



DA TEORIA À PRÁTICA: IMPLEMENTAÇÃO DE EXPERIMENTOS PRÁTICOS DE RESFRIAMENTO NO ENSINO DA MATEMÁTICA APLICADA

Saul V. W. – saul.winik@gmail.com

Ricardo K. L. – ricolorenzoni@gmail.com

Antonio C. V. – valdiero@unijui.edu.br

Carla L. R. – carlaluiza96@hotmail.com

Universidade Regional do Noroeste do Rio Grande do Sul, Departamento de Ciências Exatas e Engenharias

Rua do Comércio, nº 3000

98700000 – Ijuí – Rio Grande do Sul

Resumo: Modelos matemáticos são ensinados no programa pedagógico desde as séries iniciais até a formação dos profissionais de diversas áreas e graus. No entanto sua abordagem em muitos casos é apenas teórica. Por este motivo alunos de diversos graus de conhecimento apresentam dúvidas sobre as reais aplicações sobre os conteúdos apresentados por seus professores. O objetivo deste artigo é apresentar uma abordagem pedagógica do estudo do fenômeno de resfriamento da água, utilizando experimentos práticos, simulações computacionais e análise matemática de dois modelos. Após a análise dos resultados constatou-se que os modelos representaram com eficácia o comportamento do resfriamento da água, porém apresentaram um pequeno erro em relação aos dados experimentais. Este resultado demonstra que a utilização dos modelos ensinados durante toda a caminhada escolar, tem aplicações diretas e indiretas no cotidiano do cidadão.

Palavras-chave: Experimentos Práticos, Modelagem Matemática, Ensino, Lei de Newton.

1. INTRODUÇÃO

Um dos fatores mais importantes no processo de aprendizagem é a implementação de experimentos práticos em conjunto com o ensino das teorias matemáticas. Este fator corresponde a dificuldade em que os alunos encontram em compreender desde o conteúdo até sua aplicação. Por este motivo é de suma importância identificar as aplicações práticas do estudo da matemática básica. A matemática está presente em nosso cotidiano aplicada diretamente ou indiretamente, sendo na vida profissional, acadêmica ou pessoal. Na vida profissional existem exemplos simples como quando é comprado um produto e deve-se dar o troco ou dar um desconto até exemplos mais complexos como construir um edifício ou dimensionar uma rede de distribuição de energia elétrica. Na vida acadêmica não é apenas para alunos da licenciatura em matemática, mas também no ensino de futuros bacharéis em medicina veterinária e engenheiros.



Um destes exemplos é o entendimento do fenômeno do resfriamento da água, presente quando se esquentam demasiadamente a água para o chimarrão, chás e cafés até no momento de cozer alimentos.

Apresentar a aplicação das teorias matemáticas em experimentos práticos dependem de diversos fatores, porém no estudo do fenômeno do resfriamento da água encontra-se uma facilidade em sua reprodução dentro de uma sala de aula por se tratar de uma prática que depende de poucas variáveis.

Este artigo tem como objetivo apresentar uma abordagem pedagógica do estudo do fenômeno de resfriamento da água, realizando assim experimentos práticos em conjunto com o estudo teórico e a aplicação de simulações computacionais do princípio da conservação de energia, e a equação desenvolvida por Isaac Newton que descreve matematicamente o fenômeno do aquecimento e resfriamento de líquidos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

A todo instante ocorrem diversos fenômenos físicos, em distintos lugares, sendo naturais ou artificiais. Um dos fenômenos que a raça humana se beneficia é a troca de calor entre corpos, podendo ser sólidos, líquidos e até gasosos. Exemplos deste fenômeno estão presentes em nosso cotidiano, sendo na rotina de cientistas com a criogenia molecular, ou no resfriamento de alimentos na geladeira de uma residência ou ainda na sensação térmica sentida pelo corpo humano quando está exposto a temperaturas elevadas ou muito baixas. Os fenômenos envolvendo a termodinâmica podem ser divididos em dois processos, o ganho e a perda de calor. Alguns autores vêm realizando estudos sobre os fenômenos da termodinâmica durante os últimos anos na área do ensino.

Parisoto (2013) realizou o estudo onde visou responder questões sobre a aprendizagem da física a partir de situações da engenharia, utilizando a integração entre métodos qualitativos e quantitativos. A partir dos métodos supracitados elaborou-se uma proposta de ensino que culminou em vários indícios de aprendizagem significativa.

Gonçalves (2005) utilizou tecnologias educacionais (vídeos, animações e simulações interativas de eventos físicos) como atividades complementares às aulas, visando a aprendizagem significativa da termodinâmica no ensino médio.

Assim este artigo tem o intuito de estudar academicamente o resfriamento natural da água armazenada em um recipiente onde ela esteja em diferentes temperaturas acima da temperatura do ambiente. A água foi escolhida para este estudo, pois já são conhecidas as suas características e assim pode-se verificar o comportamento da temperatura do líquido através do desenvolvimento de um modelo matemático de primeiro grau homogêneo (HALLIDAY *et al.*, 2012; TIPLER, 2012, YOUNG & FREEDMAN, 2008).

De acordo com Halliday (2012), define-se calor como sendo a energia transferida de um sistema para o ambiente ou o contrário devido à existência de uma diferença de temperatura.

A lei empírica de Newton do resfriamento, igualmente aplicável ao aquecimento, determina que a taxa de variação temporal da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio circundante (BRONSON & COSTA, 2008; ZILL, 2003). A aplicação da lei que Isaac Newton desenvolveu em 1701 varia conforme o sinal que a variável k assume. Para a Equação 7, se o valor de k for positivo a equação descreve o fenômeno do resfriamento de um corpo. Já se o valor de k for negativo a equação descreve o fenômeno do aquecimento do corpo (BRONSON & COSTA, 2008; ZILL, 2003).

O princípio da conservação de energia, ou primeira lei da termodinâmica diz que nenhuma energia é criada ou destruída, mas sempre transformada em forma de calor.



Mantendo assim um equilíbrio térmico dentro do sistema (HALLIDAY *et al.*, 2012; YOUNG & FREEDMAN, 2008).

Diferente da equação apresentada anteriormente, que apresenta o nome de seu desenvolvedor, ao final do século XIX já se considerava difícil afirmar quem teria descoberto o princípio da equivalência entre calor e trabalho, já que diversos estudiosos haviam abordado o tema (PASSOS, 2009).

2.1. Metodologia dos Experimentos Práticos

Antes da realização dos experimentos práticos deve-se determinar algumas hipóteses para melhor compreender o comportamento do fenômeno da troca de calor. Analisando a Equação 7, pode-se determinar o comportamento do resfriamento de um líquido até uma temperatura desejada, neste caso, sendo considerado como linear e a entrada é nula, a EDO é homogênea.

Então identifica-se que quando a variável tempo tender ao infinito a temperatura do fluido será a mesma ou muito próxima que a ambiente e que a taxa segundo a qual a temperatura da água varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente. Pois a troca de calor se dá do corpo de maior temperatura para o de menor temperatura.

No sistema estudado a água encontrava-se em uma temperatura maior do que a temperatura do meio ambiente. Assim, conforme o tempo de experimento avança, a água, por ser o corpo com maior temperatura, transfere calor para o ambiente com o intuito de aquecê-lo. Considerando que o volume do meio ambiente é maior que o volume da água, adotou-se uma temperatura ambiente constante e estável. Também foi estipulado, para este estudo, que a temperatura da água em todo o recipiente é homogênea.

Para a realização dos experimentos práticos, foi aquecida a água a uma temperatura entre a temperatura de ebulição da água e a temperatura do ambiente em um recipiente cilíndrico de metal revestida de teflon. Em seguida inseriu-se um equipamento de mensuração de temperatura na superfície da água e a cada intervalo de tempo foram coletadas a temperatura apresentada pelo equipamento e o tempo da coleta. O experimento prático se encerrou quando a temperatura mensurada pelo equipamento estava sem variação no tempo, formando uma reta perpendicular ao eixo das abscissas.

Pode-se utilizar um termômetro de mercúrio, termômetros digitais ou até mesmo pode-se desenvolver equipamentos que mensurem e colem a temperatura. No estudo realizado no laboratório foi desenvolvido um *software* em C# em conjunto com o projeto de um termômetro digital caracterizado por ter uma arquitetura eletrônica simples, de fácil manuseio, prático e compacto. A Figura 1 mostra este equipamento.



Figura 1 – Equipamento Desenvolvido:
Termômetro Digital e *Software*.



3. MODELAGEM MATEMÁTICA

Usando uma abordagem parecida com a que Winik (2017) realizou, primeiramente foi realizada a modelagem matemática através da utilização do princípio do equilíbrio térmico, por se tratar de uma modelagem mais simples e direta. A Equação 1 apresenta a forma genérica da primeira lei onde Q_{in} é a quantidade de calor inserida no sistema, Q_{out} é a quantidade de calor que é retirada do sistema, C é a capacidade térmica do corpo estudado e \dot{T} é a taxa de variação de temperatura entre o corpo e o meio que o circunda.

$$Q_{in} - Q_{out} = C \cdot \dot{T} \quad (1)$$

A partir do princípio da conservação de energia e considerando a temperatura do meio ambiente constante definiu-se a Equação 1, que descreve o fenômeno que ocorre experimentalmente. Para determinar a taxa da perda de calor convectiva da água como o meio ambiente Q_{out} , utilizou-se a Equação 2.

$$Q_{out} = h \cdot A \cdot T \quad (2)$$

Onde h é o coeficiente do fluxo de transferência térmica convectiva entre o fluido e o ar, A é a área de contato entre a água e o meio que a circunda e T a diferença de temperatura da água e do meio ambiente. Substituindo a Equação 2 na Equação 1 e admitindo que o fluxo de calor Q_{in} é nulo então obtém-se a Equação 3.

$$0 - h \cdot A \cdot T = C \cdot \dot{T} \quad (3)$$

A Equação 4 descreve a taxa de variação da temperatura da água no tempo.



$$\dot{T} = -\frac{h \cdot A \cdot T}{C} \quad (4)$$

Para não precisar determinar os valores de A , C e h será considerado a Equação 5 sendo R o coeficiente de resfriamento do sistema.

$$R = \frac{h \cdot A}{C} \quad (5)$$

Para determinar o valor de R utilizou-se os valores coletados experimentalmente em conjunto com a Equação 6. Onde t é o tempo em que a temperatura da água atinge 0,306 de seu valor máximo. Encontrado 0,00041254 como valor para R .

$$R = \frac{1}{t} \quad (6)$$

A lei de Newton para o resfriamento está formulada conforme a Equação 7, onde $\frac{dT}{dt}$ é a taxa de variação da temperatura do corpo em relação ao tempo, T é a temperatura do corpo, T_m é a temperatura do meio que circunda o corpo e k a constante de resfriamento/aquecimento. Neste artigo, por se tratar do estudo do resfriamento da água será atribuído um valor positivo para k .

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_m) \quad (7)$$

Realizando o estudo a partir da equação de Newton para o resfriamento, Equação 7, pode-se resolver através dos procedimentos matemático apresentados a partir da Equação 8.

$$\int \frac{dT}{dt} = k \int (T - T_m) \quad (8)$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = k \int dt \quad (9)$$

$$\ln(T - T_m) = k \cdot t + C \quad (10)$$

$$(T - T_m) = C \cdot e^{k \cdot t} \quad (11)$$

$$T(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + T_m \quad (12)$$

A Equação 12 representa a equação geral da resolução da Equação 7. Em sequência foi definido os valores de C e k para que assim fosse encontrada equação particular da Equação 7. Para obter seus valores foram determinadas duas hipóteses:



1) Quando $t=0$ então $T(t)=T(0)$;

$$T(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} + T_m \quad (13)$$

$$T(0) = C + T_m \quad (14)$$

$$C = T(0) - T_m \quad (15)$$

2) Quando $t=n$ então $T(t) = T(n)$, onde n é um número inteiro positivo não nulo;

$$T(n) = (T(0) - T_m) \cdot e^{k \cdot n} + T_m \quad (16)$$

$$T(n) - T_m = (T(0) - T_m) \cdot e^{k \cdot n} \quad (17)$$

$$\frac{T(n) - T_m}{(T(0) - T_m)} = e^{k \cdot n} \quad (18)$$

$$\ln\left(\frac{T(n) - T_m}{(T(0) - T_m)}\right) = k \cdot n \quad (19)$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{T(n) - T_m}{(T(0) - T_m)}\right)}{n} \quad (20)$$

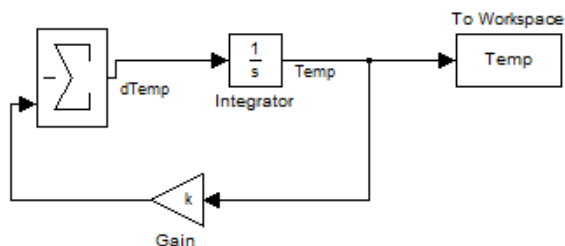
Obtendo assim a equação particular da lei de Newton para o equilíbrio térmico, representada pela Equação 21.

$$T(t) = (T(0) - T_m) \cdot e^{\left(\frac{\ln\left(\frac{T(n) - T_m}{(T(0) - T_m)}\right)}{n} \cdot t\right)} + T_m \quad (21)$$

Utilizou-se a ferramenta *Simulink* do *software* MATLAB para a implementação da Equação 4. O *Simulink* trabalha utilizando diagramas de blocos em conjunto de linhas de códigos do MATLAB. A Figura 2 demonstra o diagrama de blocos referente a Equação 4.



Figura 2 – Diagrama de Blocos.

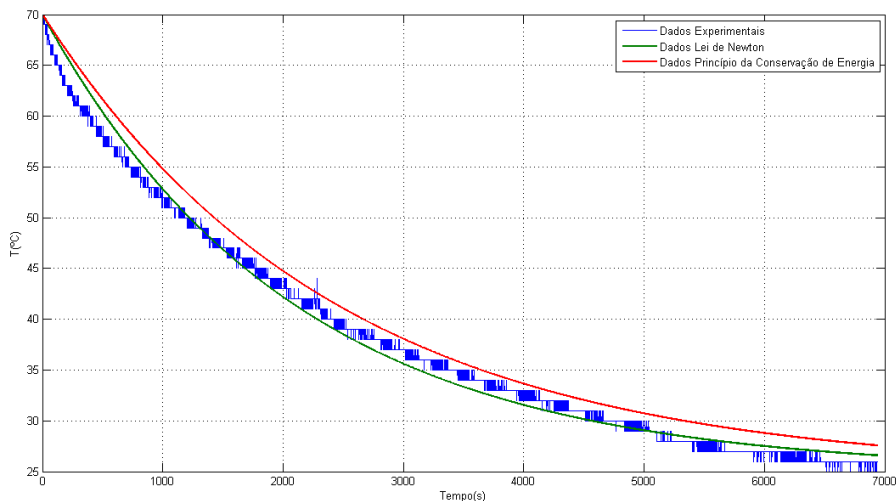


4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante o experimento prático, foram coletados os dados utilizados pelos modelos como a temperatura ambiente (25°C), temperatura inicial da água (70°C), temperatura final ($\approx 25^{\circ}\text{C}$) e tempo total do experimento (6940 s). Além de serem coletados 6940 dados de temperatura da água durante todo o experimento. Com o intuito de minimizar as não linearidades dos experimentos, por causa das hipóteses criadas, durante todo o experimento foi garantida a estabilidade da temperatura ambiente.

A implementação de dados na Equação 21 foi realizada em um código desenvolvido no *software* MATLAB. Com os resultados experimentais, da simulação utilizando a ferramenta *Simulink* e da simulação numérica da Equação 21, onde foi determinado os valores de $T(n) = 13,77^{\circ}\text{C}$, $T(0) = 70^{\circ}\text{C}$, $T_m = 25$ e $n = 2424$, foi gerado o gráfico apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Gráfico da Temperatura da Água no Tempo.



O sensor digital utilizado no equipamento de medição e a troca de calor ocorrida internamente na água resultaram no comportamento variante da curva dos dados experimentais.

Analisando a Figura 3, nota-se que os gráficos gerados pelas equações têm o mesmo comportamento dos dados experimentais, porém realizando o cálculo do erro padrão encontrou-se um erro padrão de $1,18^{\circ}\text{C}$ para os dados da equação de Newton e $2,04^{\circ}\text{C}$ para os dados encontrados utilizando o diagrama de bloco da Figura 2 e a equação da conservação de

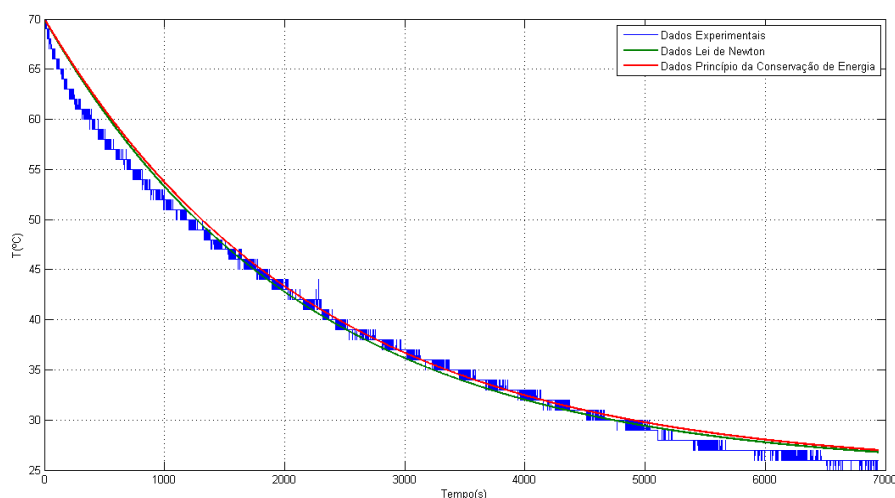


energia. Os valores dos erros foram calculados utilizando a Equação 22, que é a medida das diferenças entre os valores experimentais e os valores preditos através das equações, onde n é o número de amostras, D_{exp} são os dados experimentais e D_{cal} são os dados coletados (BUSSAB & MORETTIN, 2013; MAGALHÃES & LIMA, 2013; TRIOLA, 2004).

$$Erro = \sqrt{\frac{\sum(D_{exp} - D_{cal})^2}{(n - 2)}} \quad (22)$$

Assim, determinou-se que o valor atribuído para os coeficientes de resfriamento utilizados na equação de Newton e no princípio da conservação de energia estão imprecisos. Através de simulações computacionais foram denominados 0,00044964 para o coeficiente do resfriamento utilizado no princípio da conservação de energia e 0,00046496 para o coeficiente de resfriamento utilizado na equação de Newton para o resfriamento. Com esta mudança, após analisar o resultado apresentado na Figura 4 notou-se que os dados gerados pela equação de Newton apresentam uma mudança irrelevante no valor do erro padrão, porém os dados gerados pelo princípio da conservação de energia apresentaram um erro padrão de 1,30°C dos dados experimentais.

Figura 4 – Gráfico da Temperatura da Água no Tempo.



5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a análise dos erros padrões, pode-se afirmar que tanto a equação de Newton quanto a equação baseada na primeira lei da termodinâmica baseada no princípio da conservação de energia apresentaram um resultado aceitável. Pois ambas apresentaram um erro padrão próximo à 1°C. Devido as hipóteses desprezarem algumas variáveis não-lineares do sistema inicial e que o equipamento que mensura a temperatura tem um erro de 1°C, o erro encontrado é considerado um ruído branco. Assim pode-se afirmar que a utilização dos modelos ensinados durante toda a caminhada escolar, tem aplicações diretas e indiretas no cotidiano do cidadão. Desta forma apresentando uma resposta à dúvida que diversos alunos têm: “Onde vou utilizar este conteúdo na minha vida? ”.



Agradecimentos

Os autores agradecem ao CAPES, CNPq e a UNIJUÍ pelas bolsas de estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. Equações Diferenciais. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. 400 p.
- BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. Estatística básica. São Paulo: Saraiva, 2013.
- GONÇALVES, Leila de Jesus. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, Instituto de Física. Uso de animações visando a aprendizagem significativa de física térmica no ensino médio, 2005. 100p, il. Dissertação (Mestrado).
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos da Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica. Volume 2. Rio de Janeiro, LTC. 2012.
- MAGALHÃES, Marcos Nascimento; LIMA, Antonio Carlos Pedroso. Noções de probabilidade e estatística. São Paulo: Ed. USP, 2013.
- PARISOTO, M. F.; MOREIRA, M. A.. Ensino de física a partir de situações da engenharia. Anais: XLI – Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Gramado: UFRGS, 2013.
- PASSOS, J. C.. Os experimentos de Joule e a primeira lei da termodinâmica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 3, p. 3603, 2009.
- TIPLER, Paul Allen. Física para Cientistas e Engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica. Volume 1. Rio De Janeiro: LTC. 2012.
- TRIOLA, Mario F. Introdução a estatística: atualização da tecnologia. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- WINIK, S. V.; et al.. Abordagem Teórica-Experimental Para Aprendizagem da Modelagem Matemática do Resfriamento da Água. Anais: XXXVII – Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. São José do Rio Preto: FATEC, 2017. (Aprovado)
- YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.. Física 2: termodinâmica e ondas. 12 ed.. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.
- ZILL, Dennis G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003, 492 p.

FROM THEORY TO PRACTICE: IMPLEMENTATION OF PRACTICAL EXPERIMENTS OF COOLING IN THE TEACHING OF APPLIED MATHEMATICS

Organização



UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA



Promoção





Abstract: *Mathematical models are taught in the pedagogical program from the initial series to the training of professionals from different areas and degrees. However their approach in many cases is only theoretical. For this reason students of different degrees of knowledge present doubts about the real applications about the contents presented by their teachers. The objective of this article is to present a pedagogical approach to the study of the phenomenon of water cooling, using practical experiments, computational simulations and mathematical analysis of two models. After the analysis of the results, it was verified that the models represented with efficiency the behavior of the water cooling, but presented a small error in relation to the experimental data. This result demonstrates that the use of the models taught throughout the school walk has direct and indirect applications in the daily life of the citizen.*

Key-words: *Practical Experiments, Mathematical Modeling, Teaching, Newton's Law.*