



ENTENDENDO E DISSEMINANDO O FILTRO DE KALMAN: ESTIMAÇÃO DO MUNDO REAL INCERTO

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2025.6402

Autores: GILMAR BARRETO, ROGÉRIO BASTOS QUIRINO

Resumo: O trabalho introduz o Filtro de Kalman como uma ferramenta matemática crucial para estimar o estado de sistemas dinâmicos em ambientes com medições imprecisas. Ele explica como o filtro combina previsões e medições ruidosas para obter a melhor estimativa possível, ponderando a confiança de ambos. A aplicação histórica no programa Apollo e seu uso atual em robótica, navegação (GPS) e visão computacional são destacados para demonstrar sua vasta importância. O texto também simplifica o algoritmo com um exemplo prático de estimativa de massa, mostrando sua natureza recursiva e a função do 'Ganho de Kalman' para suavizar as medições. Por fim, a metodologia e os resultados esperados de um projeto de extensão universitária são apresentados, visando desmistificar o Filtro de Kalman e disseminar seu conhecimento desde o ensino médio.

Palavras-chave: Estimação; Filtro de Kalman; Ensino Médio; Sistemas Dinâmicos

ENTENDENDO E DISSEMINANDO O FILTRO DE KALMAN: ESTIMAÇÃO DO MUNDO REAL INCERTO

1 INTRODUÇÃO

No mundo real, frequentemente nos deparamos com situações onde precisamos ter conhecimento o melhor possível de um "estado" ou um parâmetro físico real de um sistema – por exemplo, a posição de um drone, a velocidade de um carro autônomo, a inclinação de uma plataforma móvel, a posição e velocidade de uma poltrona de um ocupante de um veículo sujeito ao efeito de uma suspensão automotiva, sobre o qual está instalado, em movimento vertical. No entanto, as medições que obtemos desses sistemas são quase sempre ruidosas ou imprecisas. Sensores podem ser afetados por interferências, condições ambientais ou limitações inerentes à sua tecnologia. Como podemos obter a melhor estimativa de estados da realidade quando nossas informações são incompletas e carregam erros e imprecisões? É aqui que entram os filtros, e em particular, algoritmo importantíssimo e amplamente utilizado chamados Filtro de Kalman (FK). Desenvolvido por Rudolf Emil Kalman em 1960, o Filtro de Kalman é uma ferramenta matemática que permite estimar o estado de um sistema dinâmico. Isso significa que o filtro calcula o valor que uma variável (o "estado") que representa uma grandeza física de um sistema *provavelmente* assume em um determinado momento, mesmo que as medições disponíveis das respostas do sistema a uma sequência de entradas não sejam perfeitas. O FK faz isso combinando uma previsão de como o estado deve evoluir ao longo do tempo com as medições ruidosas recebidas, incluindo os valores reais intrínsecos. Ele pondera a confiança tanto na previsão quanto na medição em tempo real para chegar à melhor estimativa possível, (KALMAN, 1962).

A importância do Filtro de Kalman se reflete em sua vasta aplicabilidade em diversas áreas da ciência e engenharia. Historicamente, suas primeiras aplicações foram cruciais no setor aeroespacial, como no programa Apollo da NASA, para orientação e navegação de naves espaciais. Hoje, é uma técnica fundamental em robótica, ajudando robôs a mapear ambientes e se localizar, em sistemas de navegação como o GPS, em visão computacional, no processamento de sinais para extrair informações úteis de dados imperfeitos, e até mesmo em aplicações mais complexas como o controle de sistemas e análise de séries temporais. É uma ferramenta valiosa para inferência e estimação em tempo real, (KALAT, 1963)

Para muitos estudantes, o Filtro de Kalman pode parecer um assunto complexo, frequentemente associado a matemática avançada como processos estocásticos, álgebra matricial, etc. No entanto, a ideia central por trás do algoritmo é bastante intuitiva. Embora seja um tópico mais aprofundado em cursos de engenharia, compreender seus princípios básicos é uma experiência educacional válida e pode iluminar como lidamos com a incerteza em sistemas dinâmicos. Algumas fontes indicam que o ensino desses conceitos relacionados à estimação de estados é pouco abordado em certas formações de graduação, apesar de sua relevância, (ALEX, 2024)

Neste artigo, nosso objetivo principal restringe-se em apresentar somente a ideia fundamental, por questão de limitação de páginas do artigo, em que se baseia o filtro de Kalman, de uma maneira acessível e muito intuitiva. Porém, no projeto de extensão a ser desenvolvido nas instituições públicas de ensino, o comparamos a suas versões mais simplificadas e ainda mais intuitivas, observador de Luenberger (*off-line*) e os filtros α - β e α - β - γ , focando nos conceitos fundamentais e na filosofia empregada em seus desenvolvimentos e funcionamentos. Buscamos desmistificar o algoritmo do filtro de Kalman e mostrar que, embora suas equações completas possam ser elaboradas, a essência de combinar previsões com medições para obter uma estimativa melhor é um conceito compreensível e de grande

utilidade tecnológica num mundo incerto. Ao explorar o que o Filtro de Kalman faz e por que é tão útil, esperamos despertar o interesse tanto de estudantes de cursos de engenharia de instituições públicas, mas principalmente, de estudantes já do ensino médio, disseminando essa poderosa ferramenta matemática e suas aplicações no mundo real, (LUENBERGER, 1991), (MUTAMBARA, 1999) e (OGATA, 2015).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O filtro de Kalman é um coadjuvante imprescindível dos sistemas automáticos nas mais diversas áreas tecnológicas, que calcula a melhor estimativa sob um determinado critério, denominado mínimos quadrados, de uma grandeza física que está variando no tempo, mesmo quando as informações que ele recebe são inexatas. Imagine que você quer prever e estimar a posição de um carro em movimento, mas as medições que você faz para realizar esse processo previsão-estimação não são perfeitas por efeito ruidosos. O filtro de Kalman combina essas medições com um modelo do movimento do carro para dar uma estimativa mais precisa de onde ele realmente está. É um algoritmo que filtra o ruído e realiza previsões mais confiáveis, (SCHMIDT, 1985).

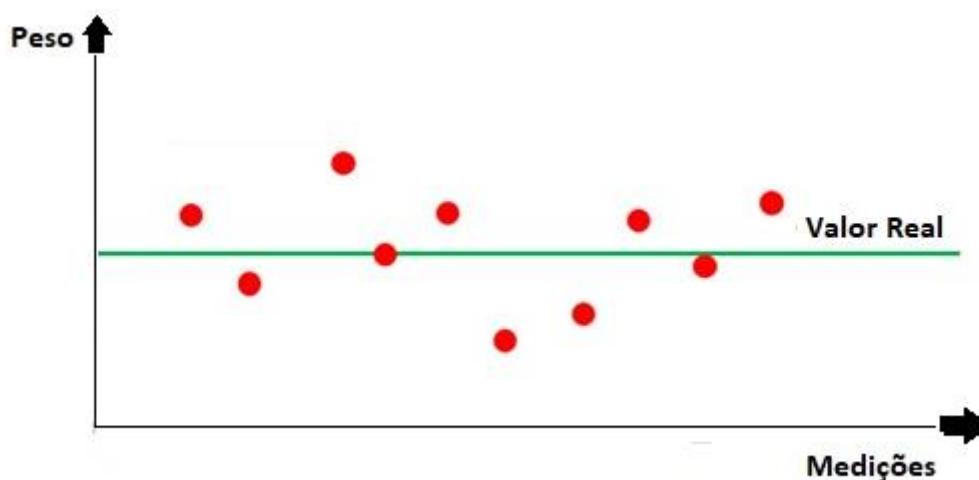
Com o intuito de passar a ideia fundamental inspiradora do filtro de Kalman, faremos o desenvolvimento teórico apoiado já de início na utilização de um exemplo de fácil entendimento e abstração, e que requer um desenvolvimento matemático relativamente elementar.

Um sistema estático é um sistema que não muda seu estado durante um período razoável. Por exemplo, o sistema estático poderia ser uma torre e o estado seria a sua altura.

Neste exemplo, estimamos o peso de uma barra de ouro. As medidas não apresentam erro sistemático, mas incluem ruído aleatório causado por erros de leitura nas medições, por exemplo.

O sistema é a barra de ouro e o estado do sistema é a massa da barra de ouro. O modelo dinâmico do sistema é constante, pois assumimos que o peso não muda em curtos períodos, pelo menos durante a experimentação.

Figura 1 – Medições x Valor Real



Fonte: Autores

Para estimar o estado do sistema (ou seja, o valor do peso), podemos fazer múltiplas medições, conforme mostrado na Fig. 1, e calcular a média delas.

No instante n , a estimativa $\hat{x}_{n,n}$ seria a média de todas as medidas prévias:

$$\hat{x}_{n,n} = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} + z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (1)$$

Notação do Exemplo:

- x é o valor real da massa de ouro.
- z_n é o valor medido do peso no instante n .
- $\hat{x}_{n,n}$ é a estimativa de x no instante n (a estimativa é feita depois de realizar a medida z_n).
- $\hat{x}_{n+1,n}$ é a estimativa futura ($n + 1$) do estado x . Em outras palavras, $\hat{x}_{n+1,n}$ é o estado predito ou estado extrapolado.
- $\hat{x}_{n-1,n-1}$ é a estimativa de x no instante $n - 1$ (a estimativa é realizada após tomada da medida z_{n-1}).
- $\hat{x}_{n,n-1}$ é a predição a priori, realizada no instante $n-1$, estimando o estado no instante n .

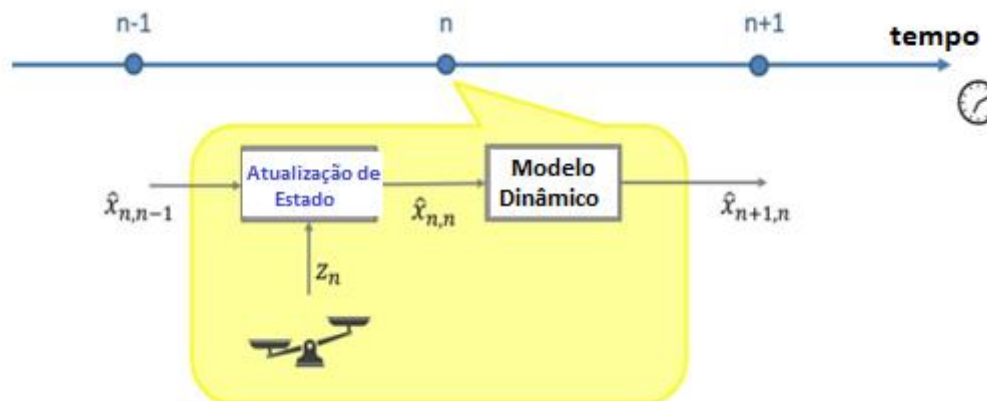
Na literatura, o chapéu (acento circunflexo) sobre a variável, indica um valor estimado.

O modelo dinâmico neste exemplo é estático (ou constante), pois o peso do ouro não muda com o tempo, portanto $\hat{x}_{n+1,n} = \hat{x}_{n,n}$.

Embora a Equação (1) seja matematicamente correta, não é prática para implementação. Para estimar $\hat{x}_{n,n}$ precisamos lembrar de todas as medições históricas. Portanto, precisamos de uma memória grande. Também precisamos recalcular a média repetidamente se quisermos atualizar o valor estimado após cada nova medição. Portanto, precisamos de uma Unidade Central de Processamento (CPU) mais poderosa. Seria mais prático manter apenas a última estimativa ($\hat{x}_{n-1,n-1}$) e atualizá-la após cada nova medição. A figura (2) a seguir exemplifica o algoritmo necessário:

- Estime o estado atual com base na medição e na previsão anterior.
- Prever o próximo estado com base na estimativa do estado atual usando o Modelo Dinâmico.

Figura 2 – Notação do Exemplo



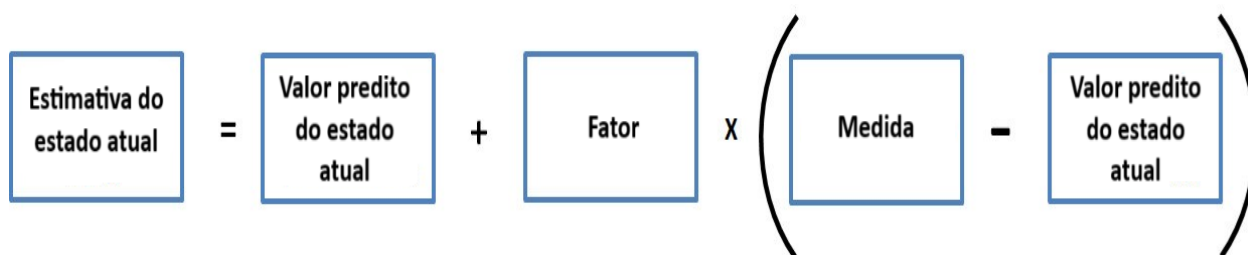
Fonte: Autores

Dessa forma, a equação recursiva de atualização de estado é descrita por:

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + \frac{1}{n} (z_n - \hat{x}_{n,n-1}) \quad (2)$$

A equação (2) de atualização de estado é uma das cinco equações que compõem o filtro de Kalman. Ela pode ser interpretada da seguinte forma (Figura 3):

Figura 3 – Interpretação diagramática da equação de atualização de estado



Fonte: Autores

O fator $1/n$ é específico do nosso exemplo. Discutiremos o papel vital desse fator mais tarde, mas agora, gostaria de observar que na “linguagem do Filtro de Kalman”, esse fator é chamado de Ganho de Kalman. É denotado por K_n . O subscrito n indica que o ganho de Kalman pode mudar a cada iteração.

A descoberta de K_n foi uma das contribuições significativas de Rudolf Kalman. Antes de entrarmos nas entranhas do Filtro de Kalman, usamos a letra grega α_n . Portanto, a equação de atualização do filtro tem a forma:

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + \alpha_n (z_n - \hat{x}_{n,n-1})$$

O termo $(z_n - \hat{x}_{n,n-1})$ é o “residual de medição”, também chamado de inovação. A inovação contém novas informações.

Neste exemplo, $1/n$ diminui à medida que n aumenta. No início, não temos informações suficientes sobre o estado atual; assim, a primeira estimativa é baseada na primeira medição $1/n=1$. À medida que continuamos, cada medição sucessiva tem menos peso no processo de estimativa, uma vez que $1/n$ diminui. Em algum momento, a contribuição das novas medições tornar-se-á insignificante.

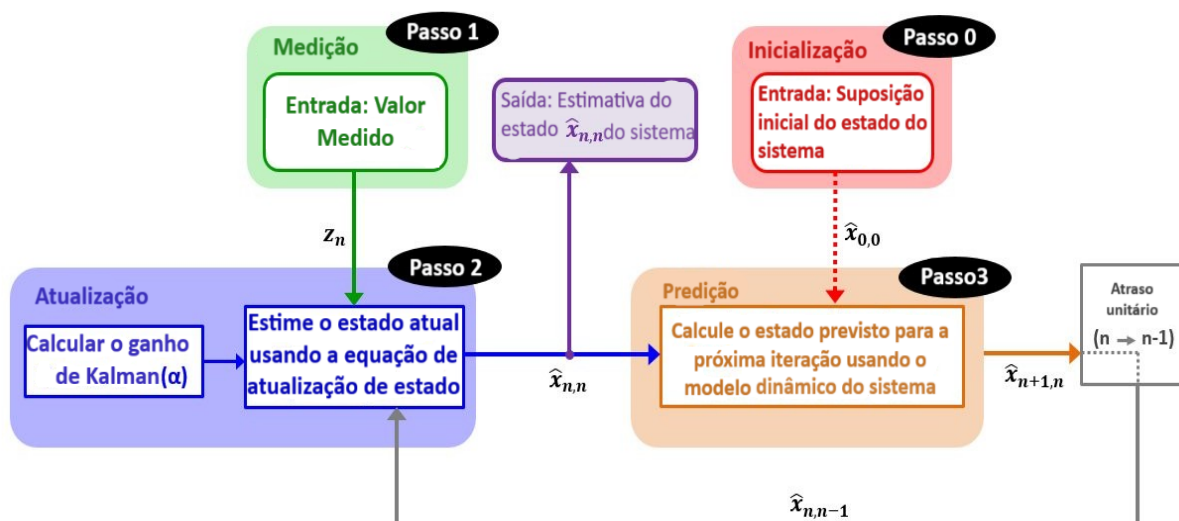
Vamos continuar com o exemplo. Antes de fazermos a primeira medição, podemos adivinhar (ou estimar aproximadamente) o peso da barra de ouro simplesmente lendo o carimbo na barra de ouro. É chamada de estimativa inicial e é a nossa primeira estimativa.

O Filtro de Kalman requer a estimativa inicial como uma predefinição, o que pode ser muito aproximado.

2.1 ALGORITMO DE ESTIMAÇÃO

A seguir descreveremos passo a passo o processo de estimação com um exemplo numérico. O diagrama descrito pela Figura 4 descreve o algoritmo de estimação utilizado neste exemplo.

Figura 4 – Algoritmo de estimação



Fonte: Autores

Iteração 0

Inicialização

Nossa suposição(chute) inicial da massa da barra de ouro é 1000g. Portanto, o modelo dinâmico do sistema é estático. A inicialização não é requerida nas próximas iterações sucessivas.

Predição

Fez-se a suposição de que a massa da barra de ouro não se altera. Portanto, o modelo dinâmico do sistema é estático. Nosso próximo passo de estimação de estado(predição) é igual a inicialização:

1ª Iteração

Passo 1

Fez-se um medida da massa que resultou na leitura:

$$z_1 = 996g$$

Passo 2

Calculando o ganho. Em nosso exemplo $\alpha_n = 1/n$, portanto:

$$\alpha_1 = 1$$

Calculando o estado atual utilizando a equação de atualização de estado:

$$\hat{x}_{1,1} = \hat{x}_{1,0} + \alpha_1 (z_1 - \hat{x}_{1,0}) = 1000 + 1 (996 - 1000) = 996g$$

A suposição inicial poderia considerar qualquer valor neste exemplo específico. Visto que $\alpha_1 = 1$, o estado atual considere o valor da suposição inicial.

Passo 3

Como o modelo dinâmico é estático, a predição é igual ao estado estimado atual:

$$\hat{x}_{2,1} = \hat{x}_{1,1} = 996g$$

2a Iteração

Passado uma unidade de tempo, a estimação predita da iteração prévia torna-se a estimativa a-priori na iteração atual:

$$\hat{x}_{2,1} = 996g$$

Passo 1

Fazendo a segunda medida da massa:

$$z_2 = 994g$$

Passo 2

Calculando o ganho:

$$\alpha_2 = 1 / 2$$

Calculando a estimativa atual:

$$\hat{x}_{2,2} = \hat{x}_{2,1} + \alpha_2 (z_2 - \hat{x}_{2,1}) = 996 + \frac{1}{2} (994 - 996) = 995g$$

Passo 3

$$\hat{x}_{3,2} = \hat{x}_{2,2} = 995g$$

3a Iteração

$$z_3 = 1021g$$

$$\alpha_3 = 1/3$$

$$\hat{x}_{3,3} = 995 + 1/3 (1021 - 995) = 1003.67g$$

$$\hat{x}_{4,3} = 1003.67g$$

4a Iteração

$$z_4 = 1000g$$

$$\alpha_4 = 1/4$$

$$\hat{x}_{4,4} = 1003.67 + 1/4 (1000 - 1003.67) = 1002.75g$$

$$\hat{x}_{5,4} = 1002.75g$$

5a Iteração

$$z_5 = 1002g$$

$$\alpha_5 = 1/5$$

$$\hat{x}_{5,5} = 1002.75 + 1/5 (1002 - 1002.75) = 1002.6g$$

$$\hat{x}_{6,5} = 1002.6g$$

6a Iteração

$$z_6 = 1010g$$

$$\alpha_6 = 1/6$$

$$\hat{x}_{6,6} = 1002.6 + 1/6 (1010 - 1002.6) = 1003.83$$

$$\hat{x}_{7,6} = 1003.83g$$

7a Iteração

$$z_7 = 983g$$

$$\alpha_7 = 1/7$$

$$\hat{x}_{7,7} = 1003.83 + 1/7 (983 - 1003.83) = 1000.86g$$

$$\hat{x}_{8,7} = 1000.86$$

8a Iteração

$$z_8 = 971g$$

$$\alpha_8 = 1/8$$

$$\hat{x}_{8,8} = 1000.86 + 1/8 (971 - 1000.86) = 997.125g$$

$$\hat{x}_{9,8} = 997.125g$$

9a Iteração

$$z_9 = 993g$$

$$\alpha_9 = 1/9$$

$$\hat{x}_{9,9} = 997.125 + 1/9 (993 - 997.125) = 996.67g$$

$$\hat{x}_{10,9} = 996.67g$$

10a Iteração

$$z_{10} = 1023g$$

$$\alpha_{10} = 1/10$$

$$\hat{x}_{10,10} = 996.67 + 1/10 (1023 - 996.67) = 999.3g$$

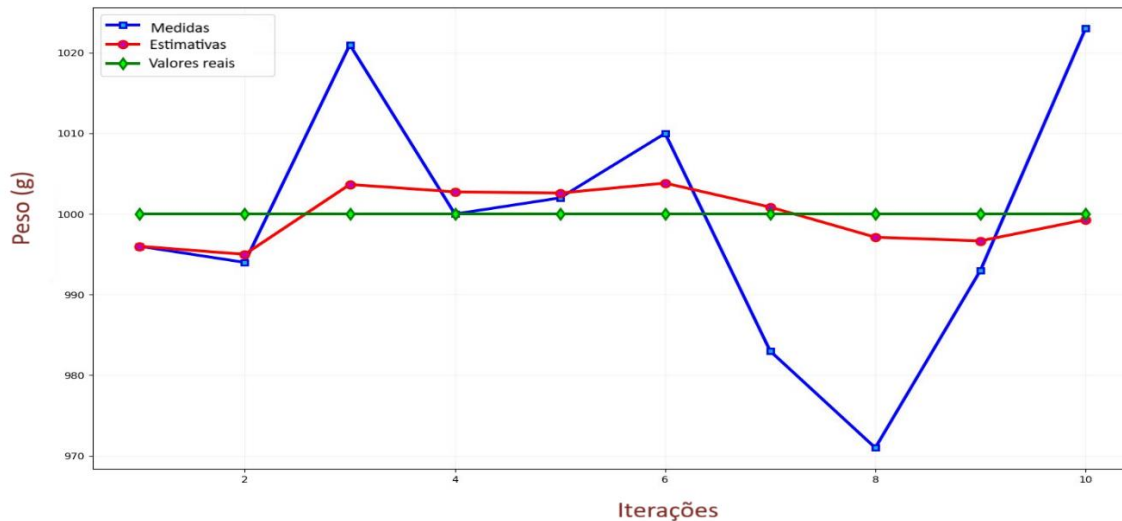
$$\hat{x}_{11,10} = 999.3g$$

Parando o processo por aqui, podemos observar que o ganho decresce com cada medida realizada. Portanto, a contribuição de cada medida sucessivamente menor do que a contribuição da medida prévia. Chegamos muito próximo do valor da massa verdadeiro que é 1000g. Caso fizéssemos mais medidas, chegaríamos cada vez mais perto do valor verdadeiro.

2.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A evolução temporal dos valores medidos, estimados e real, no processo de estimação pode ser visualizada graficamente na Figura 5.

Figura 5 – Evolução gráfica do processo recursivo



Fonte: Autores

Note que o algoritmo de estimação tem um efeito suavizador (“smoothing”) sobre as medidas e converge para o valor real.

Cabe perguntar: Qual deveria ser o número de medidas ideal? Qual o critério de parada? Pararíamos na décima, centésima ou milésima medida? O número necessário de medidas depende da precisão de estimação desejada.

Para se ter uma idéia, como utilizamos no exemplo, uma geração das medidas com um desvio padrão estatístico de 20 gramas, deveríamos fazer 400 medidas para alcançar uma precisão de 1g nas estimativas.

3 METODOLOGIA

O trabalho de disseminação nas escolas públicas, mais especificamente ao terceiro ano do ensino médio, bem como nos cursos técnicos, de tecnologia e engenharia de instituições públicas da cidade de Sinop/MT, será realizado através de um programa de extensão universitária oferecido pelo curso de engenharia elétrica da Unemat (Universidade Estadual de Mato Grosso). Nesse programa, alunos da disciplina de Controle Linear 2, oferecida no 7º semestre do curso, e da qual o conteúdo aqui tratado faz parte, desenvolverão sob orientação do professor tutor da disciplina, o suporte teórico didático de fácil compreensão e alcance, e a implementação prática à disseminação, fazendo uso de experimentos modulares com a finalidade de dar suporte as demonstrações teóricas e validações prática correspondentes.

A carga horária do curso de extensão será de 16 horas e a livre participação do aluno matriculado na disciplina de Controle Linear 2, como agente, comporá parcialmente sua nota na disciplina, dentro das 60 horas da carga horária programada para a disciplina no plano pedagógico do curso. Os experimentos modulares desenvolvidos no semestre poderão ser reutilizados ou inovados à constituição de novos experimentos nos semestres subsequentes.

4 DISCUSSÕES E RESULTADOS ESPERADOS

Como já discutido anteriormente, o Filtro de Kalman é de fundamental importância em áreas como engenharia de controle, robótica, navegação, automação e aprendizado de máquina. Sua aplicação precoce na formação técnica e superior pode promover o desenvolvimento de competências essenciais, como raciocínio lógico, análise estatística e modelagem de sistemas dinâmicos.

Entretanto, a disseminação ampla dessa tecnologia enfrenta obstáculos relevantes, tais como: (i) a insuficiência de formação específica de docentes em instituições públicas, devido à escassez de domínio em matemática avançada e teoria de sistemas (ii) limitações de recursos computacionais em escolas públicas e (iii) currículos rígidos que raramente abordam modelos estocásticos ou filtros de estado. O aprofundamento numa abordagem multinível da disseminação, pode desencadear:

Para mitigar esses desafios, propõe-se uma abordagem multinível que inclui: (a) a inserção do tema em cursos técnicos, tecnológicos e disciplinas optativas de graduação; (b) o desenvolvimento de materiais didáticos acessíveis, como simulações interativas, vídeos e softwares livres (ex.: Python e bibliotecas como NumPy e SciPy); e (c) a formação de parcerias entre universidades e escolas para projetos de extensão, como o BitDogLab. (BITDOGLAB, 2023).

Espera-se que, com a implementação dessas ações, sejam alcançados os seguintes resultados:

As projeções concretas que o trabalho espera alcançar em larga escala, caso as ações propostas sejam implementadas, são:

- Formação técnica avançada: estudantes de escolas públicas terão contato com ferramentas e conceitos avançados na formação básica ou técnica, estimulando o interesse por áreas como Engenharia, Física, Matemática Aplicada e Ciência de Dados.
- Redução de lacunas formativas: diminuição da disparidade entre os currículos das instituições públicas e o conteúdo de ponta praticado em universidades de referência e empresas de tecnologia, promovendo maior equidade no acesso ao conhecimento

- Produção de material didático nacional: desenvolvimento de livros, tutoriais e recursos didáticos que fortaleçam a autonomia científica e tecnológica no ensino de tecnologias estratégicas
- Impacto na pesquisa e extensão: estímulo a projetos de iniciação científica e extensão, aplicando o filtro de Kalman em contextos como drones, sensores, previsão meteorológica e rastreamento de objetos, promovendo maior integração entre teoria e prática no ensino público.

Por fim, a disseminação do Filtro de Kalman configura-se não apenas como uma inovação pedagógica, mas também como uma estratégia de inclusão tecnológica e científica, contribuindo para a redução das desigualdades no acesso ao conhecimento técnico de ponta, (TENNE, 2000).

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A continuidade deste projeto requer a expansão de frentes de atuação voltadas à formação docente, produção de recursos educacionais e avaliação de impacto pedagógico. Como trabalhos futuros, propõe-se o desenvolvimento de cursos e oficinas para professores do ensino médio, técnico, tecnológico e superior, capacitando-os em tópicos essenciais à compreensão e aplicação do Filtro de Kalman. Também se recomenda a criação de ambientes digitais e simuladores interativos que auxiliem na visualização intuitiva da filtragem de estados e ruídos em tempo real.

Além disso, serão valiosas as experiências-piloto em escolas de ensino médio e técnico, e universidades públicas, com o objetivo de adaptar a teoria à realidade local, avaliar o engajamento dos estudantes e revisar as abordagens pedagógicas utilizadas. Projetos de pesquisa em educação matemática e ensino de engenharia podem investigar quais metodologias facilitam a assimilação de conceitos complexos como modelos estocásticos e sistemas dinâmicos.

Finalmente, ressalta-se a importância de estabelecer redes de colaboração entre instituições públicas, visando à criação de materiais abertos, infraestrutura computacional compartilhada e eventos científicos que incentivem o protagonismo estudantil no campo da ciência de dados e controle automatizado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEX, B. “ **Kalman Filter- from the Ground Up**” , 3rd Edition , Disponível em: <https://www.kalmanfilter.net/default.aspx> , Acesso em: 13 abril 2024.

BitDogLab: a Revolução no ensino de eletrônica, programação e IoT :**BITDOGLAB** – Disponível em: <https://www.fee.unicamp.br/bitdoglab-a-revolucao-no-ensino-de-eletronica-programacao-e-iot/>. Acesso em: 26 maio. 2024.

KALAT, P.R. . A generalized parameter for $\alpha - \beta$ and $\alpha - \beta - \gamma$ target trackers | **The 22nd IEEE Conference on Decision and Control**, 1983.

KALMAN, R. E.. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Trans. of the ASME - Journal of Basic Engineering** , pages 35–45, 1960

LUENBERGER, David G. **Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications**, John Wiley, 1 ed., Jan 1, 1991.

MUTAMBARA, Arthur G.O., **Design and Analysis of Control Systems**, CRC Press, 1 ed., 1999.

OGATA, Katsuhiko, **Engenharia de Controle Moderno**, Ed Pearson, 5 ed., 2015.

SCHMIDT, S. F. ; L. A. MCGEE. “**Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry**”. Rep., NASA-TM-86847 ,1985.

TENNE, D. ; SINGH, T. . Optimal design of $\alpha - \beta - (\gamma)$ filters **Proceedings of the American Control Conference** p. 4348–4352, 2000.

UNDERSTANDING AND DISSEMINATING THE KALMAN FILTER: ESTIMATION OF THE UNCERTAIN REAL WORLD

Abstract: *The paper introduces the Kalman Filter as a crucial mathematical tool for estimating the state of dynamic systems in environments with imprecise measurements. It explains how the filter combines predictions and noisy measurements to obtain the best possible estimate, weighing the confidence of both. The historical application in the Apollo program and its current use in robotics, navigation (GPS) and computer vision are highlighted to demonstrate its vast importance. The text also simplifies the algorithm with a practical example of mass estimation, showing its recursive nature and the function of the "Kalman Gain" to smooth measurements. Finally, the methodology and expected results of a university extension project are presented, aiming to demystify the Kalman Filter and disseminate its knowledge since high school.*

Keywords: *Estimation; Kalman Filter; High School; Dynamical Systems*

