



DESENVOLVIMENTO DE UM MEDIDOR DE VISCOSIDADE BASEADO NA LEI DE HAGEN-POISEUILLE

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2025.6353

Autores: LUIS GUILHERME STEFANI POSSANI, MARCOS VINÍCIUS RODRIGUES, LAOS ALEXANDRE HIRANO

Resumo: Este trabalho desenvolve um medidor de viscosidade baseado na Lei de Hagen-Poiseuille, destinado à determinação indireta da viscosidade de fluidos por meio de medições de queda de pressão e vazão. O trabalho focou na concepção, construção e validação experimental de um sistema capaz de medir a viscosidade com precisão e confiabilidade, utilizando sensores de pressão calibrados. A metodologia envolveu a montagem de um dispositivo experimental equipado com sensores de pressão MPS20N0040D, calibrados conforme procedimentos específicos para assegurar a precisão das medições. O sistema foi testado utilizando água. Os resultados indicaram que o medidor desenvolvido proporcionou estimativas de viscosidade consistentes com os valores padrões de viscosidade da água, confirmando a eficácia do método utilizado. Conclui-se que o medidor de viscosidade desenvolvido é uma ferramenta eficaz e confiável para a medição de viscosidade, oferecendo uma base robusta para futuras investigações e aplicações.

Palavras-chave: Viscosímetro, Hagen-Poiseuille

DESENVOLVIMENTO DE UM MEDIDOR DE VISCOSIDADE BASEADO NA LEI DE HAGEN-POISEUILLE

1 INTRODUÇÃO

A viscosidade é uma propriedade física fundamental dos fluidos, influenciando diretamente sua dinâmica e o desempenho de sistemas que envolvem escoamento. Na engenharia, a medição precisa da viscosidade é essencial em áreas como engenharia química, mecânica e biomédica. Este trabalho visa desenvolver e validar um sistema de medição de viscosidade baseado na Lei de Hagen-Poiseuille, aplicando sensores de pressão e tecnologia de prototipagem com Arduino.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 VISCOSIDADE DE UM FLUIDO

A viscosidade é uma propriedade fundamental dos fluidos que mede a resistência interna ao fluxo. Essa propriedade é crucial para entender como os fluidos se comportam sob a aplicação de forças externas e tem implicações significativas em diversos campos da engenharia. Munson e Young destacam que “a viscosidade de um fluido pode ser considerada uma medida de sua espessura ou uma medida de sua resistência ao cisalhamento” (MUNSON; YOUNG, 2001).

Este conceito é vital para o design e análise de sistemas que envolvem o fluxo de fluidos, desde tubulações industriais até dispositivos médicos, onde é necessário controlar com precisão o movimento dos fluidos. A resistência ao fluxo, caracterizada pela viscosidade, influencia diretamente a dinâmica de escoamento e os requisitos de energia para sistemas hidráulicos e processos químicos. “A viscosidade dinâmica (μ), que é uma medida direta dessa resistência, é descrita matematicamente pela lei da viscosidade de Newton:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

Em que τ representa a tensão de cisalhamento e du/dy é o gradiente de velocidade perpendicular à direção do fluxo” (MUNSON; YOUNG, 2001).

2.1 LEI DE HAGEN-POISEUILLE

A Lei de Hagen-Poiseuille é uma solução clássica das equações de Navier-Stokes, crucial para compreender o fluxo laminar de fluidos incompressíveis em tubos circulares. Esta lei não apenas descreve o comportamento dos fluidos em condições controladas, mas também tem aplicações práticas em diversas áreas da engenharia.

Trata-se de uma lei da física, que descreve o fluxo de um fluido incompressível (o qual não tem variação de densidade pelo fluxo) de baixa viscosidade através de um tubo cilíndrico vertical de raio R e comprimento L , como mostra a figura a seguir.

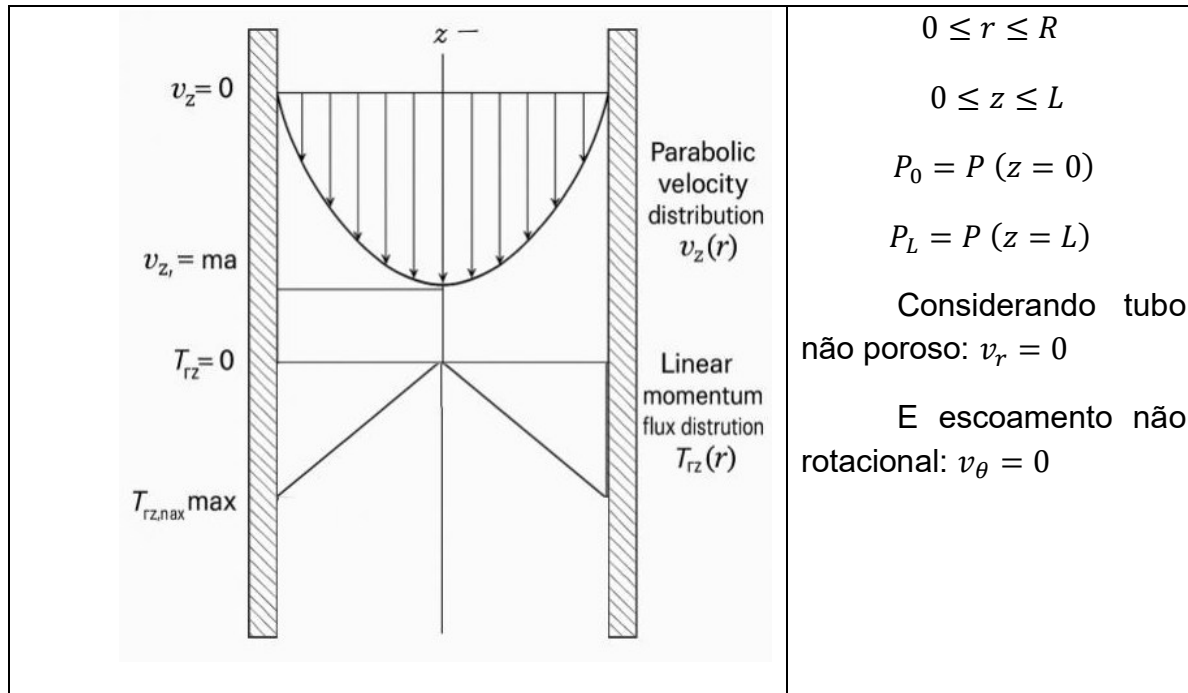
De acordo com a figura é possível observar que a velocidade do fluido na direção axial v_z , tem perfil parabólico sendo máxima no centro do tubo ($r=0$) e igual a zero nas paredes do tubo ($R=0$). Também se nota que a tensão de cisalhamento tem comportamento linear, sendo máxima nas paredes do tubo e igual a zero no centro do tubo.

Considerando as seguintes hipóteses: Regime laminar estabelecido, fluido newtoniano incompressível e isotérmico. Uma vez que há simetria axial v_z não é função de θ e como o escoamento é permanente v_z não é função do tempo t .

Aplicando equação da continuidade coordenadas cilíndricas tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \cdot v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) = 0 \quad (2)$$

Figura 1: Perfil de velocidades e de tensões para o escoamento laminar de um fluido newtoniano em um tubo vertical.



Fonte: Autor (2024)

Fluido incompressível: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; há escoamento somente na direção z , portanto: $v_r = v_\theta = 0$; a equação (1) fica:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) \quad (3)$$

Como a massa específica do fluido é constante e diferente de zero tem-se:

$\rho \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$; portanto $\frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$, significa que a velocidade na direção z independe da direção z .

Desta forma v_z é apenas função da direção radial de r , $v_z(r)$.

Considerando a equação de Navier-Stokes, coordenadas cilíndricas e direção z tem-se:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho \cdot g_z \quad (4)$$

Considerando que v_z não é função do tempo t , de z e de θ a equação (4) se resume:

$$- \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho \cdot g_z \quad (5)$$

Como a relação $\frac{\partial P}{\partial z}$ é constante ao longo de L tem-se que:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_L - P_0}{L} \text{ ou seja: } -\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_0 - P_L}{L} \quad (6)$$

Definindo a pressão piesométrica $\mathbb{P}$ como a soma da pressão estática e da carga de elevação tem-se: $\mathbb{P} = P + \rho \cdot g_z$.

Portanto, $\Delta \mathbb{P} = \mathbb{P}_L - \mathbb{P}_0$

Assim, $-\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\frac{\Delta \mathbb{P}}{L}$, rearranjando

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = +\frac{\Delta \mathbb{P}}{L} \frac{r}{\mu} \quad (7)$$

Para resolver a equação serão utilizadas as seguintes condições de contorno:

CC1: para $r = R \rightarrow v_z = 0$

CC2: para $r = 0 \rightarrow v_z = v_{\text{máx}}$

A equação do perfil de velocidades v_z , em função do raio do tubo r fica:

$$v_z = -\frac{\Delta \mathbb{P} \cdot R^2}{4 \cdot \mu \cdot L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (8)$$

Sabe-se que para $r = 0$, no centro do tubo a velocidade do fluido, $v_z = v_{\text{máx}}$.

Portanto,

$$v_{\text{máx}} = -\frac{\Delta \mathbb{P} \cdot R^2}{4 \cdot \mu \cdot L} \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8) tem-se que:

$$v_z = v_{\text{máx}} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (10)$$

De acordo com a equação da continuidade, a vazão volumétrica (Q) em função do perfil de velocidades, para escoamento em tubo de seção circular pode ser obtida através da equação a seguir.

$$Q = \iint v_z \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (11)$$

Os limites de integração são: $0 \leq r \leq R$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, portanto a equação (11) fica:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_{\text{máx}} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (12)$$

Resolvendo a integral da equação (11) e substituindo $v_{\text{máx}}$ da equação (8) tem-se:

$$Q = \frac{\pi \cdot R^4}{8\mu} \frac{\Delta \mathbb{P}}{L} \quad (13)$$

A equação (13) é a equação de Hagen-Poiseuille. Isolando a viscosidade na equação (13) tem-se:

$$\mu = \frac{\pi \cdot R^4}{8Q} \frac{\Delta \mathbb{P}}{L} \quad (14)$$

De acordo com a equação (13), pode-se obter a viscosidade de um fluido a partir da medida do raio do tubo R , do comprimento do tubo L , da medida da vazão volumétrica e da medida da queda de pressão no trecho do tubo de comprimento L .

A equação 13 ilustra a relação entre o fluxo e a resistência oferecida pela viscosidade e pelas características geométricas do tubo.

- Raio do tubo (R): A vazão aumenta exponencialmente com o raio do tubo, indicando que tubos mais largos permitem um fluxo muito maior, uma característica crucial no design de sistemas de tubulação.
- Diferença de pressão (ΔP): Um gradiente de pressão maior impulsiona o fluido mais rapidamente através do tubo, aumentando a vazão.
- Viscosidade do fluido (μ): Fluidos mais viscosos oferecem maior resistência ao fluxo, reduzindo a vazão.
- Comprimento do tubo (L): Tubos mais longos aumentam a resistência ao fluxo, diminuindo a vazão.

Esta equação é fundamental para engenheiros ao projetar sistemas que dependem de transporte eficiente de fluidos, como em sistemas hidráulicos, redes de abastecimento de água, e instalações industriais de processamento de fluidos. Ela permite uma compreensão quantitativa de como as alterações nas propriedades físicas e nas condições operacionais afetam o desempenho do sistema.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

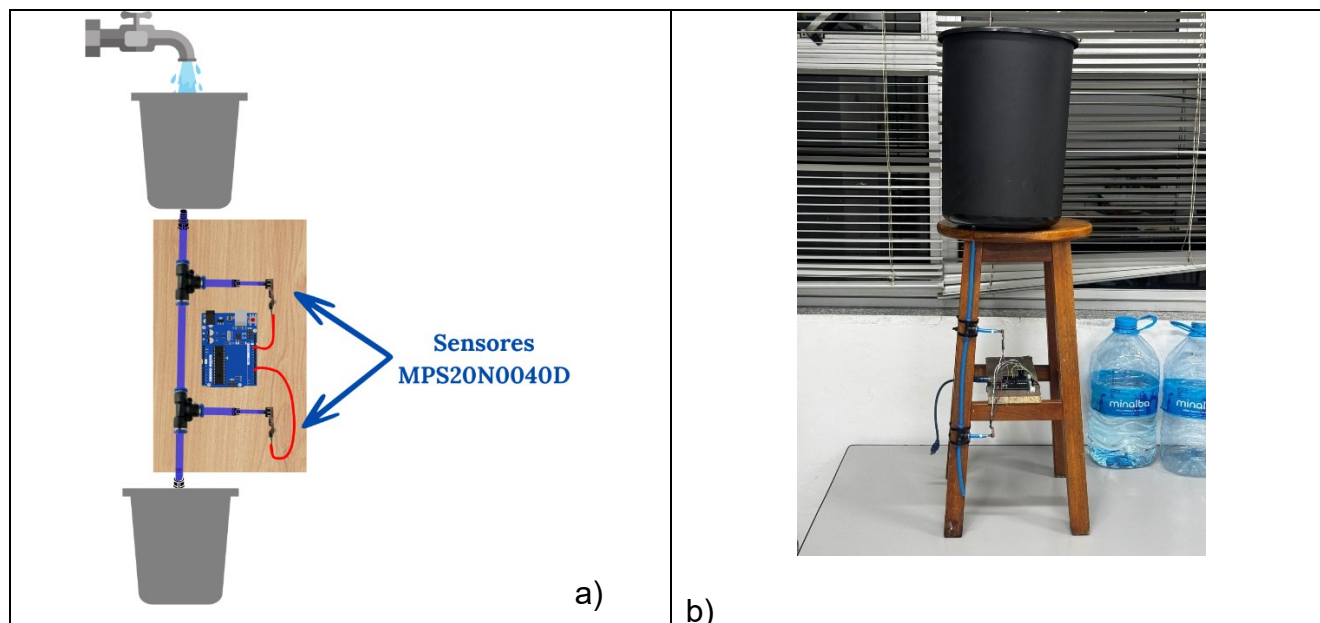
2.1 Aparato experimental

O protótipo desenvolvido para este estudo consiste em um sistema de medição de fluxo utilizando 2 sensores de pressão MPS20N0040D, conectados a um microcontrolador Arduino. O sistema inclui um reservatório de 10 litros, de onde o fluido passa por um tubo de 0,002 m de raio e comprimento de 0,20 m. Os seguintes materiais foram utilizados para montagem do experimento:

- 2x Sensores de Pressão MPS20N0040D;
- 1x Arduino Uno;
- 1x Protoboard;
- 1x Conjunto de Jumpers;
- 1x Manômetro Analógico;
- 1x Tubo Capilar e Conexões Pneumáticas;
- 1x Bulbo de Pressão Manual (Bomba de Pressão);
- 1x Recipiente com 10 litros de capacidade;
- 1x Computador com Software de Monitoramento (Arduino IDE)

A montagem e operação do aparato experimental foi dividido em quatro etapas: seleção de sensores, montagem do protótipo, calibração dos sensores e obtenção de dados experimentais. Os sensores MPS20N0040D foram conectados a um microcontrolador Arduino Uno para aquisição de pressão em dois pontos de um tubo, permitindo o cálculo da diferença de pressão e, conseqüentemente, da viscosidade. A Figura 2 mostra uma ilustração esquemática e uma fotografia do protótipo montado.

Figura 2 – a) Ilustração esquemática do protótipo e b) Protótipo físico montado



Fonte: Autor (2024)

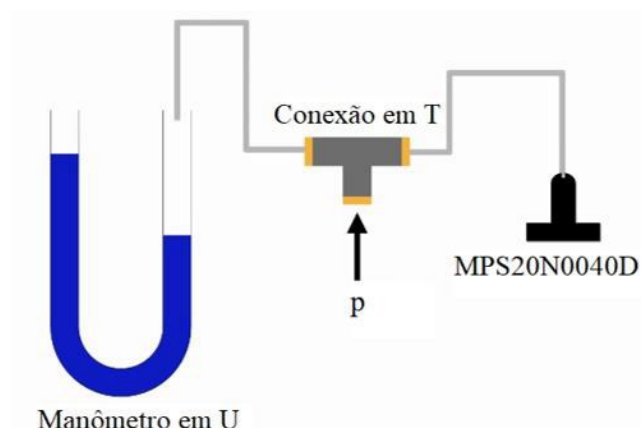
A montagem física, mostrada na Figura 2 utilizou estrutura em madeira, mangueiras de conectadas aos sensores, um mecanismo extravasor mantém o nível de água constante no reservatório evitando assim alterações na queda de pressão do sistema. Os sensores foram posicionados verticalmente com 20 cm de diferença de altura para medir a queda de pressão ao longo do escoamento. Os valores de viscosidade foram obtidos através da equação 13, sendo a queda de pressão medida pelos sensores calibrados e a vazão determinada pela razão do volume de líquido medido em proveta graduada pelo tempo de coleta.

2.2 Calibração dos sensores de pressão

Para calibração dos sensores de pressão MPS20N0040D foi utilizado painel equipado com instrumentos mostrados na figura 3. O sistema foi configurado com os seguintes componentes principais:

- **Manômetros:** Dois manômetros foram instalados para monitorar a pressão aplicada aos sensores durante os testes de calibração, permitindo a leitura precisa das pressões alcançadas.
- **Tubulação:** Uma série de tubos transparentes foi usada para conectar os componentes do sistema, facilitando a visualização do fluxo e da dinâmica do fluido.
- **Sensores de Pressão:** Os sensores MPS20N0040D foram acoplados diretamente na linha de pressão, permitindo que capturassem dados de pressão em tempo real à medida que diferentes pressões eram manualmente induzidas.
- **Pera de Vácuo:** Uma pera de vácuo foi utilizada para aplicar variações de pressão no sistema, simulando diferentes condições de operação que os sensores podem encontrar em um ambiente real de aplicação;
- **Arduino Uno e computador para monitoramento.**

Figura 3 - Visão geral do sistema de calibração



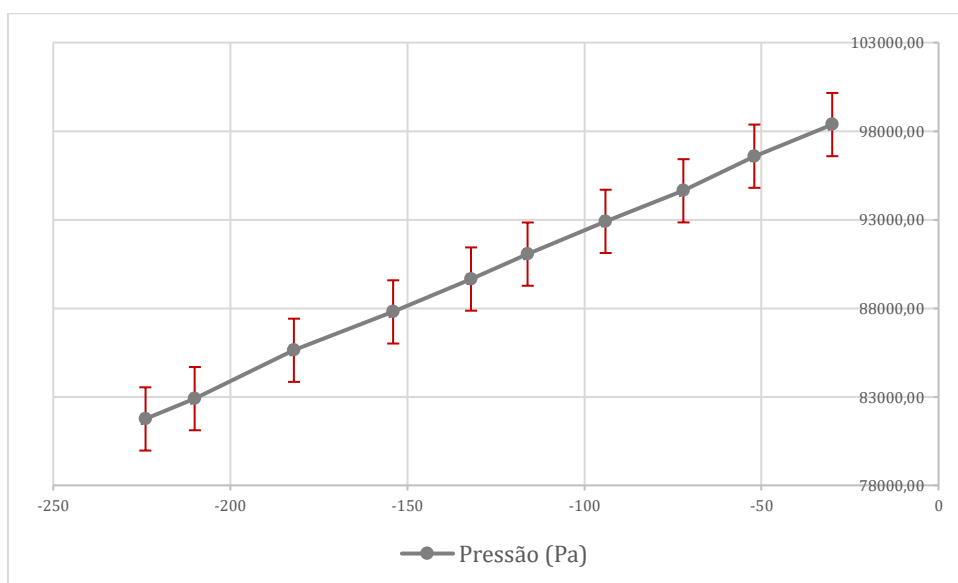
Fonte: Autor (2024)

O procedimento de calibração dos sensores de pressão MPS20N0040D iniciou-se com a configuração do sistema onde os sensores foram conectados ao Arduino e um sistema de monitoramento com manômetros. A calibração foi ativada por um botão, permitindo o controle total do início das medições. Durante o processo, foram realizadas 30 leituras de pressão para cada sensor, com intervalos de 10 milissegundos, proporcionando tempo suficiente para a estabilização da pressão. Após cada medição, a média e o desvio padrão foram calculados e exibidos em tempo real no monitor serial. Esses dados permitiram análises imediatas e ajustes nos coeficientes de calibração, assegurando que os sensores operem com precisão e confiabilidade em futuras aplicações práticas.

4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

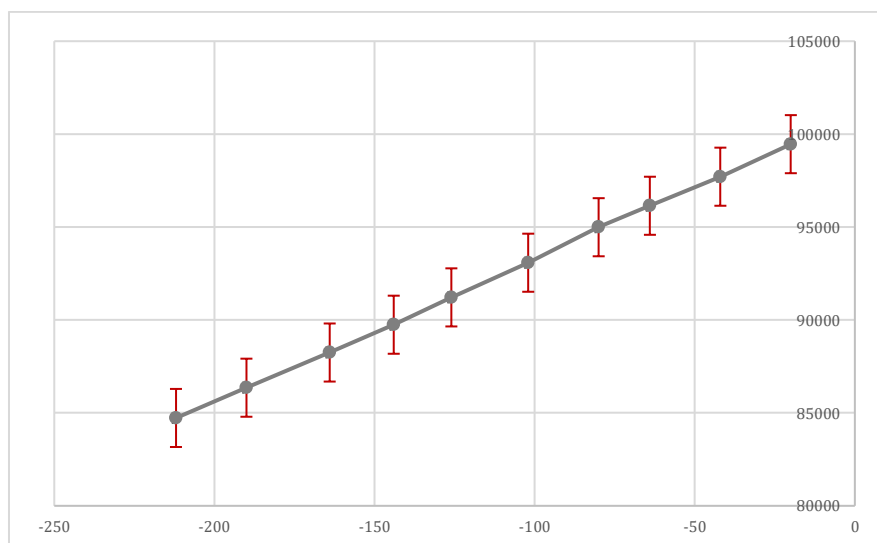
Para garantir precisão nas medições, foi realizada a calibração dos sensores utilizando uma pera de vácuo acoplada a manômetros analógicos. Os dados obtidos foram tratados estatisticamente com método dos mínimos quadrados (MMQ) e análise do erro padrão. As Figuras 4 e 5 mostram as curvas de calibração obtidas.

Figura 4 – Curva de calibração do Sensor 1



Fonte: Autor (2025)

Figura 5 – Curva de calibração do Sensor 2



Fonte: Autor (2025)

Após a calibração, foram realizados ensaios utilizando água a temperatura ambiente. A vazão foi medida a partir do tempo para escoamento de 1 litro de água. Com os valores de diferença de pressão e vazão, foi aplicada a equação de Hagen-Poiseuille para estimar a viscosidade dinâmica. Os resultados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Diferença de pressão e viscosidade calculada

Pressão Sensor 1	Erro Sensor 1	Pressão sensor 2	Erro Sensor 2	Diferença de Pressão	Viscosidade (Pa.s)
101640,08	3500	101869,63	3000	229,55	0,00072
101593,55	3500	101875,83	2500	282,28	0,00089
101557,79	2500	101880,78	3000	322,98	0,00101
101500,96	3000	101869,18	3000	368,23	0,00116
101473,13	4000	101876,39	35000	403,26	0,00127
101406,64	3500	101879,5	3000	472,86	0,00149
101398,25	3500	101836,53	3000	438,27	0,00138
101307,53	3000	101847,03	3000	539,51	0,00169
101272,35	3000	101863,31	3000	590,96	0,00186
101233,88	3000	101866,68	2500	632,8	0,00199
101207,95	3000	101837,86	2000	629,91	0,00198
102453,24	6000	102089,74	6000	363,5	0,00114
101760,07	6500	101325,22	6500	434,84	0,00137

A viscosidade da água obtida foi de $0,00138 \pm 0,00082$ Pa.s, resultado que se aproxima do valor de referência de 0,001 Pa.s a 20°C. A validação experimental demonstra que o sistema é capaz de realizar medições confiáveis com custo reduzido e boa precisão.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho buscou responder à seguinte pergunta: é possível desenvolver um medidor de viscosidade eficaz, de baixo custo, utilizando sensores de pressão calibrados e a Lei de Hagen-Poiseuille.

Com base nos resultados obtidos, a resposta é positiva. O sistema proposto demonstrou ser capaz de medir a viscosidade da água com boa aproximação em relação ao valor de referência, validando o uso da equação teórica a partir de dados experimentais. A montagem com Arduino, sensores MPS20N0040D e estrutura simples apresentou repetibilidade e viabilidade prática, mostrando-se útil para fins educacionais e de experimentação em laboratório. O modelo ainda pode ser expandido para análise de outros fluidos e automatização da leitura.

REFERÊNCIAS

BERTULANI, C. A. Fundamentos da física de fluidos. São Paulo: Edusp, 1999.
BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. Transport phenomena. 2 ed. New York: Wiley, 2002.
MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. Fundamentos de mecânica dos fluidos. LTC, 2001.
WHITE, F. M. Mecânica dos fluidos. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2011.

DEVELOPMENT OF A VISCOSITY METER BASED ON THE HAGEN-POISEUILLE LAW ABSTRACT

This work develops a viscosimeter based on the Hagen-Poiseuille Law, intended for the indirect determination of fluid viscosity by measurements of the pressure drop and flow volumetric rate. The work focused on the design, construction and experimental validation of a system capable of measuring viscosity accurately and reliably, using calibrated pressure sensors. The methodology involved the assembly of an experimental device equipped with MPS20N0040D pressure sensors, calibrated according to specific procedures to ensure measurement accuracy. The system was tested using water. The statistically treated results indicated that the developed meter provided estimates consistent with the values of specific water standards, confirming the effectiveness of the method used. It is concluded that the developed viscosity meter is an effective and reliable tool for viscosity measurement, offering a robust basis for future investigations and practical applications in the field of fluid dynamics.

Keywords: viscosimeter, Hagen-Poiseuille.

