A IMPORTÂNCIA DAS COORDENADAS ESFÉRICAS APLICADAS AO ELETROMAGNETISMO: LEI DE COULOMB

Resumo: *Este trabalho é baseado em uma proposta interdisciplinar no curso de engenharia elétrica entre as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II e Eletromagnetismo, com o objetivo de demonstrar como o eletromagnetismo pode ser usado para motivar e apresentar uma aplicação do cálculo dentro do curso de engenharia, utilizando como meio as coordenadas esféricas, que podem facilitar ao simplificar as contas e mostrar como elas auxiliam no cálculo de campo elétrico que precisa sofrer alterações para que seja calculado o campo de um corpo tridimensional, além de mostrar como as integrais auxiliam a achar o valor do volume retirado do corpo. Com o intuito de demonstrar da forma mais didática possível, os significados e as aplicações dessas matérias, para o fácil e rápido entendimento daquele que está aprendendo.*

Palavras-chave: *Coordenadas, esféricas, campo, elétrico, integral*

1. INTRODUÇÃO

Na sociedade contemporânea, o profissional da engenharia desenvolve diversos papéis. Muito além de apenas criar ou consertar algo, o engenheiro é de suma importância para o desenvolvimento da nação, participando diretamente da vida de cada um, seja nos eletrônicos, nas construções, nos meios de transportes, sempre há um por trás de uma inovação. Sabendo da importância de sua função, o engenheiro também trabalha pela segurança da sociedade, já que um erro em seus cálculos pode ser fatal.

No século XXI, a eletricidade se tornou primordial dentro da sociedade, estando presente em praticamente todos os setores, e a engenharia elétrica está diretamente conectada a este campo, pois onde há eletricidade, há um engenheiro eletricista fazendo com que isso aconteça. Um engenheiro eletricista atua em campos variados, desde pequenos circuitos até a área de geração e transmissão de energia, tendo grande atuação nos dias atuais.

Com tantas responsabilidades, é indispensável para o engenheiro uma formação de qualidade, onde o mesmo deverá não apenas aprender durante o curso a ciência por trás das grandes construções, mas também estimular o raciocínio lógico, a liderança e a ética profissional e social do engenheiro.

Em algumas instituições de nível superior, como onde esta pesquisa foi desenvolvida, a engenharia é dividida anualmente, tendo os dois primeiros anos chamados de ciclo básico, formado pelas disciplinas de matemática, física, química e computacionais consideradas indispensáveis ao curso de engenharia, e os outros 3 anos restantes como ciclo específico. E entre as muitas disciplinas existentes nesse curso, há o Cálculo Diferencial e Integral, que é essencial para todas engenharias, já que ensina conteúdos que serão levados até o final do curso, além de ser base para muitas outras disciplinas. E dentro do Calculo Diferencial e Integral II é apresentado o conteúdo de coordenadas esféricas, sendo esta, o conteúdo que se baseará esta pesquisa.

No ciclo considerado específico do curso, durante o terceiro ano, encontra-se a disciplina Eletromagnetismo que visa estudar e compreender os fenômenos elétricos e magnéticos associado tanto do ponto de vista estático, onde as cargas não flutuam, como em cargas em movimento, sendo o entendimento destes conteúdos de suma importância para o decorrer do curso.

Vista a importância dessas disciplinas, o objetivo desse trabalho é mostrar como um conteúdo de eletromagnetismo pode ser utilizado nas aulas de cálculo com o intuito de motivar os alunos ao aprendizado e também fazer uma breve apresentação de como a matemática será utilizada durante todo o curso, mostrando assim, que todo assunto aprendido durante o ciclo básico, principalmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, é essencial para a formação do engenheiro.

2. REFERENCIAL TEÓRICO EDUCACIONAL

A engenharia apresenta em uma de suas características o pragmatismo já conhecido, por isso por muitas vezes o interesse na área de educação reside na busca de ferramentas para realizar mudanças no processo de ensino e aprendizagem de forma objetiva e aplicável.

Optou-se pelo referencial educacional fundamentando no sociointeracionismo, proposto por Vygotsky, bem como pelo Modelo dos Campos Semânticos, proposto por Lins. No socionteracionismo tem-se a concepção de que no processo de aprendizagem a atuação do professor deve ser de mediador entre o conhecimento sistematizado e o aluno (BALESTIERI E DIAS, 2014) para proporcionar uma possível produção de significados aos discentes em relação aos objetos estudados em sala. (LINS, 1999; 2012)

Nesse sentido vale ressaltar que segundo Lins (1993)

> conhecimento é entendido como uma **crença -** algo que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma **afirmação** – junto com o que o sujeito considera ser uma **justificação** para sua **crença-afirmação**. (LINS, 1999b, p.86, grifos do autor).

Assim, deve-se observar as justificativas para entender qual o conhecimento que o aluno está adquirindo ou pensando.

> Na realidade, a psicologia nos ensina a cada instante que, embora dois tipos de atividades possam ter a mesma manifestação externa, a sua natureza pode diferir profundamente, seja quanto à sua origem ou à sua essência. Nesses casos são necessários meios especiais de análise científica para pôr nu as diferenças internas escondidas pelas similaridades externas. A tarefa da análise é revelar essas situações (VYGOTSKY, 2007, p.66).

Observa-se a partir disso que os alunos produzem significados distintos para uma mesma enunciação, devido a isso, se faz necessário realizar nas aulas atividades que consigam atingir a crença do aluno, fazendo com que ele produza significados para o conteúdo apresentado.

3. APLICAÇÃO

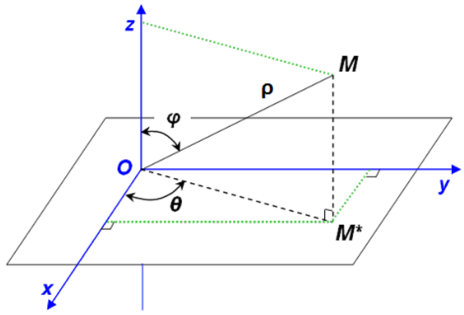
3.1 Coordenadas Esféricas

Coordenadas esféricas são sistemas eficazes quando falamos sobre calcular pontos tridimensionais ou curvas, pois o plano é baseado em uma semiesfera, que tem variações nos ângulos θ e φ e no raio ρ, sendo assim, um meio facilitador para encontrar um determinado corpo em qualquer lugar do espaço.

Com θ variando de $0 \leq \theta \leq 2\pi$ podendo percorrer todo o plano da esfera, φ variando de $0 \leq \varphi \leq \pi$, e o raio ρ pode assumir qualquer valor racional positivo.

Sendo normalmente dadas coordenadas retangulares, é feita a substituição através de equações para se obtenha as coordenadas esféricas:

Figura 1- Plano Esférico (Adaptado de https://pt.wikipedia.org/wiki/Wikip)



Pela imagem é possível através de 2 (dois) triângulos retângulos, achar que:

$$x = \rho \cdot sen\,\varphi \cdot cos\theta \tag{1}$$

$$y = \rho \cdot sen\varphi \cdot sen\theta \tag{2}$$

$$z = \rho \cdot cos\varphi \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \tag{4}$$

$$\varphi = cos^{-1}\frac{z}{\rho} \tag{5}$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{6}$$

Os ângulos e o raio das coordenadas esféricas podem sofrer uma taxa de variação d, que sendo essas variações aplicadas em forma de limite, é possível, por meio de uma integral tripla ser calculado o volume de determinado corpo.

Essa integral teria seus limites dados de acordo com a posição do corpo, mas podendo ir somente até a taxa máxima de variação de cada ângulo e ao tamanho do raio. Como ocorre uma mudança de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas, o diferencial da integral tripla também é alterado (preço de mudança de variável), precisando assim, calcular um determinante de X, Y e Z, que variam em ρ, φ e θ. Que resulta em um novo dV:

$$dx\,dy\,dz = \rho^2 \cdot sen\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta \tag{7}$$

$$\iiint_{\theta\varphi\rho} \rho^2 \cdot sen\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta \;\therefore\; \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\rho} \rho^2 \cdot sen\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta \tag{8}$$

3.2 Lei de Coulomb

Descoberta por Charles Augustin de Coulomb em 1785, a lei que recebe seu nome (Lei de Coulomb) consiste em calcular a força exercida por partículas eletricamente carregadas através da equação:

$$\vec{F} = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{r} \tag{9}$$

Com K sendo a constante eletrostática (K= $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$), Q_1 e Q_2as cargas das partículas 1 e 2, r é a distancia entre as cargas, e $\hat{r}$ é o vetor unitário na direção das duas cargas.

Baseando-se nessa equação, e utilizando uma carga de prova q_0 (carga positiva), calcula-se a força $\vec{F}$ que age sobre a carga q_0, e assim encontra-se o campo elétrico produzido pelo objeto, através da equação:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \;\therefore\; E = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_0}{r^2}}{q_0} \;\therefore\; E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \tag{10}$$

3.3 Prática

Usando a forma convencional da equação de campo elétrico, é possível encontrar o campo de uma carga puntiforme a uma distancia r, entretanto, para cálculos de um corpo/objeto tridimensional, a fórmula não é conveniente pois há um volume envolvido.

Para que se possa obter o campo elétrico de um determinado corpo é necessário que se faça o calculo de uma parte desse corpo, onde é encontrado um diferencial de volume (dV), que gera um diferencial de campo elétrico (dE):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \tag{11}$$

Porém, não se pode calcular dQ, pois o volume usa distribuição contínua de carga. Para achar esse valor, utiliza-se a densidade volumétrica de carga elétrica (μ) que calcula a quantidade de carga por volume (Q/v):

$$\mu = \frac{dQ}{dV} \quad \therefore \; dQ = \mu \cdot dV \tag{12}$$

Então, para que se obtenha o campo de corpos tridimensionais que sejam ocos ou maciços a uma determinada distancia, é calculado o valor do diferencial de volume através da integração de coordenadas esféricas, onde os limites são a variação dos ângulos e do raio, que na verdade são as dimensões do volume do corpo. Assim, após calcular a integral tripla, o valor é multiplicado pela densidade volumétrica da carga, e esse valor obtido, substituirá o dQ na equação de campo elétrico de Coulomb:

$$\int dE = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mu \cdot dV}{r^2} \tag{13}$$

Após isso, é possível substituir as coordenadas esféricas na equação (13) e chegar a uma nova forma de encontrar o campo elétrico em um corpo esférico:

$$\int dE = \int_0^{\theta=2\pi} \int_0^{\varphi=\pi} \int_0^{\rho} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho^2 \cdot sen\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta}{r^2} \cdot \mu \tag{14}$$

$$E = \frac{1 \cdot \mu}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \int_0^{\theta=2\pi} d\theta \int_0^{\varphi=\pi} sen\varphi\, d\varphi \int_0^{\rho} \rho^2\, d\rho \tag{15}$$

Terminada a substituição, é resolvida a integral tripla que gera a seguinte equação:

$$E = \frac{\mu \cdot \rho^3 \cdot 2 \cdot 2\pi}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot 3} \quad \therefore \quad E = \frac{\mu \cdot \rho^3}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \tag{16}$$

4. SUGESTÃO DIDÁTICA

Antes de falar sobre coordenadas esféricas, será proposto um modelo que pode vir a ser usado por professores de Cálculo Diferencial e Integral II para introduzir o assunto, o qual deverá apresentar o conteúdo de Eletromagnetismo que, no propósito deste artigo, consiste em calcular o campo elétrico através da Lei de Coulomb:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \tag{10}$$

Onde:

E = Campo Elétrico

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ = K = Constante Eletrostática

Q = Carga

r = Distância até o ponto

Essa equação permite que seja calculado o campo elétrico de uma carga unitária, que seria a força de interação que essa carga exerce ao seu redor a certa distância.

No entanto, ao ser calculado um campo elétrico de um corpo com três dimensões, ou seja, com determinado volume, não é apenas o campo de uma carga puntiforme que está sendo obtido e sim de uma grande porção delas. Com isso, há uma variação na proporção do que está sendo calculado, e para que a equação de Coulomb seja eficiente nesses casos, é feita uma adaptação nela: ao invés de uma carga Q, será usado $\mu \cdot dV$. Sendo:

μ= densidade volumétrica de carga elétrica

dV= diferencial de volume

Essa substituição mostra que ao invés do valor da carga, deve ser calculado o valor do volume de parte desse corpo e multiplica-lo pela densidade volumétrica de carga elétrica (quantidade de carga elétrica em um volume).

A fim de encontrar o volume de um corpo em determinado espaço, pode-se basear sua altura, largura e comprimento nas coordenadas X, Y e Z (coordenadas retangulares) que demonstram qual a dimensão desse volume, porém, tal corpo está a uma determinada distância do centro do plano, o que complica o cálculo, além de estar sendo calculado um volume de algo que tende a ser esférico com coordenadas propícias a calcular corpos retangulares.

Exemplo:

Figura 2 - Exercício calculando volume por coordenadas retangulares (Adaptado de: Cálculo B)

Expressar na forma de uma integral iterada tripla a integral $I = \iiint_t dV$, onde T é a região delimitada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 3z$.

A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representa uma esfera, e $x^2 + y^2 = 3z$ representa um paraboloide de concavidade voltada para cima.

A região T é delimitada inferiormente por z=$\frac{(x^2+y^2)}{3}$ e superiormente por z=$\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Sendo a região R a projeção de T sobre o plano xy, para obtê-la é necessário encontrar a intersecção das duas superfícies que delimitam T.

Substituindo $x^2 + y^2 = 3z$ na equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, fica $3z + z^2 = 4$.

Onde se conclui que z=1, portanto R é delimitado pela circunferência $x^2 + y^2 = 3$

Assim, podem-se estabelecer os limites da integral tripla para esse calculo como:

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{\frac{(x^2+y^2)}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$$

Para facilitar os cálculos do volume esféricos são usadas as coordenadas esféricas, que é um sistema útil quando se fala em corpos que têm simetria quando estão em volta de um ponto e eficaz para encontrar e dar dimensão a um corpo que está em qualquer lugar dentro de determinado espaço.

As coordenadas esféricas são baseadas em uma semiesfera que permite que um corpo esteja em qualquer ponto em sua superfície circular, onde o mesmo teria uma distância positiva (ρ) do centro, um ângulo θ que percorre toda superfície resultando numa variação de $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e outro ângulo φ que varia de $0 \leq \varphi \leq \pi$.

O cálculo de volume pode ser obtido através de uma integral, entretanto, como são três variáveis (ρ, θ, φ) e cada uma delas tem um limite diferente, é usada uma integral tripla a qual representará o ângulo θ, o ângulo φ e o raio ρ, respectivamente.

Como ocorre uma mudança de variáveis, o diferencial dessa integral tripla também é alterado, o que é chamado de "preço de mudança de variável". Para obter esse novo diferencial, é calculado um determinante, baseando-se nas coordenadas retangulares (x,y,z) com as coordenadas esféricas (ρ, θ, φ):

$$\mathrm{D} = \begin{matrix} X_\rho & X_\varphi & X_\theta \\ Y_\rho & Y_\varphi & Y_\theta \\ Z_\rho & Z_\varphi & Z_\theta \end{matrix} = \rho^2 \cdot sen\varphi \qquad (17)$$

Obtido o novo diferencial, é possível, usando as coordenadas esféricas, calcular o volume desejado do corpo esférico através de uma integral tripla:

$$\iiint_{\theta\varphi\rho} \rho^2 \cdot sen\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta \qquad (18)$$

Por fim, com as coordenadas esféricas, foi visto que a resolução de problemas que envolvem corpos esféricos fica mais simples, porém, como normalmente são dadas coordenadas retangulares, é feita uma substituição através das equações (1), (2), (3), (4), (5) e (6). Assim, aprendendo a teoria que foi dada, e sabendo utilizar as equações, o aluno deverá ser capaz de resolver problemas e entender o objetivo das coordenadas esféricas.

Exemplo:

Figura 3 - Exercício calculando volume por coordenadas esféricas (Adaptado de: Cálculo B)

Expressar na forma de uma integral iterada tripla a integral $I = \iiint_t dV$, onde T é a região delimitada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 3z$ e a região R é a projeção de T sobre o plano xy.

A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representa uma esfera, e $x^2 + y^2 = 3z$ representa um paraboloide de concavidade voltada para cima.

Substituindo $x^2 + y^2 = 3z$ na equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, fica $3z + z^2 = 4$.

Onde se conclui que z=1, portanto R é delimitado pela circunferência $x^2 + y^2 = 3$.

Sabendo disso, tem-se nas coordenadas esféricas que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$**,** e de acordo com a primeira equação do exercício mostra que $\rho = 2$.

Fazendo substituição de $x = \rho \cdot sen\,\varphi \cdot cos\theta$ e de $y = \rho \cdot sen\,\varphi \cdot sen\,\theta$, na segunda equação do exercício, é possível achar o ângulo φ:

$$(\rho \cdot sen\,\varphi \cdot cos\theta)^2 + (y = \rho \cdot sen\,\varphi \cdot sen\,\theta)^2 = 3$$
$$\rho^2 \cdot sen^2\varphi \cdot cos^2\theta + \rho^2 \cdot sen^2\varphi \cdot sen^2\theta = 3$$
$$\rho^2 \cdot sen^2\varphi(cos^2\theta + sen^2\theta) = 3$$
$$4 \cdot sen^2\,\varphi = 3 \quad \therefore \quad sen\,\varphi = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \therefore \quad sen\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

E por ultimo, o ângulo θ que varia de 0 a 2π.

Assim, podem-se estabelecer os limites da integral tripla para esse calculo como:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{2} \rho^2 \cdot sen\varphi \cdot d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi realizada por alunos do segundo ano de engenharia elétrica, com o objetivo de aprender e entender um assunto não visto ainda durante o curso para que fosse elaborado um método explicativo com base na visão de quem está aprendendo, e conseguir mostrar que independente de existirem muitas disciplinas diferentes, elas acabam interagindo em determinado momento.

A partir disso, foi possível compreender o conteúdo da matéria envolvida e realizar parte do artigo como uma aplicação do Cálculo Diferencial e Integral II dentro do Eletromagnetismo, e outra parte como um jeito didático para o professor passar essa matéria aos alunos de forma que a explicação tenha termos de rápido entendimento.

Pretende-se agora aplicar esse método em sala e realizar uma verificação dos resultados junto aos alunos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SADIKU, Matthew N.O. **Elemento de Eletromagnetismo**. 5. ed. Bookman, 2012

GRANVILLE, W.A.; SMITH, P.F.; LONGLEY, W.R. **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**. Rio de Janeiro: Editora Científica

LINS, R. C. **O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações.** In: ANGELO, C. L.; BARBOSA, E. P.; SANTOS, J. R. V.; DANTAS, S. C.; OLIVEIRA, V. C. A. Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história. 1ª edição. São Paulo: Midiograf, 2012. 280 p.

LINS, R C, **Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática.** In: Bicudo, M. A. V. (org). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 37- 60

THOMAS JR, George B. **Cálculo.** 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A. 1973

GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície.** 2. ed. Pearson

BONJORNO, Regina Azenha. et al. **Física Completa.** São Paulo: FTD, 2000

VYGOTSKY, L. S. **A Formação social da mete: desafio nos processos psicológicos superiores.** 7ª edição. São Paulo: Martins Fontes, 2007

BALESTIERI, J.A.P.; DIAS, R.A. **"Ensinando a ensinar engenharia" no contexto do uso racional da energia.** Anais: XLII — Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Juiz de Fora - MG: Universidade Estadual Paulista, 2014

THE IMPORTANCE OF THE SPHERICAL COORDINATES APPLIED IN ELECTROMAGNETISM: COULOMB LAW

Abstract: *This work is based on an interdisciplinary proposal in the course of electrical engineering between the disciplines of Differential and Integral Calculus II and Electromagnetism, with the objective of demonstrating how electromagnetism can be used to motivate and present a calculation application within the engineering course, How to equate the beads and show them as auxiliary in the electric field calculation that is necessary for the calculation of the field of a three-dimensional body, besides showing how integral integrals find the value Volume removed from the body. In order to demonstrate in the most didactic way possible, meanings and how to apply, a little, it is easy and quick to understand what you are learning.*

Key-words: *Coordinates, spherical, field, electric, integral*