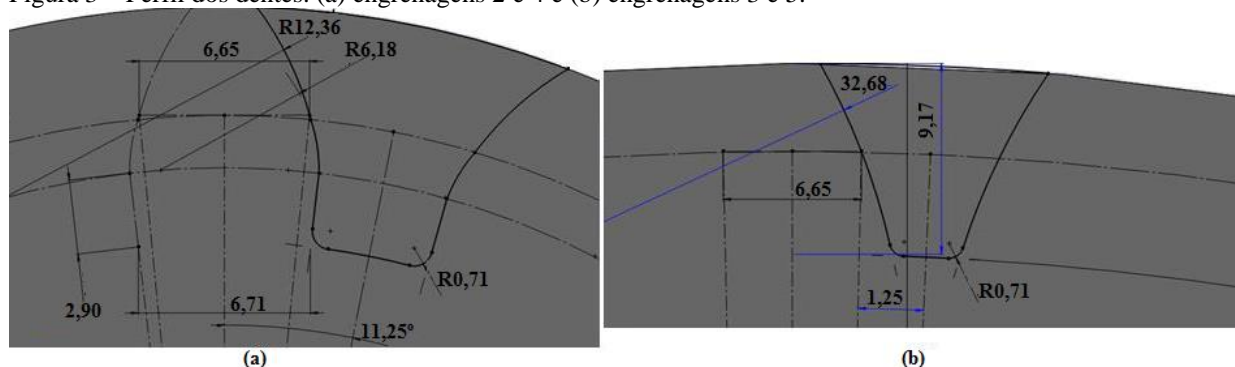


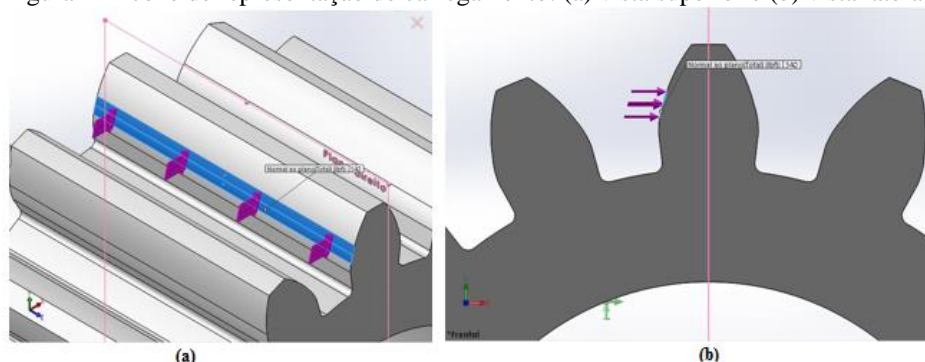


Tabela 1 – Dados construtivos das engrenagens 2, 3, 4 e 5.

Dados construtivos das engrenagens	Engrenagens 2 e 4	Engrenagens 3 e 5	Unidades
z (número de dentes)	16	72	[-]
m (módulo)	4,2333	4,2333	[-]
Ø primitivo	67,7333	67,7333	[mm]
Passo	13,2994	13,2994	[mm]
Espessura circ. e vão	6,6497	6,6497	[mm]
Espessura cordal	6,6392	6,6492	[mm]
Ø externo	76,2	313,2666	[mm]
Ø interno	57,8527	294,9194	[mm]
Ângulo de pressão	20	20	[°]
Ø do círc. da base	63,6485	286,4183	[mm]
Alt.cabeça do dente	4,2333	4,2333	[mm]
Alt. Cabeça do dente cordal	4,3964	4,2696	[mm]
Alt. do pé do dente	4,9403	4,9403	[mm]
Altura do dente	9,1736	9,1736	[mm]
Folga do pé do dente	0,0707	0,0707	[mm]
Comprimento min. do dente	25,4	25,4	[mm]
Ângulo do dente	5,625	1,25	[°]

Realizou-se uma análise estática das condições iniciais de repouso e a força tangencial que deverá ser aplicada equivale 539,7 lbf (2.401 N) para as engrenagens 2 e 3, e para as engrenagens 4 e 5 equivalem 2.431 lbf (10.814 N). Esta força deverá ser aplicada à altura do diâmetro primitivo, porém para que a tensão não tenda à magnitudes extremas é necessário definir uma pequena região em torno do diâmetro primitivo, então esta medida foi definida, a partir de testes preliminares, como 2 mm, ou seja, 1 mm abaixo do diâmetro primitivo e 1 mm acima, como evidenciado na Figura 4. A distribuição de pressão na região de contato não é linear, mas também não é concentrada, o que nos fez definir esta distribuição, a fim de evitar magnitudes de tensão na raiz do dente que extrapolem a tensão de escoamento do material<sup>2</sup>. Tornando assim, o resultado da análise mais próximo da realidade.

Figura 4 – Ícone de representação de carregamento: (a) vista superior e (b) vista lateral.



As condições de contorno requerem pouco modelamento, contudo deve observar-se que as engrenagens, todas as quatro, deverão ficar fixas no diâmetro interno, desta forma simulando a fixação no eixo para transmissão da potência.

<sup>2</sup> Material SAE 4140, com as seguintes propriedades: tensão de escoamento ( $\sigma_e$ ) de 412 MPa, densidade ( $\rho$ ) de 7,85 g/cm<sup>3</sup>, módulo de elasticidade ( $E$ ) de 205 GPa, coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,29 e dureza 92 HB (MATWEB, 2016).





Por fim, vale ressaltar a importância da utilização de softwares como ferramentas interdisciplinares no ensino de engenharia, pois fornecem resultados gráficos que favorecem o entendimento e análise dos procedimentos.

## 4 RESULTADOS

Primeiramente, apresenta-se os resultados da tensão nas engrenagens utilizando-se os cálculos analíticos e, posteriormente, expõe-se os resultados de tensão baseando-se no cálculo computacional.

### 4.1 Cálculo analítico da tensão nas engrenagens

Primeiramente, para o cálculo das tensões faz-se necessário determinar os torques, largura da face, fator de engrenamento, passe diametral mínimo, diâmetros primitivos e forças tangenciais. Por uma questão de limitação de espaço não será apresentado o cálculo e sim apenas o resultado, com a devida referência à equação pertinente. Visando assim, cumprir um objetivo secundário deste trabalho, que é fornecer aos alunos a capacidade de aplicar e analisar os resultados das equações utilizadas.

Baseando-se nas Equações (9) - (11) e nos parâmetros fornecidos no início do capítulo 3, os torques nas engrenagens podem ser definidos como:  $T_2 = 81,9 \text{ N.m}$ ;  $T_3 = T_4 = 368,5 \text{ N.m}$ ; e  $T_5 = 1.658,5 \text{ N.m}$ .

Para cálculo das tensões, será necessário determinar as larguras das faces ( $F$ ) de acordo com as Equações (12) e (13), portanto:  $F_{eng4-5} = 2 \text{ in} \therefore 50,8 \text{ mm}$  e  $F_{eng2-3} = 1,5 \text{ in} \therefore 38,1 \text{ mm}$ .

Checando-se quais são as larguras em disposição no estoque dos fabricantes, chega-se à conclusão que as larguras apropriadas para as análises serão 2 in (50,8 mm) para as engrenagens 4 e 5, pois o carregamento é mais crítico, e 1,5 in (38,1 mm) para as engrenagens 2 e 3.

Baseando-se na Equação (14) pode-se calcular o fator de engrenamento, uma vez que a rotação  $\omega_2 = 1.750 \text{ rpm}$  e  $\omega_5 = 85 \text{ rpm}$ , então:  $m_v = 1/20,59$ .

Através da Equação (15), pode-se estipular o  $P_{\min}$  para a altura geral da caixa de engrenagens, que é de 22 in (558,8 mm), considerando as folgas e espessuras de parede como 1,5 in (38,1 mm), então:  $P_{\min} = 6 \text{ dentes/in} \approx 1 \text{ dente a cada } 4 \text{ mm}$ .

Utilizando-se as Equações (16) e (17) pode-se calcular os diâmetros primitivos ( $d$ ) das engrenagens e dos pinhões, portanto:  $d_2 = d_4 = 2,67 \text{ in} \approx 67,82 \text{ mm}$  e  $d_3 = d_5 = 12 \text{ in} \approx 304,8 \text{ mm}$ .

Baseando-se na Equação (18) o número mínimo de dentes no pinhão será:  $N_p = 15,618 \therefore N_2 = N_4 = 16 \text{ dentes}$  e  $N_3 = N_5 = 72,64 \text{ dentes}$ .

Arredondando, para baixo, e testando para verificar se a rotação  $\omega_5$  está dentro dos limites aceitáveis. Tem-se:  $\omega_5 = 86,45 \text{ rpm} \therefore \omega_3 = \omega_4 = 388,9 \text{ rpm}$ .

A velocidade tangencial ( $V$ ) dos diâmetros primitivos são calculadas pela Equação (19), então:  $V_{eng2-3} = 1.223 \text{ ft/min} \approx 6,21 \text{ m/s}$  e  $V_{eng4-5} = 271,5 \text{ ft/min} \approx 1,38 \text{ m/s}$ .

Conforme a Equação (20), as forças tangenciais serão iguais a:  $W'_{eng2-3} = 539,7 \text{ lbf} \approx 2,4 \text{ kN}$  e  $W'_{eng4-5} = 2431 \text{ lbf} \approx 10,8 \text{ kN}$ .

Após todos os parâmetros supracitados terem sido definidos a Tabela 2 apresenta os resultados dos cálculos analíticos das tensões, baseando-se na equação AGMA conforme Equação (6) apresentada na Revisão da Literatura.



Tabela 2 – Variáveis e tensões das engrenagens 2, 3, 4 e 5.

	$W_t$ [lbf]	$K_o$ [-]	$K_v$ [-]	$K_s$ [-]	$P_d$ [dentes/in]	$F$ [in]	$K_b$ [-]	$K_m$ [-]	$J$ [-]	$\sigma_b$ [psi]	$\sigma_b$ [MPa]
Engrenagem 2	539,7	1	1,37	1	6	1,5	1	1,19	0,27	13.035	89,87
Engrenagem 3	539,7	1	1,37	1	6	1,5	1	1,19	0,41	8.584	59,94
Engrenagem 4	2.431	1	1,18	1	6	2	1	1,21	0,27	38.566	265,90
Engrenagem 5	2.431	1	1,18	1	6	2	1	1,21	0,41	25.397	175,11

Verifica-se que as tensões nas engrenagens 2, 3, 4 e 5, no SI, são: 89,87 MPa, 59,18 MPa, 265,90 MPa e 175,11 MPa, respectivamente. Valores abaixo do limite de escoamento do material SAE 4140, que vale 412 MPa.

## 4.2 Cálculo computacional da tensão nas engrenagens

### *Engrenagens 4 e 5*

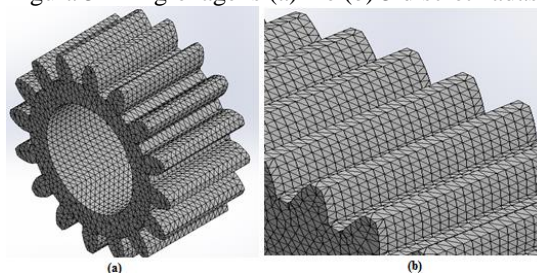
Com as condições de contorno e iniciais definidas, pode-se proceder com a criação da malha utilizando-se o software SolidWorks® 2016 Premium Edition. O tipo de elemento escolhido foi o tetraédrico, pois este elemento adapta-se melhor às superfícies curvas. As informações da malha são: malha sólida, utilizando gerador padrão, 16 pontos jacobianos, 2.407 mm o tamanho do elemento, tolerância de 0,12 mm e alta qualidade.

Após a configuração e formação da malha deve-se configurar as propriedades do estudo, tais como: tipo de análise estática, com geração de malha sólida, com efeito térmico ativado e utilizando o método h-adaptativo (tipo de interpolação do elemento finito).

O método h-adaptativo controla o tamanho dos elementos da malha, diminuindo onde a tensão é elevada, aumentando assim a precisão do estudo e aumentando o tamanho dos elementos onde a tensão é baixa, tornando o processamento mais rápido. Utilizou-se uma precisão alvo de 98%, com 50 desvios de precisão, 5 números máximos de loops e com a opção de engrossar malha ativada.

As condições iniciais e de contorno das engrenagens 4 e 5 são as mesmas. A Figura 5 ilustra a discretização das engrenagens 4 e 5.

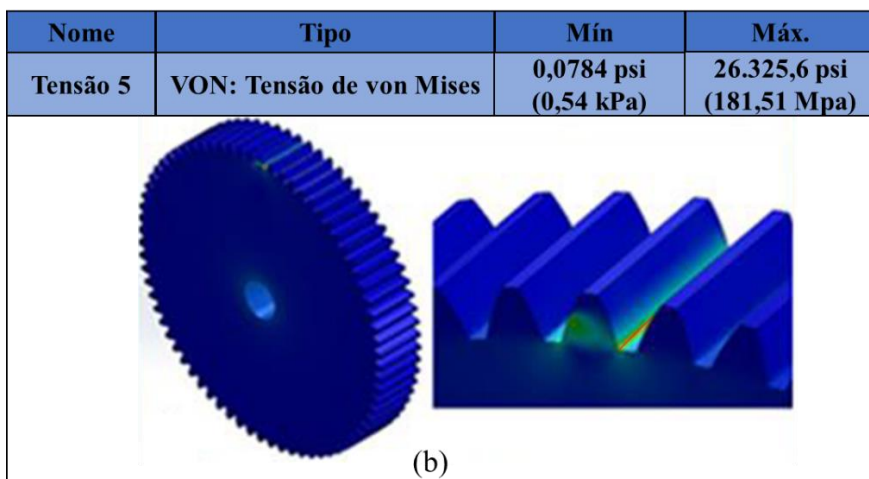
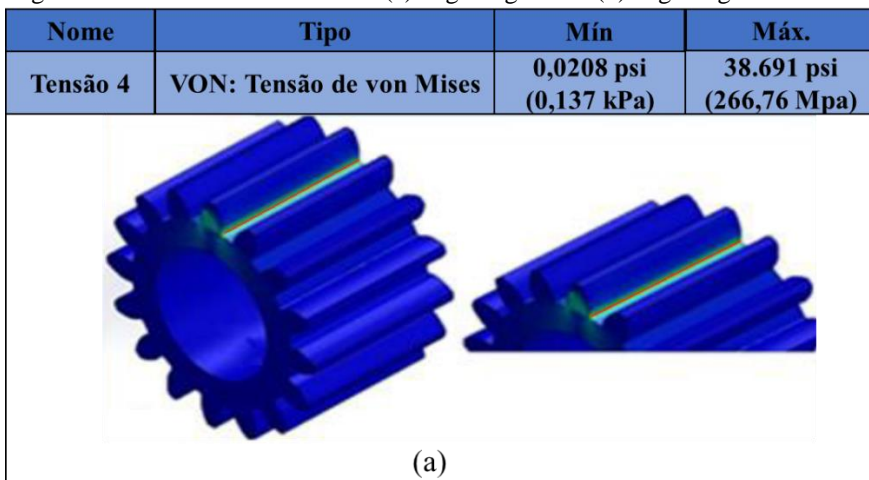
Figura 5 – Engrenagens (a) 4 e (b) 5 discretizadas.



Com o estudo definido pode-se executar a análise, as tensões obtidas estão apresentadas na Figura 6. A máxima tensão de flexão ocorre na raiz do dente para ambas, na engrenagem 4 seu valor é 38.691,0 psi (266,76 MPa) e na engrenagem 5 foi 26.325,6 psi (181,51 MPa). Valores abaixo da tensão de escoamento do material SAE 4140 (412 MPa).



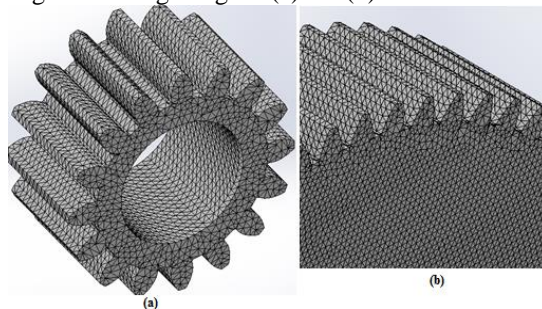
Figura 6 – Resultados das tensões: (a) engrenagem 4 e (b) engrenagem 5.



### Engrenagens 2 e 3

As condições iniciais e de contorno das engrenagens 2 e 3 são semelhantes às das engrenagens 4 e 5, o que altera é a intensidade do carregamento. As informações de malha das engrenagens 2 e 3 seguem o padrão das informações das engrenagens 4 e 5. A Figura 7 ilustra as discretizações das engrenagens 2 e 3.

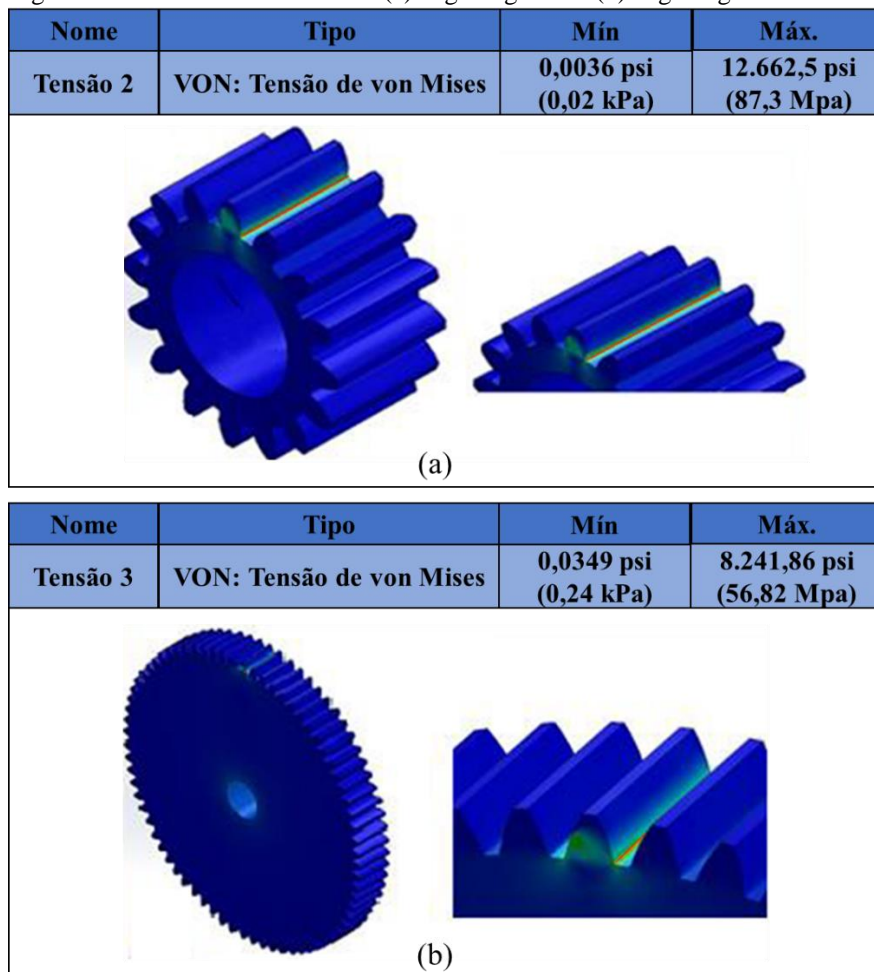
Figura 7 – Engrenagens (a) 2 e (b) 3 discretizadas.





As propriedades do estudo das engrenagens 2 e 3 são as mesmas das engrenagens 4 e 5, contudo os resultados das tensões foram muito diferentes devido à intensidade de carregamento, como apresentado na Figura 8. A máxima tensão de flexão ocorre na raiz do dente em ambas. A tensão máxima na engrenagem 2 foi de 12.662,5 psi (87,3 MPa) e na engrenagem 3 foi 8.241,86 psi (56,82 MPa). Valores abaixo do limite de escoamento do material SAE 4140, que vale 412 MPa.

Figura 8 – Resultados das tensões: (a) engrenagem 2 e (b) engrenagem 3.



## 5 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Comparando-se os resultados das análises, pode-se verificar que as tensões obtidas pelo método numérico apresentaram valores próximos aos valores obtidos pelo cálculo analítico, sendo que o maior desvio foi de 3,99%, na engrenagem 3, como apresentado na Tabela 3.

Analisando-se os resultados observa-se que os valores obtidos convergiram para valores próximos, sendo que a maior variação foi de 3,99% na engrenagem 3, onde a tensão é menor. A menor variação foi na engrenagem 4, onde a tensão é maior. Sendo assim a média de variação foi de 2,71%, uma variação aceitável, uma vez que o fator de segurança para cálculo de engrenagens, geralmente, é superior a 10%, em consonância com Hibbeler (2010) e Beer & Johnston (2006). Adicionalmente, ambas análises forneceram valores dentro da realidade.





Tabela 3 – Comparação dos resultados analítico/computacional.

	Tensão [psi]		Tensão [MPa]		Desvio [%]
	Cálculo analítico	Cálculo computacional	Cálculo analítico	Cálculo computacional	
Engrenagem 2	13.035	12.663	89,87	87,31	2,86
Engrenagem 3	8.584	8.242	59,94	56,83	3,99
Engrenagem 4	38.566	38.691	265,90	266,76	0,32
Engrenagem 5	25.397	26.326	175,11	181,51	3,66

## 6 CONCLUSÕES

De acordo com a metodologia adotada, as análises das tensões de flexão nos dentes retos de engrenagem cilíndrica cumpriram o objetivo deste trabalho, pois os dois métodos, numérico e analítico, foram realizados de forma congruente e apropriada, permitindo assim fazer a comparação dos resultados obtidos. A análise, pelo método analítico, foi realizada sem muitas dificuldades, pois foram apenas coletas de dados e aplicações de equações. Já a análise, pelo método numérico, foi árdua, porque diferente da análise analítica, não foi somente a obtenção de dados necessários para os cálculos, mas também houve a necessidade de desenvolvimento do modelo em CAD, de tal forma que representasse uma engrenagem real, necessitando de conceitos interdisciplinares. Os resultados obtidos evidenciam uma sinergia entre as análises uma vez que as tensões obtidas convergiram para valores aproximados, embora obtidos de formas distintas. O resultado adquirido também reforça a utilização de *softwares* de simulação para auxílio no ensino em engenharia, em razão da representação de situações reais, uma vez que além dos valores das tensões também exibe o resultado gráfico, auxiliando a análise. Além de fomentar a motivação dos alunos cria-se um desafio para os mesmos. Outrossim, vale ressaltar que as aulas tornaram-se mais interessantes e dinâmicas, contribuindo para o fortalecimento de conceitos essenciais aos futuros engenheiros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEER, F.; JOHNSTON, E. R. Resistência dos Materiais. 4. ed. Mcgraw Hill Artmed, 2006.  
 BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. Elementos de máquinas de Shigley: projeto de engenharia mecânica. 8 ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.  
 CHANDRUPATLA, T. R. Elementos finitos. 4 ed. São Paulo: Pearson Education, 2014.  
 HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7 ed. São Paulo: Pearson Pretince Hall, 2010.  
 MATWEB. *Online Materials Information Resource*: MatWeb, 2016. Disponível em: <<http://www.matweb.com>>.  
 MAZZO, N. Engrenagens cilíndricas: da concepção à fabricação. São Paulo: Blucher, 2013.  
 NORTON, R. L. Projeto de máquinas: uma abordagem integrada. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.  
 PROVENZA, F. Projetista de máquinas. 71. ed. São Paulo: F. Provenza, 1976.  
 PROVENZA, F. Desenhista de máquinas. 46. ed. São Paulo: F. Provenza, 1991.  
 SORIANO, H. L. Elementos Finitos: Formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.





## **TOOLS THAT AID IN ENGINEERING EDUCATION: COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN ANALYTICAL AND COMPUTATIONAL CALCULATION OF STRESS IN GEARS**

**Abstract:** *Transmitting power is one of the most common function of machines, which use transmission ratio systems to change the torque and speed. Spur gears are cylindrical pieces whose transmission is constant, regardless of the load. Studying the stress in the tooth root is important to verify whether the gears will not fail under bending stress. This study presents the analysis of bending stress in the tooth root of cylindrical spur gears. We also aim to make an analysis between two distinct methods (analytical and computational), aiming at the formation of these concepts for students, regarding the bending stress in the tooth root of spur gears, caused by tangential load in a power transmission and to perform a comparison between the results found by the two procedures. In addition to the development of the student's ability to solve problems by two aforementioned methods, a consolidation of computational tools is proposed as a support for engineering teaching. Results show a synergy between the analyses, since the stresses which were found led to approximate values. The result also reinforces the use of simulation software to aid in engineering education, aiming to make classes more interesting and dynamic, thus contributing to the development of essential concepts for future engineers.*

**Keywords:** *Cylindrical gear, Bending stress, Finite elements, Computational tools in engineering teaching.*