UMA APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR: RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE ELETROMAGNETISMO UTILIZANDO AUTOVETORES

Luciana P. Gonzalez – lpgonzalez@ufpa.br
Universidade Federal do Pará, Faculdade de Licenciatura em Física
Rodovia BR 316, 590 - Levilândia
67000-000 – Ananindeua – Pará

Miriane A. Pinheiro – mirialexandrino@gmail.com
Universidade Federal do Pará, Faculdade de Ciência e Tecnologia
Rodovia BR 316, 590 - Levilândia
67000-000 – Ananindeua – Pará

Resumo: *Este trabalho apresenta um exemplo para resolução de um problema de eletromagnetismo a partir de um modelamento matemático que utiliza o método da matriz de transferência. Tal modelamento será realizado em meios periódicos unidimensionais, ou mais especificamente, em cristais fotônicos unidimensionais, sendo este constituído por camadas alternadas de materiais com diferentes constantes dielétricas e espaçado por uma distância fixa. A propagação de ondas em cristais fotônicos, assim como o estudo de todo eletromagnetismo macroscópico é governado pelas equações de Maxwell. A partir das equações de Maxwell será utilizado o conceito de autovalores e autovetores estudados na disciplina Álgebra Linear, para obter a matriz de transferência, permitindo assim investigar a propagação de ondas eletromagnéticas neste material.*

Palavras-chave: *Matriz de transferência, autovalores, equações de Maxwell, cristal fotônico.*

1. INTRODUÇÃO

A importância da álgebra linear está presente nas mais diversas áreas do conhecimento. Dentro da engenharia pode-se citar como utilização já corriqueira o uso de conceitos de matrizes e sistemas lineares na resolução de problemas como análise de vigas, resolução das equações em circuitos elétricos, balanceamento de equações químicas entre outras. Este trabalho nasceu a partir da observação de que muitos são os trabalhos que exemplificam a utilização da álgebra linear no que diz respeito aos problemas que utilizam na sua resolução conceito de matrizes e sistemas lineares como citado anteriormente e muito pouco é citado sobre os demais tópicos desta disciplina. Portanto optou-se por um tema que foge aos abordados na graduação mostrando que a importância da disciplina está bem além do trivial. Neste artigo o tema escolhido para exemplificar uma utilização da álgebra linear, é um problema de eletromagnetismo aplicado a uma estrutura multicamada chamada de Cristal fotônico. Cristais fotônicos são materiais relativamente novos, porém que já demonstram importantes resultados e tantas outras promissoras aplicações. Cristais fotônicos são estruturas periódicas construídas por material dielétrico, logo é capaz de manter uma determinada carga elétrica por longo tempo com um mínimo de perda. O Cristal Fotônico se apresenta como solução dos problemas de manipulação da luz apresentado por muitos dispositivos como o caso de cavidades metálicas e guias de onda já que para certas frequências as ondas eletromagnéticas são facilmente dissipadas em estruturas metálicas, fato este que não ocorre em cristais fotônicos já que pode ser usado para uma ampla faixa de frequências.

2. ELETROMAGNETISMO EM MEIOS PERIÓDICOS

2.1. Conceitos eletromagnéticos

Os conceitos eletromagnéticos abordados neste trabalho são definidos tomando como base uma estrutura periódica unidimensional (cristal fotônico unidimensional) incidida por ondas eletromagnéticas transversais que se propagam dentro do material ao longo do eixo z. A onda incidente, considerada aqui plana monocromática, tem propagação normal às camadas com todos os componentes da onda perpendiculares ao eixo z e independentes das coordenadas x e y.

$$\vec{E},\ \vec{H},\ \vec{B},\ \vec{D} \tag{1}$$

Os cristais fotônicos sendo formados apenas por camadas dielétricas, apresentam espectro eletromagnético recíproco, ou seja, tem igual característica na banda de dispersão independente do sentido que a onda esteja se propagando.

$$\varpi(\vec{k}) = \varpi(-\vec{k}) \tag{2}$$

O estudo de todo eletromagnetismo macroscópico, incluindo a propagação de ondas em cristais fotônicos é governado pelas equações de Maxwell a seguir.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\frac{\varpi}{c}(\vec{B}) \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\frac{\varpi}{c}(\vec{D}) \tag{4}$$

$\vec{E} \rightarrow$ Intensidade de campo elétrico; $\vec{D} \rightarrow$ Densidade de fluxo elétrico; $\vec{H} \rightarrow$ Intensidade de campo magnético; $\vec{B} \rightarrow$ Densidade de fluxo magnético e

$c = 3\times 10^{8} m/s \rightarrow$ velocidade da luz no vácuo. Considerando a constante dielétrica ε e permeabilidade μ, obtém-se as seguintes relações para um meio isotrópico

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}\,,\ \vec{B} = \mu \vec{H} \tag{5}$$

Em um meio anisotrópico as relações constitutivas dependem da direção de $\vec{E}\ e\ \vec{H}$, logo a equação (5) seria expressa por tensores $\hat{\varepsilon}\ e\ \hat{\mu}$. O vetor onda $\vec{k}$ é paralelo ao eixo z e independe das direções x e y, logo

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)\,;\ k_x = k_y = 0\,;\ \vec{k} = k_z \tag{6}$$

Com a velocidade de grupo dada por

$$\vec{u}\,(\vec{k}) = \frac{\partial \varpi\,(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \tag{7}$$

Para dois meios dielétricos sem fonte de corrente $\vec{J}$, de acordo com as relações de contorno, as componentes de campo tangenciais são iguais em ambos os lados logo

$$\begin{bmatrix} \vec{E}\,(z_i - 0) \\ \vec{H}\,(z_i - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}\,(z_i + 0) \\ \vec{H}\,(z_i + 0) \end{bmatrix} \tag{8}$$

Onde z_i é a posição na interface. As equações (3) e (4) podem ser escritas como

$$\hat{\sigma}\frac{\partial}{\partial z}\vec{E} = i\frac{\varpi}{c}(\hat{\mu}\ \vec{H})\,,\ \hat{\sigma}\frac{\partial}{\partial z}\ \vec{H} = -i\frac{\varpi}{c}(\hat{\varepsilon}\,\vec{E}) \tag{9}$$

com

$$\vec{E}\ (z) = \begin{bmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \end{bmatrix},\ \vec{H}\ (z) = \begin{bmatrix} H_x(z) \\ H_y(z) \end{bmatrix} \tag{10}$$

e

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Considerando uma camada uniforme, a solução para as equações de Maxwell são ondas planas harmônicas dadas por

$$\vec{E}\ (z) = \vec{E}\ \exp\left(i\,q\,z\right),\ \vec{H}\ (z) = \vec{H}\ \exp\ \left(\ i\,q\,z\right) \tag{12}$$

Onde $q = \dfrac{\varpi}{c}n$; $n \rightarrow$ índice de refração. Considera-se uma estrutura anisotrópica, já que a partir deste caso mais abrangente pode-se obter também os parâmetros para a matriz de transferência de estruturas isotrópicas. Em um meio anisotrópico o cristal não apresenta as mesmas propriedades quando consideramos diferentes direções, portanto tem-se $q_1 = \dfrac{\varpi}{c}n_1$ e $q_2 = \dfrac{\varpi}{c}n_2$. Os autovetores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são definidos pela equação

$$n\,\hat{\sigma}\,\vec{E} - \hat{\mu}\,\vec{H} = 0\,,\ \hat{\varepsilon}\ \vec{E} - n\,\hat{\sigma}\,\vec{H} = 0 \tag{13}$$

Onde o sistema de equações (13), descrevem as seguintes relações

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_1(z) \\ \vec{H}_1(z) \end{bmatrix} = \exp\left(i\,q_1\,z\right)\begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{H}_1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \vec{E}_1(z) \\ \vec{H}_1(z) \end{bmatrix} = \exp\left(-i\,q_1\,z\right)\begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ -\vec{H}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_1(z) \\ \vec{H}_1(z) \end{bmatrix} = \exp\left(i\,q_2\,z\right)\begin{bmatrix} \vec{E}_2 \\ \vec{H}_2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \vec{E}_1(z) \\ \vec{H}_1(z) \end{bmatrix} = \exp\left(-i\,q_2\,z\right)\begin{bmatrix} \vec{E}_2 \\ -\vec{H}_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

2.2. Eletromagnetismo como Problema de Autovalores

As equações que relacionam os campos elétrico e magnético são dadas pelas equações (3) e (4). Para obter uma equação determinada apenas por um dos campos, substitui-se a equação (4) em (3). Dividindo a equação resultante pela constante dielétrica tem-se a chamada equação máster

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} \nabla \times \vec{H} \right) = \left(\frac{\varpi}{c} \right)^2 \vec{H} \tag{15}$$

Mesmo tendo agora uma única equação e determinada apenas por um dos campos, esta é ainda de difícil resolução. Uma forma mais simples de obter a solução é considerá-los como problema de autovalores. Se o resultado de uma operação em uma função é a própria função multiplicada por uma constante, então este é um autovetor daquele operador e a constante multiplicativa é chamada de autovalor. Considerando uma função A, o problema de autovalores apresenta uma equação da seguinte forma:

$$A\vec{T} = \lambda\vec{T} \tag{16}$$

Onde λ é um escalar a ser determinado e $\vec{T}$ um vetor a ser determinado. É possível considerar o estudo eletromagnético como um problema de autovalores já que considerando a equação Máster $\vec{\nabla} \times \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{H}} = \left(\frac{\varpi}{c}\right)^2 \vec{\mathrm{H}}$, e com base no conceito descrito acima, pode-se dizer que $\vec{H}$ é uma autofunção e $\left(\frac{\varpi}{c}\right)^2$ é seu autovalor. Fazendo λ= $\left(\frac{\varpi}{c}\right)^2$ e utilizando a forma apresentada na equação (16) tem-se $\mathrm{A}\vec{H} = \lambda\vec{H}$ ou

$$(A - \lambda I)\vec{H} = 0 \tag{17}$$

Onde I é uma matriz identidade que multiplica o autovalor λ, sendo o determinante característico dado por

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0 \tag{18}$$

A equação resultante do determinante característico é chamada de equação característica de *A* que tem como autovalores as raízes de λ. As raízes da equação característica são utilizadas para determinar o espectro eletromagnético usando a técnica de matriz de transferência.

2.3. Modelagem Matemática – Matriz de Transferência

O campo eletromagnético para um ponto arbitrário z_2 relacionado a um ponto z_1 para um determinado tempo t é dado pela seguinte relação linear

$$\begin{bmatrix} \vec{E}(z_2) \\ \vec{H}(z_2) \end{bmatrix} = \hat{\mathrm{T}}(z_2, z_1) \begin{bmatrix} \vec{E}(z_1) \\ \vec{H}(z_1) \end{bmatrix} \tag{19}$$

Onde $\hat{\mathrm{T}}(z_2, z_1)$ é chamada matriz de transferência. $\vec{E}(z)$ e $\vec{H}(z)$ são funções contínuas de z portanto, $\hat{\mathrm{T}}(z_2, z_1)$ é também uma função contínua de z_2 e z_1. A matriz de transferência total para uma estrutura multicamadas $\hat{\mathrm{T}}_p = \prod_i \mathrm{T}_i$ é o produto sequencial de todas as matrizes das camadas individuais, onde $\hat{\mathrm{T}}_p$ é a matriz de transferência total de uma pilha de camadas e $\vec{\mathrm{T}}_i$ é a matriz de transferência de uma camada individual.

2.4. Matriz de transferência para uma única camada

A matriz de transferência para uma única camada relaciona os componentes do campo eletromagnético nas duas faces da camada para um mesmo tempo t. Analisando a equação (19), as coordenadas z_2 e z_1 correspondem as faces direita e esquerda da camada com $\vec{E}(z)$ e $\vec{H}(z)$ contínuos na interface. A matriz de transferência pode ser expressa em termos de autovetores

$$\widehat{\mathrm{T}}(z)=\widehat{\mathrm{T}}(z_2-z_1)=\widehat{W}(z_2)\widehat{W}^{-1}(z_1) \tag{20}$$

com a matriz $\widehat{W}(z)$ composta pelos componentes cartesianos dos autovetores $\vec{E}_1$ e $\vec{H}_1$. Considerando anisotropia no plano xy tem-se

$$\widehat{W}(z)=\begin{bmatrix} E_{1,x}\exp(iq_1z) & E_{1,x}\exp(-iq_1z) & E_{2,x}\exp(iq_2z) & E_{2,x}\exp(-iq_2z) \\ E_{1,x}\exp(iq_1z) & E_{1,x}\exp(-iq_1z) & E_{2,y}\exp(iq_2z) & E_{2,y}\exp(-iq_2z) \\ H_{1,x}\exp(iq_1z) & -H_{1,x}\exp(-iq_1z) & H_{2,x}\exp(iq_2z) & -H_{2,x}\exp(-iq_2z) \\ H_{1,y}\exp(iq_1z) & -H_{1,y}\exp(-iq_1z) & H_{2,y}\exp(iq_2z) & -H_{2,y}\exp(-iq_2z) \end{bmatrix} \tag{21}$$

Considerando os parâmetros adimensionais $a=\frac{\varpi}{c}A$ para as camadas dielétricas, matrizes de transferência se apresentam da seguinte forma: $\widehat{\mathrm{T}}_A(A,\varphi)=\widehat{W}(A,\varphi)\widehat{W}^{-1}(0,\varphi)$

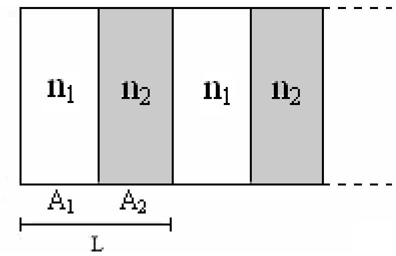
$$\widehat{W}=\begin{bmatrix} E_{1,x}\exp(in_1a) & E_{1,x}\exp(-in_1a) & E_{2,x}\exp(in_2a) & E_{2,x}\exp(-in_2a) \\ E_{1,x}\exp(in_1a) & E_{1,x}\exp(-in_1a) & E_{2,y}\exp(in_2a) & E_{2,y}\exp(-in_2a) \\ H_{1,x}\exp(in_1a) & -H_{1,x}\exp(-in_1a) & H_{2,x}\exp(in_2a) & -H_{2,x}\exp(-in_2a) \\ H_{1,y}\exp(in_1a) & -H_{1,y}\exp(-in_1a) & H_{2,y}\exp(in_2a) & -H_{2,y}\exp(-in_2a) \end{bmatrix} \tag{22}$$

Com $n_1=\sqrt{\varepsilon+\delta}$; $n_2=\sqrt{\varepsilon-\delta}$.

2.5. Aplicação

Considera-se um cristal fotônico 1D construído a partir de camadas de material dielétrico isotrópico, excitado por uma onda plana que incide normalmente. Apresenta células primitivas formadas por duas camadas com diferentes valores de índice de refração. A1 e A2 são as espessuras e n1 e n2 os índices de refração das camadas 1 e 2 respectivamente e L = A1 + A2 a periodicidade da estrutura apresentada na Figura 1.

Figura 1 – Estrutura periódica com alternados índices de refração (n1 ≠ n2) e periodicidade L.



A análise na estrutura considerando apenas a célula primitiva é suficiente para entender o comportamento da onda dentro de toda extensão do material admitindo uma perfeita periodicidade dada pela rede cristalina constante de comprimento L. A onda analisada se propaga em meio isotrópico, dessa forma $\vec{E}_y = \vec{H}_x = 0$, logo para camada dielétrica os campos serão dados por

$$E_x = \exp(i\,q\,A)\,,\ H_y = n\exp(i\,q\,A) \tag{23}$$

Considerando $z_1=0$ sendo este o ponto de referência e z_2 a espessura da camada analisada, pode-se obter a seguinte equação para matriz de transferência de camadas dielétricas.

$$\widehat{\mathrm{T}}(A) = \widehat{W}(A)\widehat{W}^{-1}(0) \tag{24}$$

E as matrizes $\widehat{W}(A)$ e $\widehat{W}^{-1}(0)$ tornam-se

$$\widehat{W}(A) = \begin{bmatrix} \exp(ia\,n) & \exp(-ian) \\ n\exp(ia\,n) & -n\exp(-i\,an) \end{bmatrix} \text{ e } \widehat{W}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2n} & \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{1}{2n} & -\dfrac{1}{2n} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

Onde a é dado por $a = \dfrac{\varpi}{c}A$. A matriz de transferência para as camadas 1 e 2 serão

$$\widehat{\mathrm{T}}(A_1)=\widehat{W}(A_1)\widehat{W}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}\exp(ia_1 n_1) & \exp(-ia_1 n_1)\\ n_1\exp(ia_1 n_1) & -n_1\exp(-ia_1 n_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2n_1} & \frac{1}{2n_1}\\ \frac{1}{2n_1} & -\frac{1}{2n_1}\end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\widehat{\mathrm{T}}(A_1)=\begin{bmatrix}\cos(a_1 n_1) & i\,sen\frac{(a_1 n_1)}{n_1}\\ i\,n_1\,sen(a_1 n_1) & \cos(a_1 n_1)\end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\widehat{\mathrm{T}}(A_2)=\widehat{W}(A_2)\widehat{W}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}\exp(ia_2 n_2) & \exp(-ia_2 n_2)\\ n_2\exp(ia_2 n_2) & -n_2\exp(-ia_2 n_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2n_2} & \frac{1}{2n_2}\\ \frac{1}{2n_2} & -\frac{1}{2n_2}\end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\widehat{\mathrm{T}}(A_2)=\begin{bmatrix}\cos(a_2 n_2) & i\,sen\frac{(a_2 n_2)}{n_2}\\ i\,n_2\,sen(a_2 n_2) & \cos(a_2 n_2)\end{bmatrix} \quad (29)$$

Com a equação para a matriz de transferência total $\widehat{\mathrm{T}}(L)=\widehat{\mathrm{T}}(A_1)\widehat{\mathrm{T}}(A_2)$

$$\widehat{\mathrm{T}}(L)=\begin{bmatrix}c_1 c_2-\frac{n_2 s_1 s_2}{n_1} & i\left(\frac{c_2 s_1}{n_1}+\frac{c_1 s_2}{n_2}\right)\\ i\left(n_1 c_2 s_1+n_2 c_1 s_2\right) & c_1 c_2-\frac{n_1 s_1 s_2}{n_2}\end{bmatrix} \quad (30)$$

$c_1=\cos(a_1 n_1)$, $s_1=sen\,(a_1 n_1)$, $c_2=\cos(a_2 n_2)$, $s_2=sen\,(a_2 n_2)$, onde $\widehat{\mathrm{T}}(L)$ é a matriz de transferência total para célula primitiva de comprimento L.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma forma de resolução de um problema de eletromagnetismo a partir de um modelamento matemático que utiliza o método da matriz de transferência. Objetiva-se com este mostrar a importância da aprendizagem da disciplina álgebra linear, já que esta se mostra presente tanto em resoluções de problemas triviais quanto em temas mais complexos. O método da matriz de transferência relaciona o comportamento eletromagnético em diferentes pontos escolhidos da estrutura. Para uma dada frequência, as equações são resolvidas no plano perpendicular à superfície do cristal, o campo é então transferido durante toda a estrutura sucessivamente aplicando as equações de Maxwell. A matriz de transferência do sistema tem seu espaço dividido em pequenas células discretas chamadas de células primitivas. Através deste método pode-se calcular para ondas eletromagnéticas os diagramas de banda dados pelos autovalores da matriz de transferência e seus coeficientes de transmissão e reflexão que podem ser propagados através do cristal por sucessivas multiplicações matriciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.; RORRES, C.; Álgebra linear com aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2001.

DE OLIVEIRA, Luiz C. M.; UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Aplicação de Estruturas PBG em Dispositivos Planares de Microondas –Linhas e Antenas -em Substratos Dielétricos e semicondutores: Desenvolvimento de Tecnologia e Caracterização, 2001. 119 p. Dissertação (Mestrado).

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2004. p. 243.

FIGOTIN, A.; Vitebsky, I.; Electromagnetic unidirectionality in magnetic photonic crystals, Physical Review B, vol. 67, pp. 165210-1 to 165210-20, 2003.

JOANNOPOULOS, J.D, MEADE, R.D, and WINN, JN, Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton: Princeton University Press, 1995. 137 p.

PESCADOR, A.; POSSAMAI, J.P.; POSSAMAI, C.R. Aplicação de Álgebra Linear na Engenharia. Anais: XXXIX – Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Santa Catarina: FURB, 2011.

A LINEAR ALGEBRA APPLICATION: RESOLUTION OF THE AN ELECTROMAGNETISM PROBLEM USING EIGENVECTORS

Abstract: *This work presents an example for the resolution of an eletromagnetic problem by means of a mathematic modeling that utilizes the transfer matrix method. Such modeling will be realized in one-dimensional periodic mediums, or more specifically, in one-dimensional photonic crystals, this being constituted by alternated layers of materials with differing dielectric constants and spaced by a fixed distance. The propagation of waves in photonic crystals, as well as the study of all of the macroscopic electromagnetism, is governed by Maxwell's equations. The concept of eigenvalues and eigenvectors from Maxwell's equations, which was studied on the Linear Algebra subject, will be used to obtain the transfer matrix, therefore allowing toinvestigate the propagation of electromagnetic waves in this material.*

Key-words: *transfer matrix, eigenvalues, Maxwell's equations, photonic crystal.*