SITUAÇÕES DA FÍSICA MOBILIZANDO CÁLCULO, ESTATÍSTICA OU PROBABILIDADE: EXEMPLOS A PARTIR DE UMA ANÁLISE DE LIVROS

Gabriel Loureiro de Lima – gllima@pucsp.br
PUC/SP, FCET, Departamento de Matemática
Rua Marquês de Paranaguá, 111, Consolação
CEP: 01303-50 – São Paulo – SP.
Maria Inez Rodrigues Miguel – minez@pucsp.br
Lydia Rossana Ziccardi Vieira – lydia@pucsp.br

Resumo: *A partir de uma análise de livros didáticos realizada em consonância aos preceitos da metodologia Dipcing, apresentamos, neste trabalho, exemplos de situações da Física, mobilizando conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, da Probabilidade e da Estatística, fundamentado, teoricamente, pela Matemática no Contexto das Ciências (MCC). Foi selecionada uma coleção de livros, indicada nas referências bibliográficas presentes no Projeto Pedagógico de Curso, de uma graduação em Engenharia Elétrica de uma Universidade privada de São Paulo. As situações apresentadas, com potencial para dar origem àquilo que, no âmbito da MCC recebe o nome de eventos contextualizados (projetos ou problemas integradores construídos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em cursos de Engenharia), ilustram vinculação intensa entre os conteúdos do Cálculo (especialmente no que se refere a funções de uma ou de várias variáveis, funções vetoriais, derivadas, integrais e integrais de linha) e aqueles trabalhados pelos estudantes nas disciplinas de Física Geral (FG), nos quatro primeiros semestres da Graduação. Por outro lado, ao menos nas aulas teóricas de FG, há reduzida mobilização de conceitos de Probabilidade e Estatística, quando comparados aos de Cálculo.*

Palavras-chave: *Matemática no contexto das ciências, Metodologia Dipcing, Física na Engenharia, Eventos contextualizados.*

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta parte dos estudos de investigação, ainda em andamento, do Grupo de Pesquisa: *A Matemática na Formação Profissional* (MFP) sediado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), tendo como fundamentação teórica *A Matemática no Contexto das Ciências* (MCC), desenvolvida por Patricia Camarena Gallardo (1982). As análises foram feitas segundo os preceitos da metodologia *Dipcing* (***Di****seño de* ***p****rogramas de estudio de matemáticas em* ***c****arreras de* ***ing****eniería),* (CAMARENA, 2002), construída para o planejamento das disciplinas de Física, Química e Matemática, como ferramenta de apoio em Cursos de Engenharia.

O presente artigo é constituído de resultados das análises de livros didáticos, que aparecem nas referências básicas de quatro disciplinas de Física do núcleo básico de um Curso de Engenharia Elétrica, buscando situações que possam servir de ponto de partida para professores de Matemática discutirem, de maneira contextualizada, conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, Estatística e Probabilidade.

No que se segue, são apresentadas considerações a respeito dos aspectos teóricos (MCC) e metodológicos (*Dipcing*) desta investigação.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: A TEORIA MCC

As investigações realizadas no âmbito do grupo MFP, especialmente aquelas inseridas na linha de pesquisa: *A Matemática como Componente Curricular de Cursos de Graduação*, sustentam-se, do ponto de vista teórico, na teoria MCC, que começou a ser desenvolvida há mais de trinta anos (1982), no Instituto Politécnico Nacional do México, por Patricia Camarena Gallardo

Por meio de cinco fases interligadas, denominadas, respectivamente, de *curricular*, *didática*, *cognitiva*, *epistemológica* e *docente*, esta teoria volta sua atenção para o ensino de Matemática em cursos que não visam à formação de bacharéis ou licenciados nesta ciência, mas sim engenheiros, biólogos, economistas, arquitetos, etc. Que Matemática ensinar nesses cursos? Para que ensiná-la? Como ensiná-la? Essas são questões chaves cujas reflexões a respeito estiveram diretamente relacionadas ao desenvolvimento da teoria MCC.

Conforme postula Camarena (2002, 2004, 2010, 2013), em cursos que não visam à formação de matemáticos, as disciplinas de Matemática devem ser elaboradas com programas específicos e objetivos buscando atender às necessidades daqueles profissionais que estão em processo de formação. Os professores devem ter clareza a respeito da necessidade, importância e utilidade de cada conteúdo do currículo de Matemática, destinado àquele público-alvo e de que maneira ele está vinculado às disciplinas não matemáticas e com o cotidiano profissional do futuro egresso. Entra em jogo, então, a questão da contextualização. Para Camarena (2010, p. 19 – tradução nossa), é necessário que um engenheiro "tenha uma forte formação em Matemática, porém em Matemática no contexto da Engenharia". A mesma autora salienta que, nos cursos de Engenharia, a construção significativa, de maneira estruturada e não fracionada, com amarras firmes e duradoras, de seus próprios conhecimentos, pode ser favorecida por meio de um ensino contextualizado da Matemática. (CAMARENA, 2013).

O desenvolvimento de currículos específicos para cada modalidade de Engenharia é o objetivo das reflexões a serem realizadas, a partir de dados coletados por meio da metodologia *Dipcing*, no âmbito da fase curricular da teoria MCC, na qual se insere a investigação relatada neste artigo. A seguir, teceremos considerações a respeito da metodologia *Dipcing* e dos procedimentos empregados para a coleta dos dados apresentados neste trabalho.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS: A METODOLOGIA *DIPCING*

Como apresentado em Camarena (2002, 2004) e em Lima, Bianchini e Gomes (2016), no âmbito da fase curricular da Teoria MCC, desenvolveu-se uma metodologia específica – a *Dipcing* - para a construção ou reformulação de currículos de Matemática em cursos de Engenharia. Tal metodologia é constituída de três etapas: *central*, *precedente* e *consequente*. No presente texto, nos detemos à etapa central, que visa a analisar de que maneira conceitos matemáticos são mobilizados por disciplinas não matemáticas, que estão presentes na grade curricular de determinada modalidade de Engenharia, no caso, a Elétrica.

A coleta de dados, na etapa central, segundo Camarena (2002, 2004), deve ser feita por meio da análise de livros didáticos, constantes nas referências das disciplinas não matemáticas da Engenharia em estudo. No âmbito do grupo MFP, no entanto, ao iniciarmos a análise de um determinado curso de Engenharia Elétrica, optamos por, antes de efetivamente recorrermos aos livros, realizar uma sondagem inicial junto aos docentes, buscando uma primeira percepção a respeito da vinculação entre as disciplinas matemáticas e as não matemáticas. Uma síntese dos dados obtidos por meio desta sondagem é apresentada em Lima *et al*. (2016). De posse dessas informações iniciais, demos início à análise dos livros, voltando nossa atenção apenas àquelas disciplinas não matemáticas que, segundo os docentes, efetivamente mobilizam conceitos matemáticos.

Decidimos, inicialmente, investigar quatro disciplinas de Física do núcleo básico[1]. Ao analisarmos, apenas superficialmente, os livros utilizados nas quatro disciplinas de Física, dos dois primeiros anos da graduação, percebemos que, neste componente curricular, semelhante ao que a sondagem inicial junto aos docentes indicou, há uma intensa mobilização de conceitos matemáticos. Optamos, então, inicialmente, em nos deter em uma análise da mobilização, nestas disciplinas, de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, Estatística e Probabilidade, procurando identificar situações contextualizadas que possam servir de apoio para a introdução de tais conceitos. Adotamos, como fonte para a coleta dos dados, os quatro volumes, da quinta edição, do livro *Fundamentos de Física* de David Halliday, Robert Resnick e Kenneth S. Krane, uma vez que esta obra consta nas referências presentes no Projeto Pedagógico do Curso das quatro disciplinas elencadas para nosso estudo.

Buscamos, nos livros selecionados para análise, situações da Física que, a nosso ver, podem servir de apoio para a construção do que Camarena (2013, p. 27) denomina, *eventos contextualizados* e que são, conforme explicitam Lima, Bianchini e Gomes (2016, p. 7-8), "problemas ou projetos que desempenham o papel de entes integradores entre disciplinas matemáticas e não matemáticas, se convertendo em ferramentas para o trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem" e que podem ser motivadoras, para a construção de novos conceitos, para exercitar conhecimentos anteriormente construídos, para avaliação, entre outras utilizações.

---

[1] As Diretrizes Curriculares dos Cursos de Engenharia (Resolução CNE/CES 11/2002) estabelecem que cada curso, independentemente de sua modalidade, deve contemplar, em seu currículo, uma divisão dos conteúdos em três núcleos: básico, profissionalizante e específico.

4. EXEMPLOS DE MOBILIZAÇÕES DE NOÇÕES DE PROBABILIDADE E ESTATÍTICA

Em termos de conceitos estatísticos mobilizados na Física, destacam-se aqueles da Estatística Descritiva, principalmente nas aulas práticas, com a coleta, organização, representação e análise de dados, conforme relato de professor do curso. No entanto, nos livros da coleção analisada, não há menção a experimentos para as aulas práticas. Há apenas a representação gráfica de medições experimentais da resistividade do cobre em diferentes temperaturas. O conceito mobilizado é a relação linear entre duas variáveis, sem fazer uso da regressão linear, mas esta pode ser explorada por meio dessa situação. Além do conceito físico da relação entre resistividade e temperatura, também é abordado o coeficiente médio. Nesta relação são mobilizados conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, como a taxa média de variação, inclinação da reta e derivada, associada ao coeficiente de temperatura da resistividade.

Associada à taxa de variação e de certa forma, também aos modelos Poisson e Exponencial, tem-se os conceitos de taxa de decaimento e emissão de partículas de amostras de materiais radioativos. A situação, em questão, considera uma amostra de $1\ mg$ de metal de urânio, contendo $2{,}5 \times 10^{18}$ átomos do emissor α de vida muito longa, o ^{238}U. Durante um intervalo de $1\ s$, cerca de 12 dos núcleos dessa amostra irão decair, emitindo uma partícula α durante o processo. Não se pode predizer se um determinado núcleo irá decair, mas admite-se que todos têm igual chance, ou seja, a probabilidade de um núcleo da referida amostra decair é, então, $\frac{12}{2{,}5\times10^{18}}$. Tem-se, nesse momento, mobilizado o conceito de probabilidade em espaços equiprováveis.

Dando continuidade à situação, a pretensão é a generalização, considerando N núcleos radioativos. Dessa forma, o caráter estatístico do processo de decaimento permite dizer que a taxa de variação do número de núcleos é proporcional ao número de núcleos presentes, ou seja, $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$. Nessa relação, aparece a constante de proporcionalidade λ, que é a constante de desintegração do Modelo de Poisson, cujo valor depende do núcleo radioativo considerado.

Na continuidade da situação, tem-se vários conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, como o uso da técnica de variáveis separáveis, na resolução da equação diferencial, e o uso do valor inicial para determinar o valor da constante de integração, como se pode constatar no que se segue.

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \Rightarrow -\frac{dN}{N} = \lambda dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int (-\lambda) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln|N| + k_1 = (-\lambda)t + k_2 \Rightarrow ln|N| = (-\lambda)t + k_3 \Rightarrow |N| = e^{-\lambda\, t + k_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = ke^{-\lambda\, t}$$

Considerando $N(0) = N_0$, isto é, N_0 é o número de núcleos radioativos da amostra no instante inicial, $t = 0$, tem-se: $N(t) = N_0\, e^{-\lambda\, t}$

Ainda na situação, tem-se que o interesse maior é na taxa de decaimento, definida por: $R(t) = \lambda\, N(t)$, já que λ é a constante de desintegração. Sendo R_0 a taxa de decaimento no instante inicial, tem-se que: $R(t) = R_0\, e^{-\lambda\, t}$, de onde se conclui que tanto o número de núcleos quanto a taxa de decaimento seguem a mesma lei exponencial.

Essa situação mobiliza conceitos da radioatividade e serve de motivação para introduzir os modelos Poisson e Exponencial, além de servir de apoio e dar significado a vários conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Outra situação, relacionada agora à Análise Combinatória, aborda uma questão de mecânica estatística bem simples, que é o seguinte: qual o número de formas de se dividir um pequeno número de moléculas entre duas metades de uma caixa. O objetivo é discutir o conceito de entropia, no caso moléculas de um gás que estão sempre em agitação, com moléculas “visitando” os possíveis microestados com probabilidades iguais.

A situação sugere distribuir 8 moléculas em duas metades de uma caixa. Pode-se considerar que os micro estados possíveis são $2^8 = 256$, assim considerados:

Tabela 1. Microestados: 8 moléculas em duas metades de uma caixa

N_1	N_2	Multiplicidade (w)	Entropia ($S = 1{,}38 \times lnw$) ($10^{-23} J/K$)
8	0	$\binom{8}{0} = 1$	0
7	1	$\binom{8}{1} = 8$	2,87
6	2	$\binom{8}{2} = 28$	4,60
5	3	$\binom{8}{3} = 56$	5,56
4	4	$\binom{8}{4} = 70$	5,86
3	5	$\binom{8}{5} = 56$	5,56
2	6	$\binom{8}{6} = 28$	4,60
1	7	$\binom{8}{7} = 8$	2,87
0	8	$\binom{8}{8} = 1$	0
total		256	

Fonte: Física 2, Resnick; Halliday; Krane, 5ed., LTC, 2011

Dessa forma, quando as 8 moléculas se movimentam aleatoriamente, o sistema gastará, em média, a mesma quantidade de tempo em cada um dos 256 microestados. Como as configurações são igualmente prováveis, a configuração com 4 moléculas em cada lado da caixa é a que tem maior probabilidade de ocorrer, porque ela inclui um número de microestados 70 vezes maior, inferindo a ideia de que, no equilíbrio térmico, espera-se encontrar as moléculas de gás uniformemente distribuídas ao longo do volume de seu recipiente.

A situação descrita, envolve o conceito de entropia e mobiliza aspectos da Análise Combinatória, em particular, os números binomiais e algumas propriedades de tais números, atribuindo-lhes algum significado, principalmente quando se discute o equilíbrio térmico.

5. EXEMPLOS DE MOBILIZAÇÕES DE NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Os conceitos trabalhados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral são amplamente mobilizados em situações da Física presentes na coleção analisada.

Por exemplo, a intensidade do campo elétrico produzido pelo disco considerado em um ponto sobre o seu eixo central pode ser obtida se conhecermos uma expressão para o potencial elétrico em qualquer ponto sobre o eixo central de tal disco. Sendo tal potencial dado pela função real de três variáveis reais (z, R, σ), $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$, então, devido à simetria circular do disco ao longo do eixo z, para qualquer valor de z, a direção do campo elétrico $\vec{E}$ tem de ser a desse eixo e, consequentemente, temos que determinar a intensidade da componente $\overrightarrow{E_z}$ de $\vec{E}$. Sabendo que a intensidade da componente $\vec{E}$ em qualquer direção é igual à menos a taxa de variação, nessa direção, do potencial elétrico em relação à distância de tal ponto ao centro do disco, recorremos à noção de derivada parcial e obtemos que:

$$\overrightarrow{E_z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \quad (1)$$

Podemos, a partir de tal expressão, deduzir aquela que nos possibilita obter a intensidade do campo elétrico produzido por uma placa infinita com carga uniformemente distribuída sobre um dos lados de um isolante, como, por exemplo, um plástico. Para isso, precisaremos recorrer a uma outra ideia do cálculo: a de limite de uma função. Interpretamos a expressão (1) anteriormente obtida como uma função real de uma variável real, a saber R, e então calculamos $\lim_{R \to \infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$, obtendo, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Destacamos outra situação utilizando conceitos de Cálculo, agora relacionada à densidade de energia de um campo magnético, que é a seguinte: um cabo coaxial longo é formado por dois cilindros condutores concêntricos de paredes finas com raios a e b. O cilindro interno transporta uma corrente constante i e o cilindro externo provê o caminho de retorno para esta corrente. A corrente cria um campo magnético entre os dois cilindros. Pede-se então que se calcule a energia armazenada no campo magnético para um comprimento l do cabo.

Para resolver este problema, a estratégia é calcular a energia total U_B armazenada no campo magnético a partir da densidade de energia u_B. Tal densidade de energia depende da intensidade B do campo magnético. Estas grandezas estão relacionadas por $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

Podemos determinar B recorrendo à simetria circular do cabo e usando a lei de Ampère com a corrente i dada: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$ (onde μ_0 é uma constante chamada *constante de permeabilidade*).

Comecemos exatamente pela determinação de B. Para isso, recorremos ao cálculo de uma integral de linha, utilizando uma trajetória de integração circular com raio r tal que $a < r < b$. A única corrente envolvida por essa trajetória é a corrente i no cilindro interno. A integral de linha torna-se bastante simples de ser calculada em razão da simetria circular; em todos os pontos da trajetória, $\vec{B}$ é tangente à ela e possui a mesma intensidade B. Adotamos então o sentido de integração ao longo da mesma como sendo aquele do campo magnético ao redor da trajetória. Assim, temos que: $\vec{B} \cdot d\vec{s} = Bdscos0 = Bds$. Logo: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint Bds = B \oint ds$

Mas a $\oint ds$ nos dará exatamente o comprimento da trajetória de integração, que como se trata de uma circunferência de raio r será $2\pi r$. Assim $B \oint ds = B(2\pi r)$ e então:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \Leftrightarrow B(2\pi r) = \mu_0 i$$

Consequentemente, $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$. Notemos então que a expressão que nos permite determinar a intensidade do campo magnético $\vec{B}$ é uma função real de duas variáveis reais (i e r). No contexto do problema, no entanto, i é constante e, portanto, tal expressão pode ser vista com uma função real de uma única variável real (r). Como a densidade de energia magnética de um campo magnético é $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$, então, neste caso considerado teremos:

$$u_B = \frac{\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$$

Assim como B, u_B também é função de i e de r, mas como, neste problema específico, i é constante, u_B depende apenas de r. Essa dependência indica que a densidade de energia não é uniforme entre os dois cilindros e assim, para determinar a energia total U_B armazenada, é necessário integrar u_B em todo esse volume. Devido a região entre os dois cilindros possuir simetria circular em torno do eixo central do cabo, consideramos o volume dV de uma casca cilíndrica localizada entre eles (e então mais uma ferramenta bastante discutida nas disciplinas de Cálculo, a obtenção de volume recorrendo à cascas cilíndricas, é mobilizada na situação física em análise). Tal casca possui raio interno r, raio externo $r + dr$ e comprimento l. A medida da área da seção transversal da casca será dada pela multiplicação da medida do comprimento de sua circunferência, que é $2\pi r$, pela medida de sua espessura, que é dr. Assim, a medida dV do volume da casca será: $dV = (2\pi r) \cdot dr \cdot l = 2\pi rldr$.

Como os pontos no interior desta casca estão todos aproximadamente à mesma distância radial r, podemos considerar que todos possuem a mesma densidade de energia u_B. Então, a energia total dU_B contida na casca cilíndrica de medida de volume dV será dada por: $dU_B = u_B dV$. Ou seja:

$$dU_B = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} \cdot 2\pi rldr = \frac{\mu_0 i^2 ldr}{4\pi r}$$

A energia total contida entre os dois cilindros será dada, portanto, pela integral definida, na variável r, de dU_B, de $r = a$ até $r = b$. Isto é:

$$U_B = \int_a^b dU_B = \int_a^b \frac{\mu_0 i^2 l dr}{4\pi r} = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} ln \left|\frac{b}{a}\right|$$

Como a e b são medidas de raios de cilindros, são números positivos e, portanto, podemos considerar: $U_B = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Fora do cilindro externo ou dentro do cilindro interno nenhuma energia está armazenada porque o campo magnético é nulo nos dois locais, o que pode ser verificado por meio da aplicação da lei de Ampère.

Exemplos da mobilização de conceitos de Cálculo no contexto da Física estão também presente em situações relativas a um sistema de partículas. Nestas são utilizadas as ideias de função vetorial e de suas derivadas. Vejamos, a título de ilustração, o caso de um sistema de duas partículas.

Podemos considerar um bastão composto por duas partículas, localizadas nas suas extremidades A e B e conectadas por uma fina haste rígida de comprimento fixo e massa desprezível. Utilizamos as leis de Newton para estudar o movimento de um objeto tratado como uma partícula e, no caso do bastão composto por duas partículas que estamos considerando, vamos separar o problema em duas partes: um *sistema* e sua *vizinhança*. É preciso então considerar as interações entre o sistema e sua vizinhança, interações estas denominadas de *forças externas*. As interações entre os objetos que pertencem ao sistema são chamadas de *forças internas*. No caso do problema considerado, o sistema é entendido como sendo as duas partículas e a haste que as conecta, sendo então a gravidade e a força normal externas ao sistema e, a força exercida pela haste em cada uma das partículas, uma força interna. Vamos supor que lançamos tal bastão sobre uma superfície horizontal, sem atrito, simplificação que elimina o efeito da gravidade na análise a ser realizada, e vamos examinar o seu movimento. Suponha que C seja o centro de massa do bastão (o centro de massa é, por definição, um ponto fixo em um objeto sólido cuja localização é determinada de acordo com a sua distribuição de massa).

As partículas A e B estão aceleradas, estando, portanto, em consonância à segunda lei de Newton, submetidas a uma força resultante. No ponto C não há nenhuma aceleração: sua velocidade é constante tanto em intensidade, quanto em direção. Este é o único ponto do bastão no qual isso ocorre. Vamos observar o movimento do bastão a partir de um sistema de referência que está se movendo com a mesma velocidade do ponto C. Tal ponto, neste referencial, aparenta estar em repouso. Em cada posição, o movimento resultante do bastão é uma rotação simples, com cada partícula tendo velocidade de rotação constante. Por meio da observação do centro de massa, é possível particionar o movimento complexo de um sistema em dois movimentos simples: o centro de massa move-se com velocidade constante e o sistema gira com velocidade angular constante em torno de C. Vamos, neste momento, voltar nossa atenção ao movimento retilíneo do centro de massa.

Considere que m_1 representa a massa da partícula A, enquanto m_2 a massa da partícula B. Os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ definem a posição de m_1 e m_2 em um determinado instante de tempo, em relação à origem do sistema de coordenadas adotado. A posição do centro de massa é definida neste instante de tempo pela função vetorial $\vec{r}_{cm}$ dada por: $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$. Portanto, a abscissa x_{cm} e a ordenada y_{cm} do centro de massa são dadas por: $x_{cm} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ e $y_{cm} = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$. Em um instante subsequente, o sistema movimentou-se para uma nova posição e a localização do centro de massa, consequentemente, também se altera. Vamos então determinar a velocidade $\vec{v}_m$ e a aceleração $\vec{a}_m$ do centro de massa.

Para isso recorremos à derivação de uma função vetorial, uma vez que:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

Por sua vez:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}$$

Por meio destes exemplos pôde-se verificar uma diversidade de aplicações de Cálculo existente nas diversas disciplinas de Física que compõem a grade curricular do curso de Engenharia Elétrica.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo apresenta resultados de uma investigação em livros didáticos de Física, utilizados nas quatro disciplinas de Física Geral do curso de Engenharia Elétrica, explicitando conceitos de Cálculo Diferencial e Integral e de Estatística mobilizados.

Um dos objetivos desta pesquisa é, justamente, estreitar o contato dos docentes encarregados das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e de Estatística, com algumas das aplicações dos conceitos que ensinam, considerando as dificuldades de aprendizagem e falta de interesse. Para tal, apresentamos situações da Física, que podem ser motivadoras para a introdução de novos conceitos, aplicação de conteúdos já trabalhados, ou para dar significado àqueles em discussão.

Analisando a coleção de livros didáticos selecionada, observamos que os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente no que se refere a funções de uma ou de várias variáveis, funções vetoriais, derivadas, integrais e integrais de linha, são amplamente utilizados nos seus quatro volumes e os conceitos de Estatística também são empregados, mas, em intensidade menor.

As poucas situações tratadas neste texto dão indícios de uma necessária reformulação curricular nas disciplinas Matemáticas em cursos de Engenharia, incluindo a sequência em que alguns conteúdos são apresentados. Por exemplo, a noção de função vetorial é introduzida somente no quarto semestre, no curso em questão, embora seja necessária já no segundo semestre, na disciplina de Física, para estudo de sistema de partículas.

Em lugar de se trabalhar com uma organização linear de conteúdos matemáticos, podemos adotar uma, em espiral, na qual um mesmo conceito pode ser apresentado em diferentes momentos, com níveis crescentes de dificuldade, generalidade e rigor, favorecendo uma maior integração entre as disciplinas matemáticas e as não matemáticas, nos cursos em que a Matemática está a serviço. Esse aspecto é importante para o desenvolvimento de competências e habilidades que propiciam a aquisição da necessária autonomia para uma aprendizagem com significado, além de auxiliar na motivação.

Finalizando esse texto, ressalta-se que, embora a pesquisa tenha mostrado que os livros indicados, nas referências de Física, mobilizam conceitos de Cálculo e de Estatística, ainda é necessário pesquisar se a linguagem e a representação utilizadas pelos professores de tais disciplinas e aqueles das específicas são adequadas para o estudante fazer a transposição necessária para a compreensão dos conteúdos relacionados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMARENA, P. Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. Revista Innovación Educativa, vol. 2, n. 10 e n. 11, pp. 22-28 e 4-12, 2002.

______. Constructos Teóricos de la Metodología Dipcing en el Área de la Matemática. Memórias: 3º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. Ciudad de México: IPN - ESIME – SEPI, 2004.

______. Aportaciones de Investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería, 2010. Disponível em: <http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf> - Acesso em 28 de jan. 2016.

______. A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. Innovación Educativa, vol. 13, n. 62, 2013.

HALLIDAY, D.; RESNICK R.; KRANE, S.K. Física (1, 2, 3 e 4) – Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos, 2011 (1, 2, 3) e 2012 (4).

LIMA, G. L., BIANCHINI, B. L., GOMES, E. Dicping: uma metodologia para o planejamento ou redirecionamento de programas de ensino de Matemática em cursos de Engenharia. Anais: XLIV - Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Natal, 2016.

LIMA, G. L. *et al*. Vinculação entre as disciplinas matemáticas e as não matemáticas na Engenharia Elétrica. Anais: XLIV - Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Natal, 2016.

SITUATIONS OF PHYSICS MOBILIZING CALCULUS, STATISTICS OR PROBABILITY: EXAMPLES FROM A BOOK ANALYSIS

Abstract: *Based on an analysis of textbooks carried out in accordance with the precepts of the Dipcing methodology, in this work, theoretically based on Mathematics in the*

Context of Sciences (MCC), we present examples of Physics situations mobilizing concepts of Differential and Integral Calculus, Probability and Statistics. We selected for the analysis a collection of books indicated in the bibliographic references present in the Pedagogical Project of a graduation course in Electrical Engineering offered by a private university in the city of São Paulo. The situations presented, with the potential to give rise to what, within the scope of the MCC is called contextualized events (projects or integrating problems built for teaching and learning mathematics in Engineering courses), illustrate intense linkage between the contents of Calculus (Especially with respect to the functions of one or several variables, vector functions, derivatives, integrals and line integrals) and those worked by the students in the General Physics (GP) disciplines, which are offered in the first four semesters of the undergraduate courses under analysis. On the other hand, at least in the theoretical classes of GP, there is reduced mobilization of concepts of Probability and Statistics, when compared to those of Calculus.

Keywords: *Mathematics in the context of sciences, Dipcing Methodology, Physics in Engineering, contextualized events*.