METODOLOGIA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FENÔMENOS COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS PARA CURSOS DE ENGENHARIA

João Bosco Laudares – jblaudares@terra.com.br
PUC Minas
Avenida 31 de Março, acesso 9 - Prédio 20 - sala 210, Bairro Coração Eucarístico
30535901 – Belo Horizonte – Minas Gerais

Saulo Furletti – saulo.furletti@ifmg.edu.br
Instituto Federal de Minas Gerais – Campus Ribeirão das Neves
Rua Taiobeiras, 169, Bairro Sevilha
33880-220 – Ribeirão das Neves – Minas Gerais

Resumo: *Neste artigo apresentamos recortes de uma pesquisa sobre uma metodologia inovadora para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, a partir da introdução de Resolução de Problemas privilegiando diversas representações de modelos. É um material didático endereçado aos alunos em um livro editado, especialmente, para os cursos das ciências exatas, que possuem em seus currículos a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. A produção do material que foi utilizado na edição do referido livro é resultado de experiências didáticas e pesquisas no Ensino de Cálculo e na Educação Matemática. A estrutura do artigo contém breve aporte referencial e um exemplo da Resolução de Problema como é tratada no referido livro, segundo a metodologia construída.*

Palavras-chave: *Resolução de Problemas; Metodologia; Equações Diferenciais.*

1. INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentamos recortes de uma pesquisa sobre uma metodologia inovadora para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace. Tal metodologia criada para edição de um livro é resultado da prática educativa e de pesquisas dos autores. Sugerimos aqui, um aporte metodológico inovador, baseado em Polya (1994) e Stewart (2013), privilegiando a Metodologia de Resolução de Problemas com a diversificação de representações: verbal, gráfica, algébrica e numérica.

A obra, de um primeiro curso de Equações Diferenciais Ordinárias – EDOs para o ensino superior foi edificada a partir de duas grandes abordagens metodológicas:

(1) abordagem operacional do cálculo da solução de uma EDO;
(2) abordagem pela resolução de problemas geométricos na intramatemática e, de fenômenos físicos da intermatemática ou interciências.

Defendemos Laudares *et al. (*2017) a abordagem metodológica diversificada para o ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias.

Assim, apresentamos algumas referências teóricas e após um exemplo de resolução de um problema utilizando a metodologia utilizada no livro.

2. REFERENCIAL

2.1 Matematização de fenômenos com Equações Diferenciais

O conceito de fenômeno, como um acontecimento, um processo em ação em transformação, com mudanças perceptíveis por observação, pode ser entendido como uma experimentação pelo "movimento" e pela "variação".

Ao observar um fenômeno, em seu processo de variação, procedemos uma medição que requer uma analítica com instrumentação para aferir e tratar as informações com variáveis, com parâmetros, com sistema de unidades e escalas.

Traduzir este processo inerente ao fenômeno em uma linguagem simbólica específica, numa tentativa de sintetizar características de sua dimensão, constitui o ato de matematizar o fenômeno, ou seja, a ação de matematização.

Matematizar é, então, a ação que resulta numa manifestação sintética dos elementos observados, de suas relações e leis inerentes a um fenômeno processado, expressos em linguagem simbólica de uma das áreas específicas da Matemática. Essa manifestação se apresenta como um modelo matemático do fenômeno, segundo Bassanezi (2006).

A Matemática tem instrumental simbólico adequado para modelar um fenômeno, além da sua descrição, ou expressá-lo em linguagem natural, que pode ser oral ou escrita.

Como linguagem simbólica escrita, apresenta-se, como possibilidade analítica e instrumental, o Cálculo Infinitesimal da Matemática. Em sua base estrutural estão as grandezas ou variáveis simbolizadas por x e y, tal que y depende de x, isto é, $y=f(x)$, e suas respectivas variações infinitesimais diferenciais dx e dy. A relação, dy/dx, entre esses infinitésimos diferenciais, permite conhecer propriedades locais (pontuais) de $y=f(x)$, como variação ou mudança de crescimento/decrescimento, dy/dx, pontos de máximo/mínimo e concavidade, objeto de estudo do Cálculo Diferencial. Por outro lado, o acúmulo ou soma do produto departes infinitesimais, $f(x)dx$, permite conhecer propriedades globais de $y=f(x)$, em dado intervalo da variável x, como área e volume ou pressão e trabalho, objeto de estudo do Cálculo Integral.

Entretanto, no estudo de fenômenos usaremos varáveis que expressam as grandezas dependentes e independentes inerentes ao fenômeno:

- Variável independente t (tempo) na maioria dos fenômenos.
- Variáveis dependentes podendo ser: T (temperatura), m (massa), i (intensidade de corrente no circuito).

Deste modo y e x são mais usados em Matemática. Assim, o Cálculo Infinitesimal engloba o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Atualmente, a denominação de Cálculo Diferencial e Integral é a mais usada.

Assim o fenômeno, um acontecimento com plena ativação e em contínuo processo de variação com movimento, se manifesta por uma configuração dimensional (que pode ser medida, modelada por uma observação caracterizada pelo uso de unidades de medida).

Desta forma, todo fenômeno se oferece para ser medido, dimensionado a partir de uma observação, expressa por processos quantitativos ou qualitativos, por modelos definidos por parâmetros medidores, tal como a variação do tempo.

Na matematização no ensino superior, a instrumentação criada para medir pode se configurar pelos conceitos de limite, derivada, diferencial, integral, a partir do cálculo infinitesimal.

Para modelagem matemática, as Equações Diferenciais se apresentam como instrumento adequado para a representação e configuração de muitos fenômenos.

2.2 Apresentação metodológica na resolução de um problema com Equação Diferencial

Vários são os passos a serem percorridos até a solução completa de um problema (suas equações) que envolve uma Equação Diferencial. Ressaltamos dois deles:

(a) Lei física – É expressa, matematicamente, pela análise da correlação das variáveis envolvidas e dos parâmetros. São estudados problemas que envolvem as Equações Diferenciais. O que queremos considerar são as etapas típicas da modelagem, isso é, os passos que vão da situação física à sua formulação matemática.

(b) Condições iniciais ou de contorno– com as quais poderemos partir de uma solução genérica e chegar a uma solução particular. Condições iniciais: entendemos uma situação em determinado instante. Esta conotação de "inicial" é sugerida visto que a variável independente, geralmente é o tempo. A solução do problema mostra o ocorrido após aquela situação dada ($t = 0$);Condições de contorno: entendemos as situações em mais de um valor da variável independente. Normalmente após um instante inicial ($t > 0$).

Temos assim um Problema de Valores Iniciais-PVI ou um Problema de Valores de Contorno-PVC.

Duas importantes propriedades devem ser levadas em consideração:

1) O número de condições iniciais ou de contorno é equivalente a soma dos parâmetros a serem determinados mais as constantes de integração.

2) O número de constantes de integração na solução geral da Equação Diferencial ordinária é o mesmo da ordem da Equação Diferencial.

2.3 Metodologia e estrutura do Livro

A metodologia que usamos na resolução de um problema com Equação Diferencial é na determinação de passos, que apresentaremos a seguir, sempre num quadro e com um esquema, isto é, um *design* próprio que instituímos para que o estudante possa fazer uma análise (estudo em partes) da situação problema e assim facilitar a sua compreensão e elaborar em linguagem natural uma síntese (estudo global) para reter a compreensão totalizante do fenômeno em processo.

Cada tipo de problema exige uma determinação de passos. Esta estrutura dada pode ser considerada um padrão a ser seguido, ocorrendo alterações de acordo com o tipo de problema a resolver.

Resolver uma situação-problema demanda o desencadeamento do raciocínio, que é feito através do desenvolvimento de etapas ou passos. Evidentemente a Física e a Matemática estão envolvidas intrinsecamente nos problemas, mas podemos, para efeito de estudo, separá-las. No estudo específico de Equações Diferenciais, estaremos interessados na lei física que será dada no enunciado do problema. Faremos a sua expressão matemática com dados da situação-problema e dos conhecimentos básicos das outras ciências como a Física, Química, entre outras. Estaremos preocupados com os desenvolvimentos da expressão matemática, que envolverá a resolução da Equação Diferencial, pela interpretação das condições iniciais ou de contorno para determinação dos coeficientes e constantes de integração.

Delineamos, deste modo, a estrutura do conteúdo da disciplina de Equações Diferenciais:

a) aprendizado dos algoritmos e processos para determinação da solução da Equação Diferencial, isto é, cálculos operacionais (derivação – diferenciação – integração);

b) resolução de problemas geométricos e de fenômenos, cuja resolução passa por uma Equação Diferencial.

Logo, assumindo estas estruturas, o livro, além dos "métodos de resolução" com o desenvolvimento dos seus algoritmos, teve destaque à "análise dos modelos de fenômenos pela resolução de problemas", de uma forma bem analítica, modelos estes que são representados por uma Equação Diferencial ou um sistema das mesmas, ou ainda com o uso das Transformadas de Laplace, na segunda parte do Livro.

Sobre a metodologia de resolução de problemas, recorremos a Polya (1994), o qual determina que há quatro fases para a resolução de problemas: (i) Entender o problema; (ii) fazer um plano; (iii) executar o plano e (iv) fazer uma retrospectiva relacionando o resultado com as condições dadas para uma compatibilização.

E ainda em Stewart (2013), temos que na resolução dos problemas, são analisadas as situações ou os contextos da elaboração dos modelos matemáticos, com 4 (quatro) distintas representações desses modelos, o que este autor chama de "Regra dos quatro" passos: visual, pelo gráfico/geométrico ou diagrama; numérico, por tabelas ou séries numéricas; algébrico, pela equação; verbal, pelo discurso escrito ou falado.

O livro apresenta algumas propostas didáticas, em dois itens, para atender ao professor e ao estudante:

(a) Na resolução das Equações Diferenciais pelos seus vários métodos de cálculo, por uma sequência hierarquizada de dificuldades, descrevendo todos os passos, fazendo uma volta aos requisitos necessários (conhecimentos prévios) para compreensão;

(b) Na resolução de problemas geométricos e de fenômenos, na análise dos modelos matemáticos, com várias representações numéricas, gráficas, de equações e verbalmente em língua natural (falar e escrever).

Assim, para atingir uma aprendizagem significativa, aquisição da compreensão, com abordagem processual, o livro privilegiou as metodologias expostas.

2.4. Metodologia aplicada à resolução de um problema de fenômeno físico

A metodologia se divide em 3 (três) representações:

1ª determinação dos modelos de equações (EDO e sua solução);

2ª determinação dos modelos na forma de gráficos;

3ªdescrição verbal do comportamento do fenômeno.

Segue a resolução de um problema, na íntegra, do livro Laudares *et al*. (2017), dentre vários presentes na mesma obra.

Problema: Vibração de molas

Movimento harmônico simples - Problema de Valor Inicial - PVI

ENUNCIADO

Dados

(I) Uma mola com massa 0,5kg tem comprimento natural de 0,8m

(II) Uma força de 15 Newtons a estica de 0,25m de comprimento

(III) A mola é esticada além de seu comprimento natural de 0,4m e solta com velocidade inicial 0 (zero)

Questões

(IV) Determine a posição (y) e a velocidade (v) em qualquer instante (t) em minutos

(V) Determine os modelos de equações do fenômeno

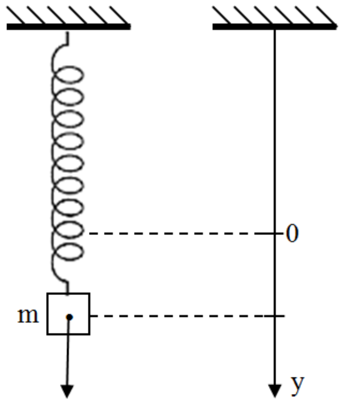
(VI) Esboce os gráficos de posição e velocidade

(VI) Descreva num pequeno texto o fenômeno comparando os gráficos e as equações

INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO

Os passos da resolução do problema estão de acordo com os itens do enunciado

Figura 1 – Vibração de mola



Fonte: Laudares *et al.* (2017)

1º Passo: MATEMATIZAÇÃO DA LEI FÍSICA

É dada pela lei de Hooke

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2}+k_1y=0} \qquad (1)$$

Identificação das variáveis:
t = tempo *y* = posição *v* = velocidade

2º Passo: Identificação da constante ou parâmetro da mola k_1 = constante da mola

Pela lei de Hooke, a única força atuante na mola, por se tratar de vibração (ideal) sem resistência, no movimento harmônico simples é dada por $F=-k_1y$, dado o valor da força para um determinado comprimento, determina-se k_1

$F=15\ N \Rightarrow$ Estica a mola 0,25 m de comprimento $15=0{,}25k_1 \therefore k_1=60$ (não há necessidade de usar o sinal negativo, que simboliza o movimento contrário a vibração; pois tomou-se um valor determinado, discreto do comprimento da mola e da força aplicada).

Observação: Em vários problemas, k_1 (constante da mola) que é caracterizado pelo tipo de mola, é dado.

Levando os valores, $m=0{,}5kg$ (dado) e $k_1=60$ (determinado), na lei de Hooke, dada no 1º passo, temos

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2}+k_1y=0 \Rightarrow 0{,}5\frac{d^2y}{dt^2}+60y=0} \qquad (2)$$

3º Passo: Neste problema as condições iniciais são

$t = 0$ minuto $\Rightarrow$ y = 0,4 m

$t = 0$ minuto $\Rightarrow$ $v = y' = 0$ m/min

4º Passo: Posição e velocidade em qualquer instante

A lei física é uma Equação Diferencial de 2ª ordem, de coeficientes constantes e homogênea, tomando-se a equação característica para $y = 1$, $y' = r$, $y'' = r^2$, virá

$0{,}5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 60y = 0 \Rightarrow 0{,}5r^2 + 0r + 60 = 0 \Rightarrow r^2 = -120 \Rightarrow r = \pm 2\sqrt{30}i$. Donde, y(t):

$$\boxed{y = y(t) = C_1\cos(2\sqrt{30}t) + C_2 sen(2\sqrt{30}t)} \quad (3)$$

Aplicando as condições iniciais $t = 0$ minuto $\Rightarrow$ y = 0,4 m

Cálculo de C_1: Levando os valores iniciais de t e x.

$y = C_1\cos(2\sqrt{30}t) + C_2 sen(2\sqrt{30}t) \Rightarrow 0{,}4 = C_1.1 + C_2.0 \quad (sen 0 = 0 \;\; e \;\; \cos 0 = 1) \Rightarrow C_1 = 0{,}4$, logo $y = 0{,}4\cos(2\sqrt{30}t) + c_2 sen(2\sqrt{30}t)$

Cálculo de C_2: Derivando y (posição), a equação é da velocidade

$$v = \frac{dy}{dt} = y' = 0{,}4.2\sqrt{30}[-sen(2\sqrt{30}t)] + 2\sqrt{30}C_2\cos(2\sqrt{30}t)$$

$$y' = -0{,}8\sqrt{30}sen(2\sqrt{30}t) + 2\sqrt{30}C_2\cos(2\sqrt{30}t)$$

Para $t = 0$ minuto e $v = y' = 0$ m/min

$0 = 0 + 2\sqrt{30}C_2 \quad (sen 0 = 0 \; e \; \cos 0 = 1) \quad \therefore \quad C_2 = 0$

Então a posição $y = 0{,}4\cos(2\sqrt{30}t) + 0 sen(2\sqrt{30}t) \Rightarrow y = 0{,}4\cos(2\sqrt{30}t)$

Derivando y, encontramos a velocidade $v = -0{,}8\sqrt{30}sen(2\sqrt{30}t)$

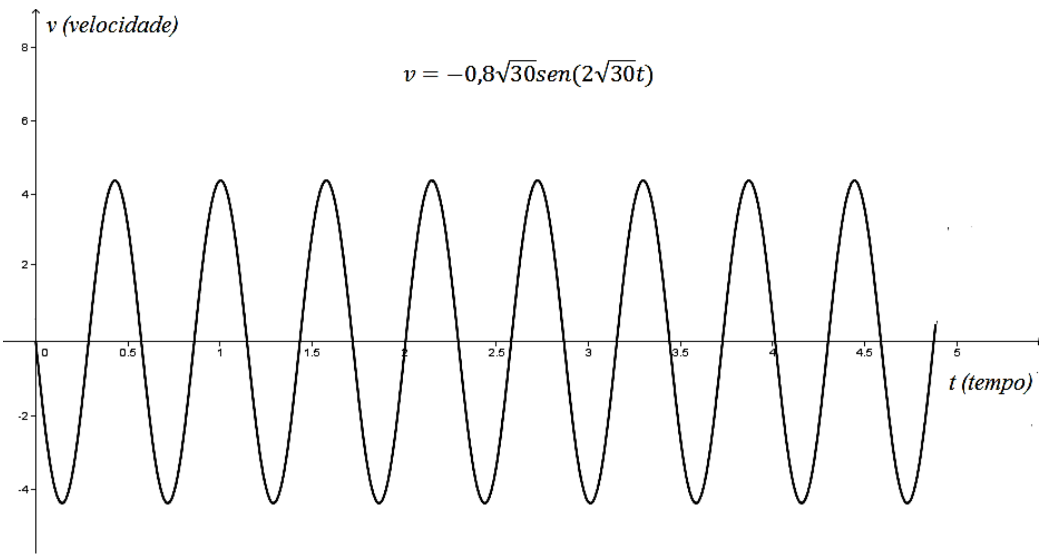
5º Passo: Equações que definem o modelo

Posição y = y(t) $\Rightarrow$ $\boxed{y = 0{,}4\cos(2\sqrt{30}t)}$ (4)

Velocidade $v = v(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{v = -0{,}8\sqrt{30}sen(2\sqrt{30}t)}$ (5)

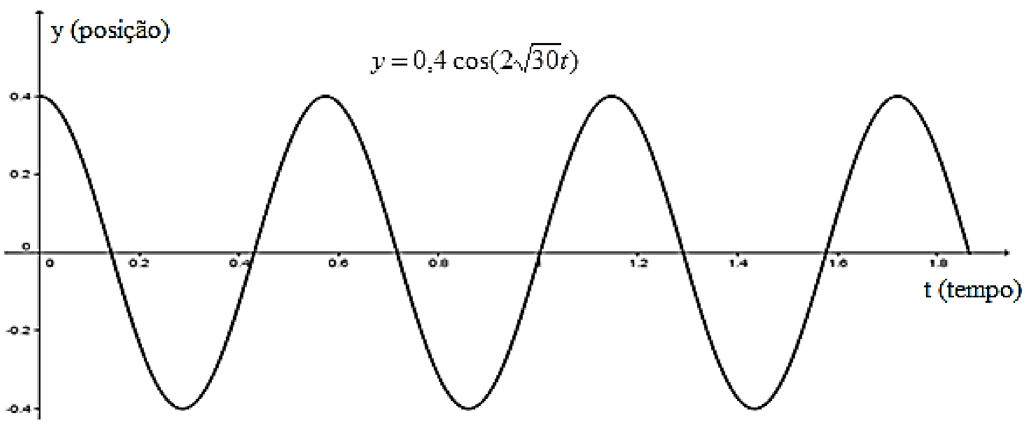
6º Passo: Gráficos da velocidade e posição

Gráfico 1 – Velocidade e Tempo



Fonte: Laudares *et al*. (2017)

Gráfico 2 – Posição e Tempo



Fonte: Laudares *et al*. (2017)

7º Passo:

(a) As respostas das seguintes questões dão suporte à compreensão do comportamento do fenômeno estudado

1) Analise a variação da posição e da velocidade pelos gráficos

2) Verifique as condições iniciais e se há compatibilidade com os gráficos da posição e da velocidade

3) Tome alguns valores da posição e da velocidade da mola para um valor de tempo

4) O que ocorre quando o tempo cresce indefinidamente?

(b) A partir do seu entendimento do comportamento do fenômeno, escreva um texto no quadro seguinte comparando os gráficos e as equações.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia pesquisada e sistematizada se encontra no livro "Equações Diferenciais ordinárias e transformadas de Laplace – Análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas. Atividades com softwares livres". Foi editado o livro, a partir da experiência de sala de aula dos autores e de pesquisas da educação matemática, que trabalharam para elaborar uma sistematização metodológica diversificada para o conteúdo de Equações Diferencias Ordinárias, utilizando uma didática baseada na Resolução de Problemas e na diversificação de representações. Ainda, não existe uma bibliografia que contempla a metodologia criada e utilizada no livro.

Ressaltamos a inovação na estrutura metodológica, que traz possibilidades para contribuir com o estudo de EDOs, segundo duas abordagens: (1) a importância do método de resolução POR PASSOS, não mais limitado a memorização de algoritmos e processos; (2) a análise e interpretação dos fenômenos pelo estudo dos modelos que o definem em várias representações, especialmente a gráfica agregada a algébrica, pelas equações.

Assim, o conteúdo das EDOS e Transformadas de Laplace, integrado a uma metodologia de estudo em todo livro, enseja uma ressignificação à procura de um percurso à compreensão dos conceitos de fenômenos e das aplicações das EDOs.

4. REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Equações diferenciais:* com aplicações, 1988.

LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas F.; REIS, Júlio Paulo Cabral; FURLETTI, Saulo. *Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace.* Belo Horizonte: Artesã. 2017

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de janeiro: Interciência, 1994.

STEWART, James. *Cálculo.* V. 2. São Paulo: Pioneira Thonson Learning, 2013.

METHODOLOGY FOR SOLVING PROBLEMS OF PHENOMENA WITH ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS TO ENGINEERING COURSES

Abstract: In this article we present clippings from a search on an innovative methodology for the study of ordinary differential equations, from the introduction of solving problems focusing on various representations of models. It is a didactic material addressed to students in a book edited, especially, for the courses of exact sciences, who have in their curriculum the discipline of ordinary differential equations. The production of the material that has been used in the edition of this book is the result of experience teaching and research in the teaching of calculation and Mathematics Education. The structure of the article contains brief contribution, and an example of solving problems as it is treated in this book, according to the methodology built.

Keywords: Solving Problems; Methodology; Differential Equations.