



## **DISPOSITIVO DIDÁTICO PARA MEDIÇÕES DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES PRINCIPAIS**

**Sofia Glyniadakis** – [sofiagly@gmail.com](mailto:sofiagly@gmail.com)

UNESP – Campus de Guaratinguetá, Departamento de Mecânica.  
Avenida Ariberto Pereira da Cunha, 333 – Portal das Colinas.  
12516-410 – Guaratinguetá – São Paulo

**Eng. Walter Luiz Medeiros Tupinambá** – [waltertupi@hotmail.com](mailto:waltertupi@hotmail.com)

UNESP – Campus de Guaratinguetá, Departamento de Mecânica.

**Prof. Dr. José Elias Tomazini** – [tomazini@feg.unesp.br](mailto:tomazini@feg.unesp.br)

UNESP – Campus de Guaratinguetá, Departamento de Mecânica.

**Prof. Dr. José Geraldo Trani Brandão** – [brandao@feg.unesp.br](mailto:brandao@feg.unesp.br)

UNESP – Campus de Guaratinguetá, Departamento de Mecânica.

**Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins** – [marcelo.sampaio@feg.unesp.br](mailto:marcelo.sampaio@feg.unesp.br)

UNESP – Campus de Guaratinguetá, Departamento de Mecânica.

**Resumo:** *O presente trabalho descreve um dispositivo patenteado (BR 10 2016 008850 0) pelo Departamento de Mecânica da UNESP – Campus de Guaratinguetá, destinado ao ensino de medições de tensões e deformações principais em estruturas. Mais especificamente, compreende um dispositivo capaz de demonstrar, de forma clara e simples as questões tratadas convencionalmente de forma teórica, em sala de aula, tal como a combinação de carregamentos, flexional, normal e torcional, e as cargas cortantes na estrutura. Através de um equipamento condicionador de sinais, conectado a um computador, dados de deformação específica normal, registradas a partir de extensômetros elétricos de resistência (roseta de deformação), colado no dispositivo, são coletados e então os estudantes são capazes de calcular as deformações e tensões principais que surgirem de forma experimental e teórica, ampliando, desta forma, os conhecimentos nestas competências ligada a mecânica dos materiais.*

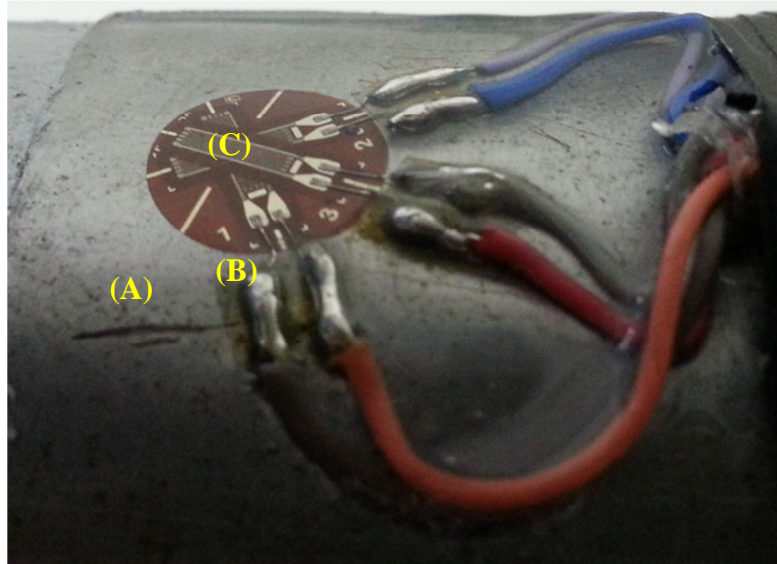
**Palavras-chave:** *Dispositivo Didático, Tensões e Deformações Principais, Extensometria Elétrica de Resistência.*



## 1. INTRODUÇÃO

Materiais sólidos tendem a deformar-se (ou eventualmente se romper) quando submetidos a solicitações mecânicas. (BEER, 2011), (GERE, 2012). A Resistência dos Materiais é um ramo da Engenharia que tem como objetivo o estudo do comportamento de elementos construtivos sujeitos a esforços, de forma que eles possam ser adequadamente dimensionados para suportá-los nas condições previstas de utilização. A análise e o projeto de uma estrutura implica a determinação das tensões e das deformações. Quando não se conhece nada a respeito do estado de tensão em um elemento estrutural, é necessário medir as deformações em três direções a fim de caracterizar o estado de tensão neste ponto. Na prática, são posicionados três extensômetros em três direções A, B e C, que formam, respectivamente, ângulos  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  e  $\theta_C$  com um eixo  $x$  arbitrário, os quais são denominados rosetas de deformação, conforme mostrada na Figura 1, onde observa-se a disposição e orientações dos extensômetros. (DALLY & RILEY, 1978).

Figura 1 – Colagem da roseta de deformação no dispositivo.



## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Quando uma barra ou eixo são submetidos à ação de forças axiais, a seção transversal perpendicular ao eixo da barra ou eixo fica sujeita a forças internas perpendiculares (normais) ao plano da seção transversal e as correspondentes tensões são chamadas de tensões normais. (HIBELLER, 2012). A Equação 1 mostra o exemplo de tensão normal em uma barra sob a ação de força axial.

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1)$$

Sendo “P” a intensidade da resultante das forças internas que atuam na seção transversal e “A” a área dessa seção. A distribuição uniforme de tensões só é possível se a linha de ação das forças aplicadas passar pelo centróide da seção considerada. Este tipo de carregamento é chamado de carga centrada. No entanto, se uma barra é carregada axialmente, mas não de forma centrada, as forças internas em uma seção transversal devem ser equivalentes à força aplicada ao centróide dessa seção, e um conjugado  $M$ , de intensidade dada pelo momento  $M = P.d$ . A distribuição de tensões, então, não pode ser uniforme ou simétrica. (BEER, 2011), (HIBELLER, 2012), (TIMOSHENKO, 1983).



Quando um membro prismático está sujeito a dois conjugados ou momentos, iguais e de sentidos opostos, atuando no mesmo plano longitudinal, diz-se que está sob flexão pura. O momento desse conjugado é chamado de momento fletor da seção. É comumente utilizada a convenção de indicar como positivo o momento  $M$  que flexiona a barra e como negativo o caso em que  $M$  está em sentido oposto. Usando o princípio da superposição, pode-se combinar as tensões obtidas para o caso de carga centrada com as tensões provocadas pela flexão pura, e assim é possível encontrar a distribuição de tensões para a carga excêntrica. O estudo da flexão pura tem também um papel importante na análise de vigas, que são peças prismáticas submetidas a cargas transversais ao eixo. O valor da tensão a uma dada distância  $y$  da linha neutra é dado

pela Equação 2, onde  $I$  é o momento de inércia da área da seção transversal em relação à linha neutra. A Equação 2 ilustra o cálculo da flexão em regime elástico. (GERE, 2012)

$$\sigma = - \frac{M \cdot y}{I} \quad (2)$$

A tensão normal provocada quando a barra se flexiona é chamada de tensão de flexão. A tensão acima do eixo neutro (quando  $y > 0$ ) é de compressão, quando o momento  $M$  é positivo, e de tração quando o momento  $M$  é negativo. Considerando uma viga com plano vertical de simetria, submetida a um carregamento distribuído ou concentrado que atua nesse plano, e sendo “ $V$ ” a força cortante vertical em qualquer seção transversal, a força horizontal de cisalhamento por unidade de comprimento, ou fluxo de cisalhamento “ $q$ ” em um ponto dessa seção é dada pela Equação 3. (BEER, 2011)

$$q = \frac{V \cdot Q}{I} \quad (3)$$

Sendo “ $I$ ” o momento de inércia da seção em relação à linha neutra e “ $Q$ ” o momento estático de área definido pela Equação 4. (HIBBELER, 2012)

$$Q = A \cdot \bar{y} \quad (4)$$

Nesse caso, “ $A$ ” é a área que fica acima da linha da altura “ $y$ ” desejada em relação à linha neutra na seção transversal, e “ $y$ ” é a distância do seu centróide até a linha neutra. Tem-se, então, que a tensão de cisalhamento, devido ao esforço cortante, é dada pela Equação 5, sendo “ $t$ ” a largura da seção horizontal. (BEER, 2011), (HIBBELER, 2012).

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} \quad (5)$$

Nas faces superior e inferior da viga a tensão é nula, uma vez que não há forças atuantes nessas faces. Segue daí que a tensão de cisalhamento é nula na aresta superior e na aresta inferior da seção transversal. A tensão de cisalhamento devido à torção numa barra circular varia linearmente com a distância “ $p$ ” do eixo da barra, desde que a tensão de escoamento não for atingida. A Equação 6 mostra a fórmula da torção em regime elástico. (GERE, 2012), (HIBBELER, 2012).



$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J} \quad (6)$$

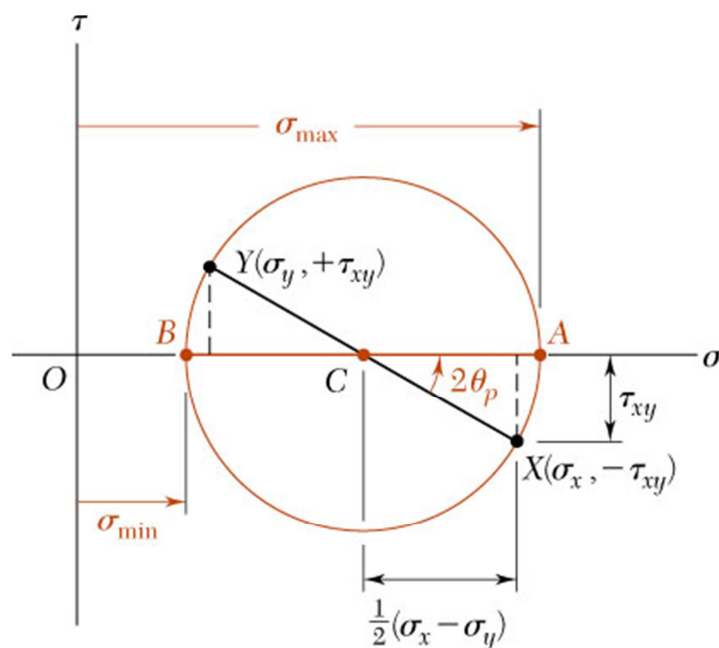
No caso de um eixo circular de secção vazada com raio interno  $c_1$  e raio externo  $c_2$ , o momento polar de inércia será dado conforme a Equação 7.

$$J = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (c_2^4 - c_1^4) \quad (7)$$

Considera-se, agora, um estado de tensão mais geral num elemento onde não só atua tensão normal em uma direção, mas em duas direções. Tal situação é conhecida como tensões biaxiais. Distinguindo-se, assim da tensão em uma direção, ou uniaxial. As tensões biaxiais aparecem em análise de vigas, eixos, chapas etc. No momento, o interesse é determinar as tensões normais e tangenciais num dado plano de um estado de tensão. (TIMOSHENKO, 1983). Frequentemente, no estudo das tensões, o interesse está voltado para a determinação da maior e da menor tensão e também em que planos ocorrem tais tensões. Os planos em que atuam as máximas tensões são chamados de planos principais de tensão e as tensões máximas são chamadas tensões principais.

O Círculo de Mohr é uma forma gráfica de resolver um estado de tensões e pode ser usado para deformações. Para que seja possível o uso do Círculo de Mohr, é necessário que cada plano seja representado por um ponto em um sistema de coordenadas. Os planos das tensões principais são representados por pontos que se encontram no eixo, já que neles a tensão de cisalhamento é igual à zero. As tensões de cisalhamento, máxima e mínima, são representadas por pontos que são simétricos em relação ao eixo, conforme apresentado na Figura 2. (GERE, 2012), (HIBBELER, 2012), (TIMOSHENKO, 1983)

Figura 2 – Exemplo do Círculo de Mohr para o estado plano de tensões. (BEER, 2011)





A tensão normal que atua nos planos das tensões de cisalhamento, máxima e mínima, é igual à média aritmética das tensões principais. Planos perpendiculares entre si são representados por pontos à mesma distância do eixo, porém em lados opostos.

Note-se aqui que a tensão normal média dos dois planos é igual à tensão média das tensões principais, conforme indicado na Figura 2. O estado de deformação é semelhante aquele de tensão, exceto pelo parâmetro de deformação angular no círculo de Mohr, que é:  $\gamma_{xy}/2$ . As demais equações são análogas.

Para o cálculo das deformações experimentais e teóricas serão necessárias a aplicação da Lei de Hooke generalizada (Equações 8, 9 e 10) e da Equação Geral da Deformação (Equação 11). (GERE, 2012), (HIBBELER, 2012).

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \quad (8)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \quad (9)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad (10)$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad (11)$$

### 3. DESCRIÇÃO DO DISPOSITIVO PATENTEADO

A compreensão e o entendimento destes cálculos estruturais, com a demonstração dos carregamentos flexional normal e torcional, a percepção de onde se tem cargas cortantes na estrutura e a possibilidade de simular diversas situações mediante modificação do comprimento da alavanca e do peso do dispositivo didático, garantem ao dispositivo para o ensino de medições de tensões e deformações principais.

Tal objetivo do presente trabalho provem um efeito novo e não sugerido nem descrito no estado da técnica.

#### 3.1. Considerações físicas do dispositivo

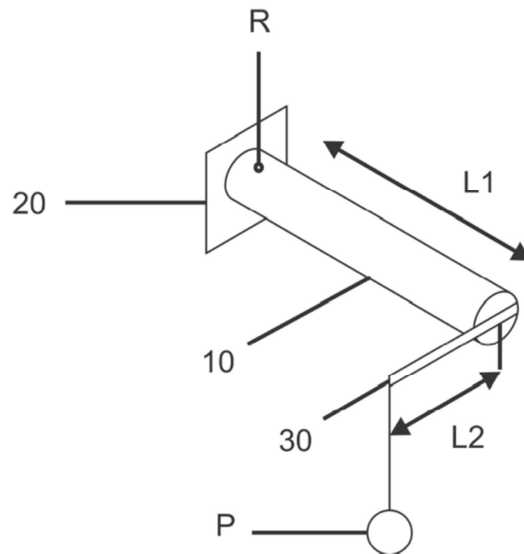
O dispositivo para o ensino de medições de tensões e deformações principais, objeto da presente invenção, compreende um corpo tubular (10) com uma extremidade soldada em uma base fixa (20) e a extremidade livre tendo fixada uma alavanca (30) onde é aplicada uma determinada carga, conforme apresentado na Figura 3.

Uma força  $P$  é aplicada na extremidade da alavanca (30) que por sua vez está fixada na extremidade livre do tubo (10).





Figura 3 – Representação esquemática do dispositivo para medição de tensões e deformações principais

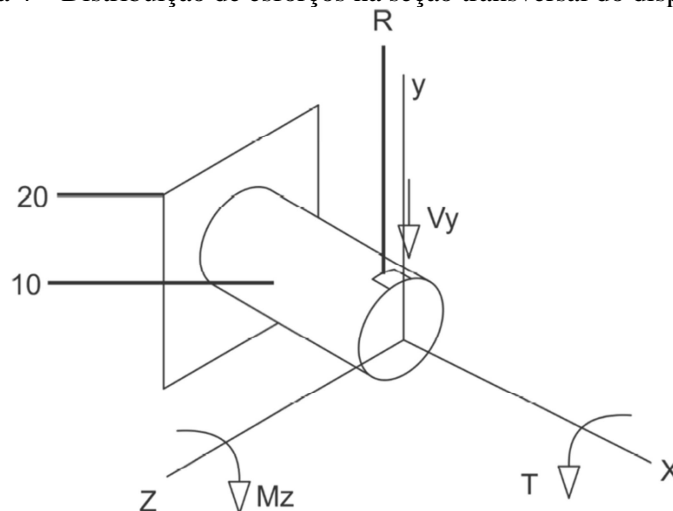


A carga (P) provoca tensões normais, torcionais e de cisalhamento no tubo (10), e com os extensômetros (A, B e C) devidamente posicionados, é possível realizar as medidas das tensões e deformações principais.

As deformações e tensões principais serão determinadas experimentalmente em um ponto de um tubo (10) sujeito a solicitação combinada de torção e flexão. Na superfície do tubo (10) é fixada uma roseta (R), ou seja, um sensor com 3 extensômetros denominados A, B e C, conforme mostrado na Figura 1, onde as tensões são determinadas. Para medir as deformações em cada uma das três direções A, B e C, é montado uma configuração de um quarto de ponte de Wheatstone, sem a necessidade de utilização de um extensômetro inativo.

Considerando os esforços na seção transversal do ponto de colagem dos extensômetros (A, B e C), o carregamento é substituído por um sistema de forças e momentos equivalentes aplicados no centróide da seção de colagem dos extensômetros (A, B e C), conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Distribuição de esforços na seção transversal do dispositivo





Na Figura 4 é indicada uma força cortante  $V_y$  igual à força  $P$  de intensidade ( $V_y = P$ ), um momento torçor  $T$  de intensidade igual ao momento da força  $P$  em relação ao eixo do tubo (10) ( $T = P \times L_2$ ) e um momento fletor  $M_z$  igual ao momento da força  $P$  em relação a um eixo vertical que passa pelo centro ( $M_z = P \times L_1$ ). Cada uma dessas forças e momentos pode provocar tensão normal ou de cisalhamento no ponto da superfície onde estão fixados os extensômetros (A, B e C). O momento fletor  $M_z$  provoca tensão normal, enquanto o momento torçor  $T$  provoca uma tensão de cisalhamento horizontal  $\tau_{xy}$  nesse ponto. A força cortante não provoca tensões de cisalhamento no ponto estudado, pois está situada na fibra superior da seção.

### 3.2 Parâmetros físicos e de teste do dispositivo

O Dispositivo para medição de tensão e deformações principais foi testado segundo os seguintes parâmetros. Este é mostrado na Figura 5, com seu suporte para as cargas.

- Diâmetro externo do corpo tubular:  $d_{\text{ext}} = 64\text{mm}$
- Espessura da parede do corpo tubular:  $t = 1,2\text{mm}$
- Comprimento do corpo tubular:  $L_1 = 400\text{mm}$
- Comprimento da alavanca:  $L_2 = 420\text{mm}$
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,30$
- Módulo de Elasticidade:  $E = 200\text{GPa}$
- Módulo de Elasticidade Transversal:  $G = 76\text{GPa}$
- Carga:  $P = 558\text{N}$

Figura 5 – Dispositivo em teste com suporte para as cargas utilizadas.



## 4. RESULTADOS DO TESTE NO DISPOSITIVO

Serão apresentados os resultados obtidos com as respostas experimentais e teóricas referentes aos dados descritos no item 3.2, conforme o carregamento de 558N. Após aplicada



a carga, os extensômetros indicaram as seguintes deformações, obtidas por meio de equipamento condicionador de sinais HBM MX1615:

$$\epsilon_1 (\Theta_1 = -68^\circ) = 84,52 \mu$$

$$\epsilon_2 (\Theta_2 = -23^\circ) = 386,30 \mu$$

$$\epsilon_3 (\Theta_3 = +22^\circ) = 87,00 \mu$$

As orientações referem-se as posições angulares dos extensômetros na roseta. Isto é melhor visualizado na Figura 1.

#### 4.1 Resultados teóricos

Foram encontrados os seguintes resultados teóricos para tensões e deformações principais, conforme mostrados:

- $\sigma_a = 75,83 \text{ MPa}$
- $\sigma_b = -13,61 \text{ MPa}$
- $\tau_{\max} = 44,72 \text{ MPa}$
  
- $\epsilon_a = 399,56 \mu$
- $\epsilon_b = -181,80 \mu$
- $\epsilon_c = -93,33 \mu$

#### 4.2 Resultados experimentais

Foram encontrados os seguintes resultados experimentais para tensões e deformações principais, conforme mostrados:

- $\sigma_a = 71,16 \text{ MPa}$
- $\sigma_b = -20,60 \text{ MPa}$
- $\tau_{\max} = 45,88 \text{ MPa}$
  
- $\epsilon_a = 386,68 \mu$
- $\epsilon_b = -209,68 \mu$
- $\epsilon_c = -75,86 \mu$

#### 4.3 Discussão dos resultados

A partir dos dados encontrados, estes foram agrupado, conforme Tabela 1 e uma verificação percentual foi realizada para verificar a convergência dos resultados experimentais e teóricos.

Tabela 1 – Comparação dos resultados experimentais e teóricos.

Parâmetros	Teórico	Experimental	Diferença %
$\sigma_{\max}$	75,83MPa	71,16MPa	6,15%
$\tau_{\max}$	44,72MPa	45,88MPa	2,59%
$\epsilon_a$	399,56 $\mu$	386,68 $\mu$	3,22%
$\epsilon_b$	-181,80 $\mu$	-209,68 $\mu$	15,35%
$\epsilon_c$	-93,33 $\mu$	-75,86 $\mu$	18,71%





## 5. CONCLUSÕES

Com respeito às tensões principais máximas no experimento, os valores obtidos com o dispositivo apresentam-se próximos daqueles calculados analiticamente, com 6,15% de diferença percentual e, portanto, considera-se satisfatório. O afastamento da tensão mínima experimental para a teórica justifica-se pela proximidade desta a nulidade. Valores próximos de zero, apresentam discrepâncias devido a sensibilidade dos extensômetros. Um fato a se observar é que em testes anteriores, nenhum dos extensômetros estava orientado segundo a direção das tensões principais, fato este que fez as tensões mínimas aproximarem-se de zero e as diferenças percentuais foram elevadas. Com o alinhamento de um dos extensômetros da roseta com a direção das tensões principais fez com que essa diferença diminuísse, atingindo os valores encontrados.

As deformações apresentaram valores com diferenças percentuais superiores, quando se diz respeito às deformações  $\epsilon_b$  e  $\epsilon_c$ . A deformação  $\epsilon_a$ , teórica, ficou muito próxima da experimental (2,59%), devido ao fato de que o extensômetro foi alinhado na mesma direção da deformação principal na estrutura, devido as cargas externas, diminuindo a probabilidade de erros. Os outros dois extensômetros, devido a complexidade de se obter a precisão dos ângulos necessários para a composição exata da roseta, apresentaram diferenças percentuais superiores ao principal. Outro fator que influenciou os resultados foi o fato de que as propriedades mecânicas do material utilizado nos cálculos são valores aproximados, o que faz com que os resultados reais se afastem dos resultados teóricos. Assim, pode-se dizer que o experimento como um todo atendeu as expectativas, possibilitando demonstrar na prática o que é aprendido em sala de aula em cursos de Mecânica dos Materiais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F. P., JOHNSTON J. R. Mecânica dos Materiais, 5<sup>a</sup>. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2011.

DALLY, James W., RILEY, William F. Experimental Stress Analysis, London 1978. McGraw-Hill, 1978.

GERE, J.M. Mecânica dos Materiais, Ed. Thompson, 7<sup>a</sup>. Ed. São Paulo, 2012,

HIBELLER, R.C. Resistência dos Materiais, 7<sup>a</sup> ed., Pearson Prentice Hall, Brasil, 2012.

TIMOSHENKO, S. P. Resistência dos materiais. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. v. 1-2, 1983.



## **DIDACTIC DEVICE FOR MEASUREMENT PRINCIPAL STRESS AND STRAIN**

**Abstract:** *The present paper describes a patented device (BR 10 2016 008850 0) by the Department of Mechanics of UNESP - Campus of Guaratinguetá, for the teaching of principal stress and strain measurements in structures. More specifically, it comprises a device capable of demonstrating, in a clear and simple manner, the issues conventionally treated in a theoretical manner in the classroom, such as the combination of loadings, bending, normal and torsional, and shear loads in the structure. Through a signal conditioning device, connected to a computer, normal specific strain data, recorded from resistance strain gauges (strain rosette), glued to the device, are collected and then the students are able to calculate the principal stress and strain that arise in an experimental and theoretical way, thus increasing the knowledge in these competences linked to the mechanics of materials.*

**Key-words:** *Didactic Device, Principal Stress and Strain, Strain Gages.*

Organização



**UDESC**  
UNIVERSIDADE  
DO ESTADO DE  
SANTA CATARINA



**UNISOCIESC**  
Educação e Tecnologia

Promoção



**ABENGE**  
Associação Brasileira de Educação em Engenharia