INSTRUÇÕES PARA A CONTRUÇÃO DA CINEMÁTICA DIRETA DE ROBÔS MANIPULADORES UTILIZANDO QUATÉRNIOS DUAIS

Eduardo José Lima II – eduardo@demec.ufmg.br
Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação Engenharia Mecânica (PPGMEC)
Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha
31270-901 – Belo Horizonte – MG

Tames Fernandes Mariano – tamesfernandes@gmail.com
Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação Engenharia Mecânica (PPGMEC)
Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha
31270-901 – Belo Horizonte – MG

Resumo: *Este artigo apresenta uma visão geral de uma ferramenta matemática denominada quatérnios duais e sua potencial aplicação na área da robótica. Em paralelo à essa visão é apresentado um comparativo com a forma tradicional de calcular rotação e translação na cinemática de robôs manipuladores. Os quatérnios duais tem sido massivamente empregados na robótica devido ao fato de que são computacionalmente mais eficientes na representação de informações rotacionais do que a representação com matrizes de transformação homogêneas. Assim, este trabalho tem como objetivo fornecer uma explicação detalhada passo-a-passo de como funciona a álgebra quaterniônica de uma forma simples utilizando exemplos para melhor compreensão de sua implementação. Embora haja uma grande quantidade de literatura sobre os aspectos teóricos de quatérnios duais, em poucas literaturas existem exemplos práticos de como realmente funciona o seu uso. Assim, ao dar uma clara noção da introdução à teoria de quatérnios, este documento também explica sua aplicação a manipuladores robóticos.*

Palavras-chave: *Quatérnios Duais, Transformações Homogêneas, Cinemática Direta.*

1. INTRODUÇÃO

Os quatérnios duais são uma ferramenta matemática com grande importância na mecânica clássica, uma vez que são capazes de representar problemas complexos de forma compacta e unificada. Um quatérnio dual é capaz de combinar, em uma única variável, componentes lineares e rotacionais que podem ser interpoladas, concatenadas e transformadas obedecendo um conjunto de regras algébricas (KENWRIGHT,2012).

Uma transformação 3D completamente rígida é composta de uma componente translacional e outra rotacional, que é tradicionalmente calculada através de uma matriz 4x4 homogênea. No entanto, as matrizes homogêneas possuem a limitação de ser difícil realizar a interpolação entre as transformações. Alternativamente, surgem os quatérnios duais como a melhor solução para rotações, neles as transformações podem ser gerenciadas com a vantagem de encapsular a translação e a rotação em um único estado que pode ser interpolado sem esforço (SHOEMAKE, 1985) **.**

Dentre as vantagens dos quatérnios duais **(**GE,et al,1998, SCHILLING,2011, KENWRIGHT,2012):

- ✓ Combinam rotação e translação em uma única variável de estado;
- ✓ São uma representação compacta (8 números escalares);
- ✓ Eles são facilmente convertidos em outras formas (por exemplo, forma matricial);
- ✓ Podem ser facilmente interpolados sem ambiguidade ;
- ✓ Computacionalmente mais eficientes (quando comparado a matrizes de transformação homogênea);
- ✓ Podem ser incorporados em um sistema já implementado sem fazer muita interrupção;
- ✓ Apresentam uma forma única de representação para coordenadas de transformação rígida.

2. CONCEITOS BÁSICOS DE ROBÓTICA

O grande problema da robótica de manipulação está em se definir como o robô fará sua trajetória no espaço dada uma tarefa (ADORNO,2011).

2.1. Cinemática Direta

Para um manipulador antropomórfico de n graus de liberdade existe a relação esquemática Figura 1:

$$\theta_i,\ i = 1, ..., n \quad \rightarrow \boxed{\text{Cinemática Direta de Posição}} \rightarrow \quad x_0, y_0, z_0, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}$$

Figura 1- Esquema cinemática Direta

x0; y0 e z0 são as coordenadas cartesianas do efetuador (ou ferramenta) no sistema de coordenadas da base. Estas que podem ser representadas pelo vetor de posição d, onde n, s, a são vetores ortonormais que descrevem a orientação do efetuador em relação a base do manipulador (ROMANO et al, 2002). Estes vetores formam a matriz de rotação R. Para este tipo de manipulador, há n juntas e n + 1 elos conectados, incluindo o elo 0 que é a base do robô. Considerando que cada junta i conecta os elos (i − 1) e (i), pode-se representar a posição (ROMANO et al, 2002) e orientação do efetuador em relação ao sistema da base, usando a sequência de matrizes de transformação homogênea (SPONG et al., 2005)

Como visto na cinemática direta é possível determinar as coordenadas x, y e z e a orientação d a ferramenta de um manipulador se forem à princípio conhecidas as variáveis de cada junta θi. Essa tarefa é a denominada modelagem cinemática direta e pode ser realizada utilizando a convenção de Denavit Hartenberg de uma maneira bem prática.

2.2.Cinemática Inversa

Para realizar o comando de um manipulador é necessário o modelo inverso, nele é dado a posição e orientação desejadas para o efetuador, deseja-se saber os valores de θi em cada junta. Este é o problema da cinemática inversa de posição esquematizado na Figura 2 (SPONG et al., 2005, p. 85)

$$x_0, y_0, z_0, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a} \quad \rightarrow \boxed{\text{Cinemática Inversa de Posição}} \rightarrow \quad \theta_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Figura 2- Esquema cinemática Inversa

A cinemática inversa é bastante parecida com a equação cinemática direta, no entanto com a inversão das entradas e saídas. O problema da cinemática inversa de posição pode ser bastante complicado de se resolver pois resulta em doze equações não lineares e n incógnitas (SPONG et al., 2005).

3. MATRIZES DE TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

A movimentação de um corpo rígido no espaço pode ser modelada como uma transformação linear representada por matrizes de transformação.

A matriz afim consiste na combinação de um, ou de mais tipos de transformações lineares. Busca-se então uma representação para a translação e rotação de um objeto já que esses são os tipos de movimentação possíveis em um robô.

3.1.Rotação com matrizes

A movimentação de um corpo rígido no espaço pode ser modelada como uma transformação linear representada por matrizes de transformação. Uma rotação em um espaço tridimensional é descrita como uma matriz R de dimensão 3×3 de determinante unitário. É importante destacar que os vetores-coluna da matriz R são mutualmente ortogonais.

A matriz R pode ser representada genericamente conforme Equação (1) à seguir:

$$R_{rotação\ pura} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} & 0 \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} & 0 \\ R_{xx} & R_{yx} & R_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

3.2.Translação com matrizes

A translação é uma transformação geométrica que corresponde à ideia de deslocamento de um objeto. Podemos representar uma translação usando a matriz afim expandida da seguinte forma na Equação (2) :

$$T_{translação\ pura} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

A matriz de rotação aqui é substituída por uma matriz identidade de tamanho correspondente à dimensão do nosso sistema. Os componentes dx, dy e dz correspondem aos deslocamentos referentes aos eixos x, y e z.

3.3 Representação de Denavit-Hartenberg com matrizes

Considerando que os sistemas de coordenadas de cada junta do manipulador podem ser definidos arbitrariamente, é natural que, por uma questão de consistência e eficiência computacional, seja utilizada uma convenção para localização destes sistemas. Em (SICILIANO, 2008) foi introduzida tal convenção. Na representação padrão, dada pela Equação(3), cada uma das matrizes pode ser obtida por meio de quatro transformações homogêneas básicas mostradas na Equação(4), de acordo com a estrutura rígida do robô manipulador (SPONG et al., 2005).

$${H_{DH}}_i^{i-1} = R_{z,\theta} * T_{z,d} * T_{x,a} * R_{x,\alpha} \tag{3}$$

Onde, $R_{z,\theta}$ representa a rotação de θ_i em torno do eixo z_{i-1} (ângulo da junta), $T_{z,d}$ representa a translação de d_i ao longo do eixo z_{i-1} (distância entre as origens das juntas), $T_{x,a}$ representa a translação de a_i ao longo do eixo x_{i-1}(comprimento do elo) e, por fim, $R_{x,\alpha}$ representa a rotação de α_i em torno do eixo x_{i-1} (torção do elo).

$${H_{DH}}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\mathrm{sen}(\theta_i) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\mathrm{sen}(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

A matriz ${H_{DH}}_i^{i-1}$, resultado da Equação (4), após a solução das multiplicações matriciais pode ser expressa pela Equação (5) **(Spong et al. (2005), p. 69)**

$${H_{DH}}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\mathrm{sen}(\theta_i) * \cos(\alpha_i) & \mathrm{sen}(\theta_i) * \mathrm{sen}(\alpha_i) & a_i * \cos(\theta_i) \\ \mathrm{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) * \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) * \mathrm{sen}(\alpha_i) & a_i * \mathrm{sen}(\theta_i) \\ 0 & \mathrm{sen}(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

4. QUATÉRNIOS DUAIS

4.1 Representação de Quatérnios Duais

Os quatérnios duais são números duais cujas partes primária e dual são quatérnios e podem ser representados (ADORNO,2011) de quatro maneiras representado pelas Figuras 3,4,5 e 6 :

$$\underline{h} = \underbrace{\mathcal{P}(\underline{h})}_{\substack{\text{Parte Primária} \\ \text{(Rotação)}}} + \varepsilon * \underbrace{\mathcal{D}(\underline{h})}_{\substack{\text{Parte Dual} \\ \text{(Translação)}}}$$

Figura 3- Primeiro modo representação quatérnios duais

$$\underline{h} = \underbrace{r}_{\substack{\text{Parte Primária} \\ \text{(Rotação)}}} + \varepsilon * \underbrace{\left(\frac{1}{2} * p * r\right)}_{\substack{\text{Parte Dual} \\ \text{(Translação)}}}$$

Figura 4- Segundo modo representação quatérnios duais

$$\underline{h} = \underbrace{(\mathrm{h}_{\mathcal{P}_0} + \mathrm{h}_{\mathcal{P}_i} + \mathrm{h}_{\mathcal{P}_j} + \mathrm{h}_{\mathcal{P}_k})}_{\substack{\text{Parte Primária} \\ \text{(Rotação)}}} + \varepsilon * \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) * (\mathrm{h}_{\mathcal{D}_0} + \mathrm{h}_{\mathcal{D}_i} + \mathrm{h}_{\mathcal{D}_j} + \mathrm{h}_{\mathcal{D}_k})}_{\substack{\text{Parte Dual} \\ \text{(Translação)}}}$$

Figura 5- Terceiro modo representação quatérnios duais

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_{\mathcal{P}_0} \\ \mathrm{h}_{\mathcal{P}_i} \\ \mathrm{h}_{\mathcal{P}_j} \\ \mathrm{h}_{\mathcal{P}_k} \\ (1/2) * \mathrm{h}_{\mathcal{D}_0} \\ (1/2) * \mathrm{h}_{\mathcal{D}_i} \\ (1/2) * \mathrm{h}_{\mathcal{D}_j} \\ (1/2) * \mathrm{h}_{\mathcal{D}_k} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \substack{\text{Parte} \\ \text{Primária} \\ \text{(Rotação)}} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \substack{\text{Parte Dual} \\ \text{(Translação)}} \end{matrix}$$

Figura 6- Quarto modo representação quatérnios duais

4.2 Álgebra Quaterniônica e Operações elementares com quatérnios duais

A álgebra quaterniônica é apresentada à seguir para as seis operações elementares, a forma de calcular usando cada uma das operações é apresentada e à seguir exemplificada para melhor entendimento do seu uso.

4.2.1 Multiplicação Quatérnios Duais por um escalar

Um quatérnio dual $\underline{\boldsymbol{q}}$ multiplicado por um escalar λ pode ser calculado com a Equação(6):

$$\lambda * \underline{\boldsymbol{q}} = \lambda * \underline{\boldsymbol{q_p}} + \epsilon * \lambda * \underline{\boldsymbol{q_d}} \tag{6}$$

<u>Exemplo1:</u>

$\underline{\boldsymbol{q}} = (1 + 1\,\boldsymbol{i} + 1\,\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (2 + 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k})$

$\lambda = 3$

$3 * \underline{\boldsymbol{q}} = 3 * (1 + 1\,\boldsymbol{i} + 1\,\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * 3 * (2 + 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k})$

$3 * \underline{\boldsymbol{q}} = (3 + 3\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (6 + 6\,\boldsymbol{i} + 6\,\boldsymbol{j} + 6\,\boldsymbol{k})$

4.2.2 Adição de Quatérnios Duais

A adição de dois quatérnios duais $\underline{\boldsymbol{q_1}}$ e $\underline{\boldsymbol{q_2}}$ pode ser calculada com a Equação(7):

$$\underline{\boldsymbol{q_1}} + \underline{\boldsymbol{q_2}} = (\underline{\boldsymbol{q_{p1}}} + \underline{\boldsymbol{q_{p2}}}) + \epsilon * (\underline{\boldsymbol{q_{d1}}} + \underline{\boldsymbol{q_{d2}}}) \tag{7}$$

<u>Exemplo2:</u>

$\underline{\boldsymbol{q_1}} = (1 + 1\,\boldsymbol{i} + 1\,\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (2 + 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q_2}} = (3 + 3\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (5 + 5\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q_1}} + \underline{\boldsymbol{q_2}} = (4 + 4\,\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (7 + 7\,\boldsymbol{i} + 7\,\boldsymbol{j} + 7\,\boldsymbol{k})$

4.2.3 Subtração de Quatérnios Duais

A subtração de dois quatérnios duais $\underline{\boldsymbol{q_1}}$ e $\underline{\boldsymbol{q_2}}$ pode ser calculada com a Equação(8):

$$\underline{\boldsymbol{q_1}} - \underline{\boldsymbol{q_2}} = (\underline{\boldsymbol{q_{p1}}} - \underline{\boldsymbol{q_{p2}}}) + \epsilon * (\underline{\boldsymbol{q_{d1}}} - \underline{\boldsymbol{q_{d2}}}) \tag{8}$$

<u>Exemplo3:</u>

$\underline{\boldsymbol{q_1}} = (8 + 8\,\boldsymbol{i} + 8\,\boldsymbol{j} + 8\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (9 + 9\,\boldsymbol{i} + 9\,\boldsymbol{j} + 9\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q_2}} = (3 + 3\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (5 + 5\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q_1}} - \underline{\boldsymbol{q_2}} = (5 + 5\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (4 + 4\,\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k})$

4.2.4 Conjugado de um Quatérnio Dual

O conjugado de um quatérnio dual $\underline{\boldsymbol{q}}$ será a inversão do sinal da parte imaginaria do quatérnio primário $\underline{\boldsymbol{q_p}}$ e da parte imaginária do quatérnio dual $\underline{\boldsymbol{q_d}}$ conforme a Equação(9):

$$\underline{\boldsymbol{q}}^* = (\underline{\boldsymbol{q_p^*}}) + \epsilon * (\underline{\boldsymbol{q_d^*}}) \tag{9}$$

Exemplo4:

$\underline{\boldsymbol{q}} = (+1 + 1\,\boldsymbol{i} + 1\,\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (+2 + 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q}}^* = (+1 - 1\,\boldsymbol{i} - 1\,\boldsymbol{j} - 1\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (+2 - 2\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k})$

4.2.5 Multiplicação de dois Quatérnios Duais

Um quatérnio dual $\underline{\boldsymbol{p}}$ multiplicado por outro quatérnio dual $\underline{\boldsymbol{q}}$ pode ser calculado com a Equação(10):

$$\underline{\boldsymbol{p}} * \underline{\boldsymbol{q}} = (\underline{\boldsymbol{p_p}} * \underline{\boldsymbol{q_p}}) + \epsilon * (\underline{\boldsymbol{p_p}} * \underline{\boldsymbol{q_d}} + \underline{\boldsymbol{p_d}} * \underline{\boldsymbol{q_p}}) \tag{10}$$

Exemplo5 – algébrico :

$\underline{\boldsymbol{p}} = (p_{p0} + p_{pi}\,\boldsymbol{i} + p_{pj}\,\boldsymbol{j} + p_{pk}\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (p_{d0} + p_{di}\,\boldsymbol{i} + p_{dj}\,\boldsymbol{j} + p_{dk}\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q}} = (q_{p0} + q_{pi}\,\boldsymbol{i} + q_{pj}\,\boldsymbol{j} + q_{pk}\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (q_{d0} + q_{di}\,\boldsymbol{i} + q_{dj}\,\boldsymbol{j} + q_{dk}\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{p}} * \underline{\boldsymbol{q}} = (\underline{\boldsymbol{p_p}} * \underline{\boldsymbol{q_p}}) + \epsilon * (\underline{\boldsymbol{p_p}} * \underline{\boldsymbol{q_D}} + \underline{\boldsymbol{p_D}} * \underline{\boldsymbol{q_p}})$

$\underline{\boldsymbol{p}} * \underline{\boldsymbol{q}} = (\underline{\mathrm{A}}) + \epsilon * (\underline{\mathrm{B}} + \underline{\mathrm{C}})$; onde A, B e C são as matrizes à seguir

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \left[(p_{p_0} * q_{p_0}) - (p_{p_i} * q_{p_i}) - (p_{p_j} * q_{p_j}) - (p_{p_k} * q_{p_k})\right] \; + \\ \left[(p_{p_0} * q_{p_i}) + (p_{p_i} * q_{p_0}) + (p_{p_j} * q_{p_k}) - (p_{p_k} * q_{p_j})\right] \boldsymbol{i} + \\ \left[(p_{p_0} * q_{p_j}) - (p_{p_i} * q_{p_k}) + (p_{p_j} * q_{p_0}) + (p_{p_k} * q_{p_i})\right] \boldsymbol{j} + \\ \left[(p_{p_0} * q_{p_k}) + (p_{p_i} * q_{p_j}) - (p_{p_j} * q_{p_i}) + (p_{p_k} * q_{p_0})\right] \; \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \left[(p_{p_0} * q_{D_0}) - (p_{p_i} * q_{D_i}) - (p_{p_j} * q_{D_j}) - (p_{p_k} * q_{D_k})\right] \; + \\ \left[(p_{p_0} * q_{D_i}) + (p_{p_i} * q_{D_0}) + (p_{p_j} * q_{D_k}) - (p_{p_k} * q_{D_j})\right] \boldsymbol{i} + \\ \left[(p_{p_0} * q_{D_j}) - (p_{p_i} * q_{D_k}) + (p_{p_j} * q_{D_0}) + (p_{p_k} * q_{D_i})\right] \boldsymbol{j} + \\ \left[(p_{p_0} * q_{D_k}) + (p_{p_i} * q_{D_j}) - (p_{p_j} * q_{D_i}) + (p_{p_k} * q_{D_0})\right] \; \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \left[\left(p_{D_0} * q_{p_0}\right) - \left(p_{D_i} * q_{p_i}\right) - \left(p_{D_j} * q_{p_j}\right) - \left(p_{D_k} * q_{p_k}\right)\right] \quad + \\ \left[\left(p_{D_0} * q_{p_i}\right) + \left(p_{D_i} * q_{p_0}\right) + \left(p_{D_j} * q_{p_k}\right) - \left(p_{D_k} * q_{p_j}\right)\right] \boldsymbol{i} + \\ \left[\left(p_{D_0} * q_{p_j}\right) - \left(p_{D_i} * q_{p_k}\right) + \left(p_{D_j} * q_{p_0}\right) + \left(p_{D_k} * q_{p_i}\right)\right] \boldsymbol{j} + \\ \left[\left(p_{D_0} * q_{p_k}\right) + \left(p_{D_i} * q_{p_j}\right) - \left(p_{D_j} * q_{p_i}\right) + \left(p_{D_k} * q_{p_0}\right)\right] \quad \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$$

Exemplo6:

$\underline{\boldsymbol{q_1}} = (1 + 1\,\boldsymbol{i} + 1\,\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (2 + 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q_2}} = (3 + 3\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (5 + 5\,\boldsymbol{i} + 5\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q_1}} * \underline{\boldsymbol{q_2}} = (-6 + 6\,\boldsymbol{i} + 6\,\boldsymbol{j} + 6\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (-22 + 22\,\boldsymbol{i} + 22\,\boldsymbol{j} + 22\,\boldsymbol{k})$

4.2.6 Norma ou Magnitude de um Quatérnio Dual

A norma ou magnitude de um quatérnio dual $\underline{\boldsymbol{q}}$ pode ser calculada com a multiplicação deste quatérnio dual pelo seu conjugado, Equação(11):

$$\| \underline{\boldsymbol{q}} \|^2 = \underline{\boldsymbol{q}} * \underline{\boldsymbol{q}}^* \qquad (11)$$

Exemplo7:

$\underline{\boldsymbol{q}} = (+3 + 2\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (+5 + 7\,\boldsymbol{i} + 7\,\boldsymbol{j} + 7\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q}}^* = (+3 - 2\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (+5 - 7\,\boldsymbol{i} - 7\,\boldsymbol{j} - 7\,\boldsymbol{k})$

$\underline{\boldsymbol{q}} * \underline{\boldsymbol{q}}^* = (\sqrt{21} + 0\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} + 0\,\boldsymbol{k}) + \epsilon * (\sqrt{114} + 0\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} + 0\,\boldsymbol{k})$

4.3 Aplicação de Quatérnios Duais à Robótica

4.3.1 Rotação com Quatérnios Duais

Podemos encontrar a representação de uma rotação pura fazendo p=[0; 0; 0; 0], de forma semelhando ao realizado com matrizes. Essa operação zera a parte dual de q, resultando na Equação (12):

$$q_{rotação\ pura} = (r, 0) = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_x \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_y \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad n_z \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]^T \qquad (12)$$

4.3.2 Translação com Quatérnios Duais

Para representar uma translação pura, seguimos um raciocínio semelhante ao realizado com a matriz de translação. Aplica-se uma transformação de translação e rotação simultâneas sobre um ponto, definido pelo vetor p; usando quatérnio dual unitário. Essa transformação ocorre de forma semelhante à transformação de rotação com quatérnios obedecendo a Equação(13):

$$\underline{\boldsymbol{p}}' = \underline{\boldsymbol{q} \boldsymbol{p} \boldsymbol{q}^*} \qquad (13)$$

4.3.3 Representação de Denavit-Hartenberg com quatérnios duais

ADORNO (2011) propõe o modelo cinemático direto e de manipuladores robóticos usando quatérnios duais utilizando uma sequência de quatérnios duais multiplicados que pode ser utilizada em conjunto com os parâmetros de Denavit-Hartenberg para se encontrar o modelo cinemático direto. Usando quatérnios duais, a notação de Denavit-Hartenberg padrão fica definida como a Equação (14):

$$\underline{h}_{DH} = \boldsymbol{r}_{z,\theta} * \boldsymbol{p}_{z,d} * \boldsymbol{p}_{x,a} * \boldsymbol{r}_{x,\alpha} \tag{14}$$

que é análoga à definição em matrizes de transformação homogêneas com rotações puras de θ e α em torno de z e x, respectivamente, e $\boldsymbol{p}_z$ e $\boldsymbol{p}_x$ representando translações puras de d e a ao longo de z e x, respectivamente. Cada um dos quatérnios duais pode ser obtida por meio de quatro transformações básicas mostradas na Figura 7 a seguir:

$$\underline{r}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{sen}(\theta/2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Parte Primária (Rotação)} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Parte Dual (Translação)} \end{matrix} \qquad \underline{p}_{z,\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Parte Primária (Rotação)} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Parte Dual (Translação)} \end{matrix}$$

$$\underline{p}_{x,\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{a}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Parte Primária (Rotação)} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Parte Dual (Translação)} \end{matrix} \qquad \underline{r}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \mathrm{sen}(\alpha/2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Parte Primária (Rotação)} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Parte Dual (Translação)} \end{matrix}$$

Figura 7- Representação Denavit-Hartenberg com quatérnios duais

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho teve por objetivo promover a familiarização com a álgebra quaterniônica. Os quatérnios duais são apresentados como um caso particular dos biquatérnios de Clifford e como uma generalização dos quatérnios de Hamilton. A aplicação desse elemento é decorrência do requisito da facilidade de representação da transformação composta da rotação e da translação no espaço. A análise através dessa álgebra permite a justificativa da não-ocorrência de singularidades devido à linearidade da extração da representação.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADORNO, B. V. Two-arm Manipulation: From Manipulators to Enhanced Human-Robot Collaboration. PhD thesis, Université Montpellier 2, Montpellier., 2011.

GE, A. Varshney, J. P. Menon, and C. F. Chang, "Double quaternions for motion interpolation," in Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference, 1998.

KENWRIGHT, "A Beginners Guide to Dual-Quaternions: What They Are , How They Work, and How to Use Them for 3D Character Hierarchies," The 20th International Conference on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision, no. June 26–28, pp. 1–10, 2012

ROMANO et al, V. F.. Robótica Industrial: Aplicada na Indústria de Manufatura e de Processos. São Paulo. Cap. 1-2, 2002.

SCHILLING, "Universally manipulable body models— dual quaternion representations in layered and dynamic MMCs," Autonomous Robots, vol. 30, no. 4, pp. 399–425,2011

SICILIANO, B.; Khatib, O. Springer Handbook of Robotics. Napoli and Stanford, 2008

SPONG, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2005). Robot Modeling and Control. 1 edition. van Zutven, P. W. M., Modeling stability and identification of humanoid robots. Master's thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven., 2005.

SHOEMAKE, "Animating rotation with quaternion curves" em Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM Press, pp. 245–254, 1985.

INSTRUCTIONS FOR *THE CONTROL OF DIRECT KINEMATICS OF MANIPULATOR ROBOTS USING DUAL QUATERNION*

Abstract: *This article presents an overview of a mathematical tool called dual quaternions and their potential application in the field of robotics. Parallel to his view is a comparison with a traditional way of calculating rotation and translation in the kinematics of manipulator robots. Dual quaternions have been massively employed in robotics due to the fact that they are computationally more efficient in representing rotational information for a representation with homogeneous transformation matrices. Thus, this work aims to provide a detailed step-by-step explanation of how a quaternionic algebra works in a simple way for a better understanding of its implementation. Although there is a large amount of literature on the theoretical aspects of dual quaternions, on few literatures and on other practical aspects of how its use actually works. Thus, by giving a clear notion of introduction to quantum theory, this document also explains its application to robotics manipulators.*
Key-words: *Dual Quaternion, Homogeneous Transformations, Direct Kinematics.*