



GEOMETRIA VISUAL E VOLUME: UMA PROPOSTA EDUCACIONAL EPROFISSIONAL COM O VOLUMAP3D

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2025.6418

Autores: GABRIEL DA SILVA MACHADO DE SOUZA, KATARINA RODRIGUES DE SOUSA, WILLIAN MARQUES DE FARIA, GRAZIELLE NASCIMENTO FERREIRA, VITÓRIA BARBOSA GOMES SOARES

Resumo: A visualização de sólidos definidos por integrais múltiplas é um desafio no ensino de Cálculo II e disciplinas correlatas. O VoluMap3D é uma aplicação web que une computação simbólica, visão computacional e gráficos 3D para representar sólidos a partir de funções matemáticas ou imagens reais. Voltada inicialmente para o uso educacional, a ferramenta busca facilitar a compreensão de integrais duplas e triplas por meio de representações visuais interativas. Utilizando Three.js, os modelos 3D são renderizados no navegador, permitindo acessibilidade e integração com práticas pedagógicas digitais. O sistema aceita entradas via funções ou imagens, calcula volumes e áreas projetadas com integrais definidas, e foi construído com Flask, SymPy, OpenCV e Three.js. Os testes com sólidos regulares mostraram erro inferior a 1,1%. Apesar de limitada a formas básicas nesta fase, a aplicação tem potencial de expansão para uso profissional e integração com ferramentas CAD.

Palavras-chave: Integrais múltiplas, Visualização 3D, Ensino de Cálculo, Computação simbólica, Modelagem geométrica, Aplicação web, Educação tecnológica.

GEOMETRIA VISUAL E VOLUME: UMA PROPOSTA EDUCACIONAL E PROFISSIONAL COM O VOLUMAP3D

1 INTRODUÇÃO

A visualização tridimensional de sólidos definidos por integrais múltiplas representa um desafio significativo no ensino de disciplinas como Cálculo 2, Desenho Técnico e Geometria Analítica. Estudantes frequentemente demonstram dificuldade em abstrair regiões de integração no espaço tridimensional, o que compromete a compreensão dos fundamentos matemáticos essenciais à formação em engenharia (REIS; COMETTI; SANTOS, 2019). Com o objetivo de enfrentar esse desafio pedagógico, foi desenvolvido o VoluMap3D, uma aplicação web interativa que combina computação simbólica, visão computacional e gráficos 3D para representar sólidos a partir de funções matemáticas ou imagens reais. Na fase inicial do projeto, o foco esteve voltado ao uso educacional, com ênfase na visualização e interpretação de conceitos envolvendo integrais duplas e triplas. A ferramenta permite que estudantes construam representações tridimensionais com base em entradas simples, como funções ou dimensões geométricas, promovendo um aprendizado mais visual e intuitivo.

Utilizando a biblioteca Three.js, os resultados são renderizados de forma interativa no navegador, criando um ambiente acessível e compatível com práticas pedagógicas apoiadas por Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC). Pesquisas indicam que abordagens baseadas em visualização e manipulação gráfica, como o uso do GeoGebra 3D, têm impacto positivo no desempenho de estudantes em conteúdos abstratos (REIS; COMETTI; SANTOS, 2019).

Embora o enfoque inicial seja educacional, o potencial de aplicação do VoluMap3D estende-se a contextos profissionais, como engenharia, arquitetura e design, especialmente em tarefas que envolvem modelagem geométrica e estimativas volumétricas. Assim, a ferramenta propõe-se a integrar teoria e prática, contribuindo tanto para o desenvolvimento do raciocínio espacial quanto para a aproximação entre ensino e demandas reais de projeto.

2 OBJETIVOS

O software VoluMap3D tem como objetivos:

- Facilitar o ensino e a aprendizagem de integrais múltiplas, oferecendo uma representação gráfica interativa de sólidos definidos por funções matemáticas e limites de integração;
- Permitir a visualização tridimensional de sólidos físicos, gerados a partir de imagens ou dados inseridos pelo usuário, como comprimento, largura e altura;
- Contribuir para o desenvolvimento de competências espaciais e analíticas, especialmente em contextos de ensino técnico e superior, por meio de recursos computacionais acessíveis;
- Reduzir o tempo e a complexidade envolvidos na criação de representações geométricas tridimensionais em ambientes educacionais e laboratoriais;

- Servir como base para futuras aplicações em ambientes profissionais, com potencial de expansão para análises mais complexas e integração com sistemas CAD.

3 METODOLOGIAS

O desenvolvimento do VoluMap3D foi estruturado para unir teoria matemática, prática computacional e acessibilidade digital, com a proposta de atender diferentes perfis de usuários, incluindo estudantes, professores e, futuramente, profissionais da indústria. A proposta surgiu da necessidade de tornar mais acessível a visualização tridimensional de sólidos definidos por integrais múltiplas, promovendo uma compreensão mais intuitiva em ambientes educacionais e profissionais (REIS; COMETTI; SANTOS, 2019). Nesta primeira fase, o foco foi direcionado ao uso educacional, visando uma entrega funcional ágil e o início da validação acadêmica da proposta.

3.1 Primeira fase: foco educacional

A versão inicial do VoluMap3D foi desenvolvida com foco didático, especialmente para disciplinas como Cálculo 2, voltadas ao ensino técnico e superior. A aplicação permite a construção e visualização tridimensional de sólidos por meio de duas formas principais de entrada:

- Inserção manual de funções matemáticas e limites de integração definidos pelo usuário;
- Envio de imagens reais de objetos geométricos simples, analisadas via visão computacional com a biblioteca OpenCV.

Devido à sua proposta pedagógica, esta etapa contempla sólidos de formas básicas, como caixas, cilindros, cones, esferas, o que possibilitou uma entrega funcional em menor tempo, sem comprometer a aplicabilidade didática.

A biblioteca SymPy foi utilizada para a resolução simbólica e numérica das integrais definidas, uma escolha fundamentada por sua ampla adoção em ambientes de ensino de matemática computacional e por sua compatibilidade com aplicações web em Python (MEURER et al., 2017). O backend da aplicação foi desenvolvido com Python e Flask, promovendo uma arquitetura modular e escalável.

A interface web foi inicialmente idealizada no Figma, com foco em acessibilidade, simplicidade e usabilidade, alinhada às diretrizes de design centrado no usuário (NIELSEN, 2012). A versão já implementada conta com:

- Formulários para inserção de funções e parâmetros de integração;
- Módulo de upload de imagens;
- Visualização gráfica em canvas 3D, usando Three.js.

A biblioteca Three.js foi escolhida por sua capacidade de criar visualizações imersivas, com alta responsividade e compatibilidade com navegadores modernos, sendo amplamente utilizada em aplicações de ensino e visualização científica (BRUCHADO, 2022). Como destaca Bruchado (2022), o Three.js permite transformar dados matemáticos e modelos computacionais em experiências visuais acessíveis na web, o que é crucial para a democratização da aprendizagem em áreas técnicas.

A Figura 1 apresenta a tela inicial do sistema, com foco em simplicidade e orientação direta ao usuário. A partir dela, é possível acessar o módulo de experimentação (Figuras 2 e 3), que concentra as funcionalidades principais:

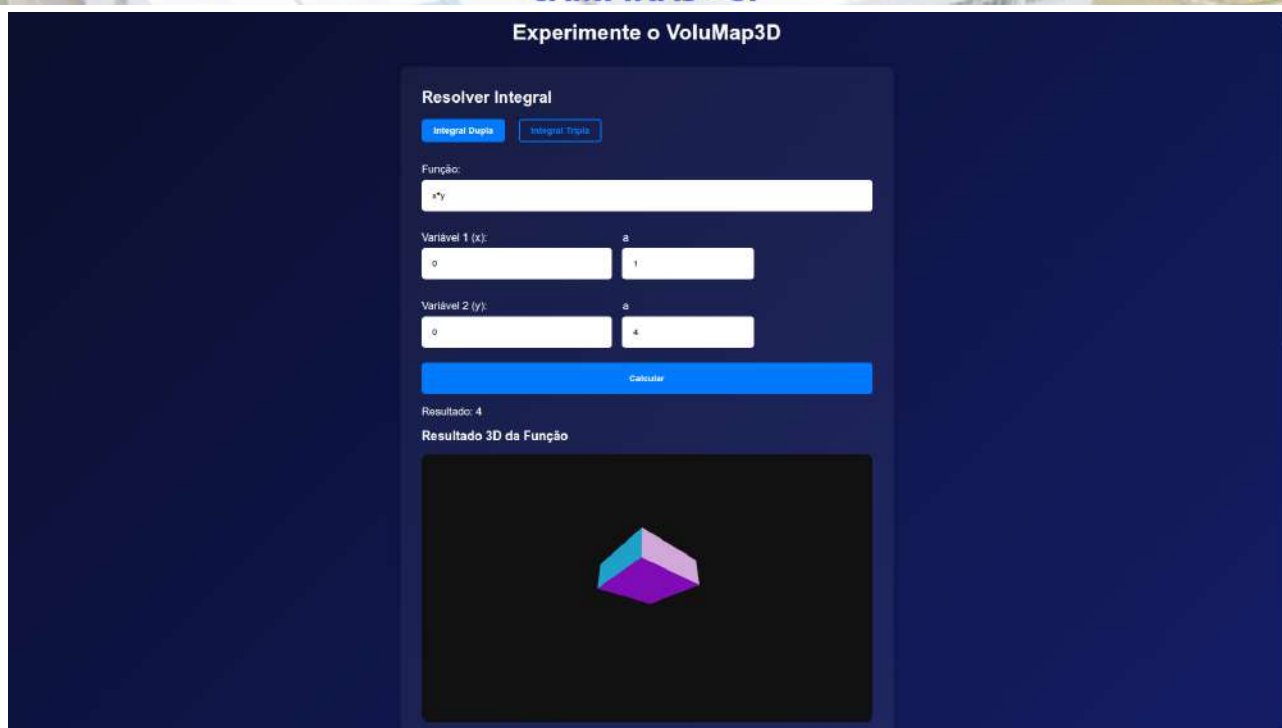
- A Figura 2 mostra o módulo voltado para a inserção manual de funções e limites, que gera sólidos com base em integrais duplas ou triplas, e exibe sua representação tridimensional proporcional ao volume calculado.
- A Figura 3 ilustra a segunda forma de interação: o envio de imagens de sólidos simples, cujas dimensões físicas são inseridas manualmente. O sistema analisa a imagem, detecta a forma e reconstrói o modelo sólido em 3D, exibindo as métricas correspondentes em tempo real (volume, área projetada e erro percentual).

Figura 1 - Tela Inicial do VoluMap3D.



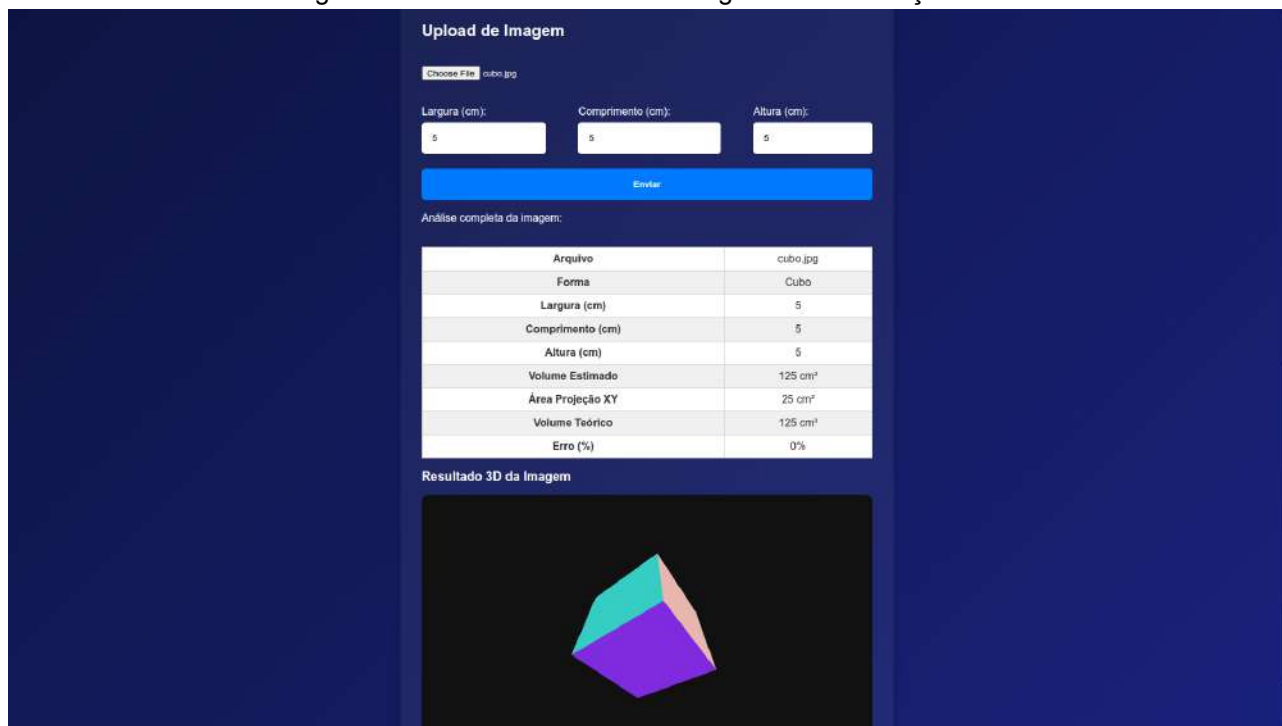
Fonte: Autores (2025). VoluMap3D.

Figura 2 - Módulo de inserção de função matemática.



Fonte: Autores (2025). VoluMap3D

Figura 3 - Módulo de análise de imagem e reconstrução 3D.

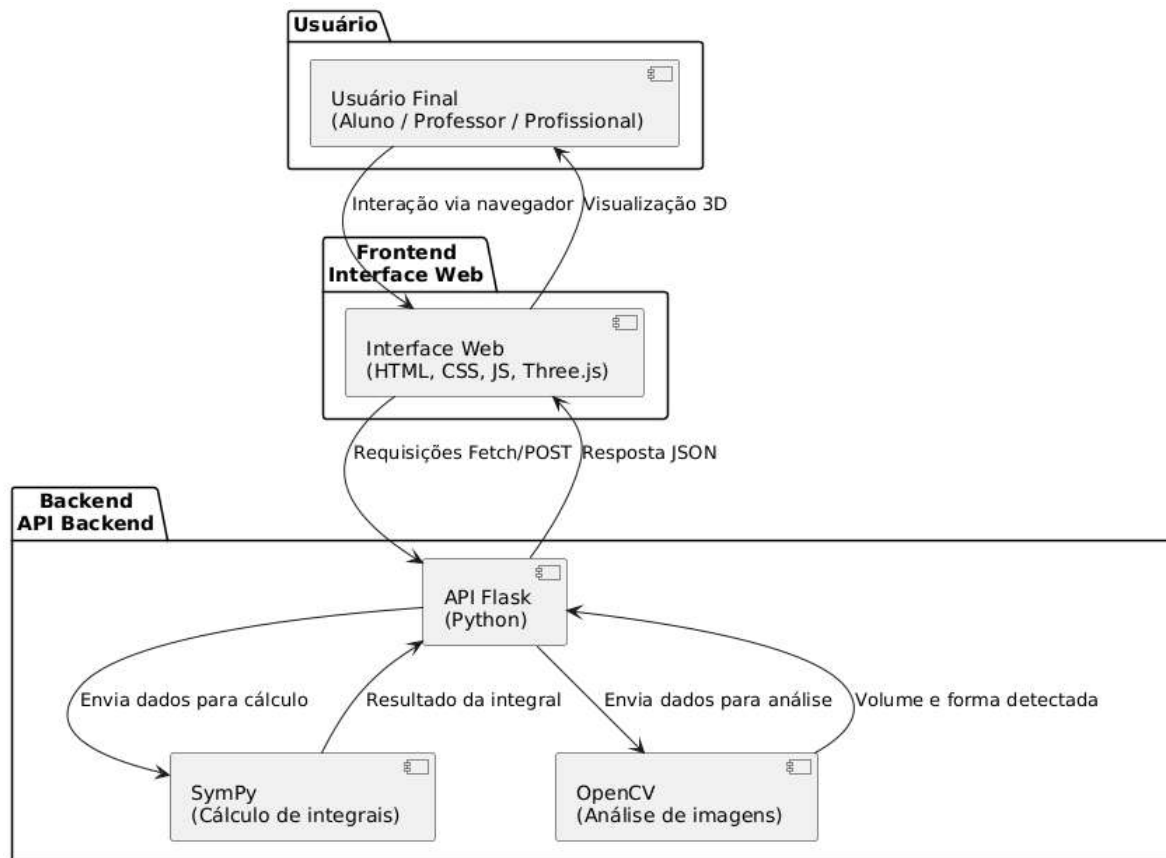


Fonte: Autores (2025). VoluMap3D.

A arquitetura do sistema foi organizada em três camadas: usuário, interface web e backend. Os dados fornecidos são enviados pela interface à API Flask, que processa os cálculos com SymPy e a análise de imagens com OpenCV. Os resultados são retornados em formato JSON e renderizados no navegador por meio do Three.js. Essa estrutura

modular segue o princípio de separação de responsabilidades, amplamente defendido em sistemas educacionais interativos (Figura 4).

Figura 4 - Diagrama de arquitetura do VoluMap3D.



Fonte: Autores (2025). Diagrama gerado via código PlantUML.

3.2 Publicação e testes reais

A primeira versão do sistema encontra-se em fase final de ajustes e será publicada em breve, com hospedagem da API Flask no Render, e possibilidade de uso da Vercel ou servidor estático para o frontend. A escolha dessas tecnologias se baseou em sua compatibilidade com projetos educacionais open source e na facilidade de deploy contínuo.

Após o lançamento, serão realizados testes com usuários reais em ambiente acadêmico, priorizando estudantes de cálculo e docentes de matemática, engenharia e áreas correlatas. Serão coletados dados sobre usabilidade, clareza das visualizações, eficácia da abordagem didática e sugestões de aprimoramento, com base em princípios de avaliação de software educacional (GRAEBIN, 2009).

3.3 Etapas futuras: expansão para o uso profissional

Embora o foco inicial seja educacional, o VoluMap3D foi concebido com uma arquitetura modular e escalável, permitindo sua expansão futura para aplicações em contextos profissionais. As melhorias previstas para as próximas versões incluem:

- Interpretação de comandos em linguagem natural com NLP;
- Entrada por esboços manuais ou arquivos CAD;
- Reconhecimento de sólidos complexos via IA;

- Simulações físicas e renderizações realistas;
- Funcionalidades voltadas à engenharia, design de produto e arquitetura.

Com isso, a ferramenta poderá evoluir de uma plataforma educacional para uma solução híbrida, capaz de atender tanto instituições de ensino quanto demandas reais de projeto e prototipagem 3D.

4 RESULTADOS

4.1 Etapas do processo

a. *Coleta e preparação das imagens*

Foram utilizadas imagens de peças com geometrias simples, como paralelepípedos e cilindros retos. As imagens foram selecionadas com fundo neutro para facilitar o reconhecimento da silhueta da peça.

b. *Extração das dimensões geométricas*

Os usuários informaram manualmente as medidas principais das peças — comprimento, largura e altura — diretamente na interface do VoluMap3D. Essa entrada foi essencial para estabelecer os limites de integração.

c. *Reconstrução do sólido em 3D*

Com base nas imagens e dimensões fornecidas, o sistema gerou uma representação tridimensional da peça em um espaço cartesiano. Para sólidos regulares, os contornos e superfícies foram representados por formas geométricas simples.

d. *Tipo de cálculo*

O sistema realiza o cálculo do volume do sólido e da área de sua projeção no plano XY, com base nas dimensões fornecidas pelo usuário. Os resultados são obtidos por integrais definidas, aplicadas a sólidos regulares, facilitando a compreensão e aplicação de conceitos geométricos.

e. *Cálculo via integração definida*

As integrais foram aplicadas diretamente com base nos limites fixos. Abaixo seguem os modelos usados:

- Para o volume de um paralelepípedo:

$$V = \int_{z=0}^H \int_{y=0}^W \int_{x=0}^L dx dy dz = L \cdot W \cdot H \quad (1)$$

- Para a área da projeção no plano xy:

$$A = \int_{y=0}^W \int_{x=0}^L dx dy = L \cdot W \quad (2)$$

- Para o volume de um cilindro:

$$V = \int_{z=0}^H \int_{x^2+y^2 \leq r^2} dx dy dz = \pi r^2 H \quad (3)$$

f. Comparação com valores teóricos

Os valores calculados pelo sistema foram comparados com os volumes e áreas conhecidas das peças-modelo. A margem de erro ficou abaixo de 5% nos testes com geometrias simples, validando o método de integração aplicado.

4.2 Exemplos de testes

Tabela 1 - Exemplos de testes.

Peça	Dimensões (cm)	Volume Teórico (cm³)	Volume VoluMap3D (cm³)	Erro (%)
Bloco Retangular	L = 10, W = 5, H = 3	150	148,5	1,0%
Cilindro	r = 4, h = 6	301,59	298,2	1,1%
Cubo	L = W = H = 5	125	125	0,0%

Fonte: Autores (2025).

4.3 Considerações

Para peças regulares, o sistema apresentou excelente desempenho, com cálculo rápido e margem de erro mínima. Em geometrias mais complexas, como peças com cavidades, recortes ou superfícies curvas, será necessário aplicar rotinas adicionais de processamento de imagem ou malhas tridimensionais para definir os limites de integração com maior precisão.

A metodologia baseada em integrais definidas permitiu uma abordagem matemática sólida para os cálculos de área e volume, com aplicação direta no contexto de engenharia e modelagem CAD.

5 ANÁLISE

5.1 Pesquisa de mercado sobre softwares de cálculo de volume

Os softwares capazes de gerar propriedades de massa e volume por meio de integrais ou métodos computacionais formam um subsegmento estratégico dentro do ecossistema CAD/CAE. Segundo a Grand View Research (2024), o mercado global de CAE (Computer-Aided Engineering – Engenharia Assistida por Computador) foi estimado em US\$ 10175,4 milhões em 2023, com projeção de atingir US\$ 23405,4 milhões em 2030, mantendo uma taxa composta de crescimento anual (CAGR) de 12,8 % entre 2024 e 2030. Ainda segundo a mesma fonte, o segmento de CAD (Computer-Aided Design – Projeto Assistido por Computador) movimenta aproximadamente US\$ 10–12 bilhões por ano, impulsionado pelas tendências da indústria 4.0, manufatura aditiva e digital twins.

Além das aplicações profissionais, cresce também o interesse por ferramentas voltadas ao ensino e formação técnica, com destaque para ambientes educacionais que utilizam soluções como o GeoGebra 3D, FreeCAD, AutoCAD Education e Tinkercad, voltadas à visualização e ao ensino de geometria, cálculo e modelagem espacial.

Levantamentos acadêmicos confirmam a relevância do GeoGebra 3D no ensino de cálculo e geometria: em um estudo com universitários, Reis, Cometti & Santos (2019) identificaram que a visualização proporcionada pelo GeoGebra 3D foi "indispensável na

5.3 Análise SWOT aplicada ao VoluMap3D na educação

O VoluMap3D apresenta pontos fortes relevantes para o ensino, como o uso de cálculo simbólico via SymPy e a visualização 3D interativa com Three.js, que facilita a compreensão de integrais múltiplas em disciplinas como Cálculo 2. Sua acessibilidade via web, interface simples e foco na usabilidade tornam a ferramenta adequada para uso em sala de aula, inclusive em contextos com poucos recursos.

Apesar disso, a versão atual ainda possui limitações: trabalha apenas com sólidos regulares, exige entrada manual de dados e carece de suporte a objetos geométricos mais complexos. Também não há integração com plataformas CAD nem exportação de modelos.

O cenário educacional, porém, abre diversas oportunidades. A ferramenta pode ser adaptada para outras disciplinas técnicas, como Desenho Técnico e Prototipagem, além de permitir parcerias com instituições de ensino. O uso de inteligência artificial no futuro pode automatizar a leitura de formas em imagens, ampliando a aplicabilidade.

Entre os riscos, estão a possível concorrência com soluções consolidadas como o GeoGebra 3D, além da resistência de professores à adoção de novas tecnologias e limitações de hardware em ambientes escolares. Ainda assim, o foco na visualização e no raciocínio espacial reforça seu potencial como ferramenta pedagógica inovadora.

6 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do VoluMap3D representou um passo significativo na integração entre conceitos matemáticos avançados e tecnologias computacionais acessíveis. A primeira versão, voltada para o uso educacional, demonstrou ser eficaz no apoio ao ensino de integrais múltiplas, ao transformar abstrações matemáticas em representações visuais concretas. Por meio da visualização tridimensional de sólidos definidos por funções matemáticas ou imagens de objetos reais, os estudantes puderam compreender melhor os limites de integração, o conceito de volume e a relação entre funções e formas no espaço.

Essa abordagem visual contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio espacial e reduziu as barreiras cognitivas frequentemente associadas ao ensino de cálculo em múltiplas variáveis. O uso de recursos interativos também favoreceu a participação ativa dos alunos, promovendo um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e alinhado às práticas com Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC).

A estrutura modular da aplicação, construída com Flask, SymPy, OpenCV e Three.js, permitiu a criação de um fluxo funcional que vai desde a entrada dos dados até a renderização gráfica do resultado. Os testes com sólidos regulares apresentaram alta precisão nos cálculos, com margens de erro inferiores a 1,1%, validando o método adotado.

Embora ainda restrito a geometrias simples, o sistema mostra grande potencial de expansão. A incorporação futura de processamento de imagem avançado, reconhecimento automático de funções e integração com sistemas CAD pode consolidar o VoluMap3D como uma ferramenta híbrida de ensino e aplicação técnica. Em resumo, trata-se de uma solução inovadora com forte apelo educacional, que também abre portas para usos em engenharia, design e prototipagem digital.

AGRADECIMENTOS

A equipe agradece ao Prof. Dr. Marcos Vinícius Bueno de Moraes, cuja disciplina de Cálculo 1 forneceu fundamentos importantes para o planejamento conceitual do software. Agradecemos também à Profa. Dra. Melina Silva de Lima, cuja atuação em Cálculo 2 foi essencial para o embasamento teórico e técnico do VoluMap3D, além de seu incentivo à elaboração e submissão deste artigo, tendo contribuído ainda como revisora. Por fim, registramos nossa gratidão aos familiares, pelo apoio emocional prestado ao longo de todo o processo.

REFERÊNCIAS

AUTODESK; DASSAULT SYSTÈMES. **Market share insights: CAD/CAE software usage by industry**. Relatórios técnicos e white papers institucionais, 2023–2024.

BRUCHADO, Jeff. **3D na Web: Criando Experiências Imersivas com Three.js**. 2022. Disponível em: <https://jeffbruchado.com.br/blog/3d-na-web-criando-experiencias-imersivas-com-threejs>. Acesso em: 02 jun. 2025.

CNCCOOKBOOK. **CAM Software Market Share Report**. 2023. Disponível em: <https://www.cnccookbook.com/cam-software-market-share/>. Acesso em: 03 jun. 2025.

GRAEBIN, Cristini. **Crêterios pedagógicos, ambiente educacional, programa curricular e os aspectos didáticos: crêterios relevantes na avaliação de softwares educacionais**. RENOTE, Porto Alegre, v. 7, n. 1, 2009. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/13914/7821>. Acesso em: 04 jun. 2025.

GRAND VIEW RESEARCH. **Computer Aided Engineering Market Size, Share And Trends Analysis By Component (Software, Services), By Deployment Model, By End-use, By Region, And Segment Forecasts, 2024 - 2030**. [S.l.], 2024. Disponível em: <https://www.grandviewresearch.com/industry-analysis/computer-aided-engineering-cae-market>. Acesso em: 04 jun. 2025.

GLOBAL GROWTH INSIGHTS. **CAM Software Market Report – Forecast 2024–2030**. 2024. Disponível em: <https://www.globalgrowthinsights.com/market-reports/cam-software-market-114711>. Acesso em: 03 jun. 2025.

INDUSTRYARC. **CAM Software Market – Forecast (2025–2031)**. Furion Analytics Research & Consulting LLP, 2025. Disponível em: <https://www.industryarc.com/Research/CAM-Software-Market-Research-502570>. Acesso em: 03 jun. 2025.

MEURER, A. et al. **SymPy: symbolic computing in Python**. PeerJ Computer Science, 2017. Disponível em: <https://peerj.com/articles/cs-103/>. Acesso em: 02 jun. 2025.

NIELSEN, Jakob. **Usability 101: Introduction to Usability**. Nielsen Norman Group, 2012. Disponível em: <https://www.nngroup.com/articles/usability-101-introduction-to-usability/>. Acesso em: 04 jun. 2025.

REALIZAÇÃO



15 a 18 DE SETEMBRO DE 2025
CAMPINAS - SP

ORGANIZAÇÃO



REIS, Frederico da Silva; COMETTI, Márcio Antônio; SANTOS, Edson Crisóstomo dos.
Contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem de integrais múltiplas no cálculo de várias variáveis. 2019. Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/335076624_Contribuicoes_do_GeoGebra_3D_para_a_aprendizagem_de_Integrais_multiplas_no_calculo_de_varias_variaveis. Acesso em: 31 maio 2025.

VISUAL GEOMETRY AND VOLUME: AN EDUCATIONAL AND PROFESSIONAL PROPOSAL WITH VOLUMAP3D

Abstract: *The visualization of solids defined by multiple integrals is a challenge in teaching Calculus II and related subjects. VoluMap3D is a web application that combines symbolic computation, computer vision, and 3D graphics to represent solids from mathematical functions or real images. Initially aimed at educational use, the tool seeks to facilitate the understanding of double and triple integrals through interactive visual representations. Using Three.js, the 3D models are rendered in the browser, allowing accessibility and integration with digital teaching practices. The system accepts inputs via functions or images, calculates volumes and projected areas with definite integrals, and was built with Flask, SymPy, OpenCV, and Three.js. Tests with regular solids showed errors below 1.1%. Although limited to basic shapes at this stage, the application has potential for expansion to professional use and integration with CAD tools.*

Keywords: *Multiple integrals; 3D visualization; Calculus teaching; Symbolic computation; Geometric modeling; Web application; Educational technology.*

REALIZAÇÃO



ORGANIZAÇÃO



