



## ENSINO CONTEXTUALIZADO DE SISTEMAS LINEARES EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2024.5378

**Autores:** ANTÔNIO DAMÁSIO FORTALEZA DE ARAÚJO, BARTOLOMEU FERREIRA DOS SANTOS JUNIOR, ARYFRANCE ROCHA ALMEIDA, JADSONN DE JESUS COELHO LIMA, MARCIO ROBERT DE ANDRADE MOURA FILHO, CARLOS EDUARDO DE JESUS BORGES DA SILVA, HÉRICLYS SOUSA BORGES

**Resumo:** Este estudo aborda o ensino contextualizado de sistemas lineares na Engenharia Elétrica, com foco em suas aplicações práticas. Conceitos como autovalores, autovetores, e a Transformada de Laplace são explorados através de exemplos práticos, incluindo o uso em algoritmos de busca, localização precisa sem satélites, análise de componentes principais em dados espaciais, e detecção de anomalias em sensores IoT. A pesquisa evidencia como a compreensão desses conceitos melhora o design e a análise de sistemas elétricos e eletrônicos, contribuindo para avanços tecnológicos e eficiência em projetos de Engenharia Elétrica.

**Palavras-chave:** sistemas lineares, Engenharia Elétrica, autovalores, autovetores, Transformada de Laplace, aplicações práticas, IoT

# ENSINO CONTEXTUALIZADO DE SISTEMAS LINEARES EM ENGENHARIA ELÉTRICA

---

## 1 INTRODUÇÃO

A matemática, em especial a disciplina de sistemas lineares, está diretamente relacionada com várias áreas das engenharias como o balanceamento de equações, na engenharia química, construção de estruturas metálicas, na engenharia civil e circuitos elétricos. Nos cursos de engenharia, de modo geral, possui nos primeiros semestres uma leva de disciplinas básicas na área da matemática (Andressa Pescador, 2011), não se limitando apenas na graduação mas também, na pós, com a disciplina de sistemas lineares. Diante disso, surge o seguinte questionamento: “De que outras maneiras a disciplina de sistemas lineares é abordada na engenharia elétrica?”.

Como apresentado no livro Sinais e sistemas lineares escrito por B. P. Lathi (2008), sistemas são utilizados para processar sinais, permitindo a extração e modificação de suas informações, enquanto sistemas lineares implicam que tais modificações respeitam duas propriedades: homogeneidade e aditividade. Podendo esses sistemas serem físicos, que apresentam componentes físicos, implementados com *hardwares*, ou algoritmos (não-físicos) que manipulam os sinais por meio de *softwares*. O estudo de sistemas consiste em três partes: modelagem matemática, análise e projeto.

Diante disso, a fim de sancionar a indagação proposta apresentando aplicações práticas de sistemas lineares na engenharia elétrica, foram analisados uma série de artigos de assuntos pertinentes a essa temática. Para isso, se fez necessário introduzir alguns conceitos referente à matérias específicas de sistemas lineares, bem como a disciplina como um todo, somando com o levantamento de artigos inerentes à temática e suas respectivas análises.

Portanto, tal estudo se faz relevante pois o mesmo destaca as aplicações recentes sobre o tema, como também, buscar esclarecer a disciplina de sistemas lineares, evidenciando a sua relevância e utilidade prática no campo da engenharia elétrica, além de buscar contribuir, de maneira positiva, para pesquisas futuras relacionadas facilitando a encontrar estudos relevantes na temática.

As demais partes deste artigo é organizado da seguinte maneira: no referencial teórico será introduzida alguns conceitos relevantes para as futuras aplicações que serão apresentadas na metodologia, já na seção dos resultados é apresentada a discussão sobre os estudos mostrados e na conclusão é finalizado a pesquisa destacando os pontos mais relevantes.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

No domínio da álgebra linear, é dada uma transformação linear  $T$  num espaço vetorial  $V$  no qual há um vetor  $v$  diferente de zero, então este é um autovetor daquele espaço vetorial no caso em que  $T(v)$  é um múltiplo escalar desse vetor. O escalar pelo qual esse vetor é multiplicado é conhecido como autovalor, tal como demonstrado pelas equações a seguir, onde  $\lambda$  é um escalar conhecido como autovalor.

$$T: V \rightarrow V \quad (1)$$

$$T(v) = \lambda \cdot v \quad (2)$$

Pode-se considerar, também, que no caso de uma matriz quadrada  $A$ , onde o seu autovetor  $v$  é aquele quando multiplicado por essa matriz, será esse mesmo vetor multiplicado por escalar  $\lambda$ , sendo escalar o autovalor, como pode ser visto na equação a seguir. Desse modo, o vetor  $v$  continua na mesma direção quando multiplicado pela matriz  $A$ .

$$T(v) = A \cdot v = \lambda \cdot v \quad (3)$$

Desse modo é possível dizer que, os autovalores de uma dada matriz quadrada de dimensão  $n \times n$  são os  $n$  valores que são capazes de resumir as propriedades essenciais dessa matriz. Isso se deve ao fato de que se esse autovalor for subtraído de cada entrada na diagonal de sua respectiva matriz quadrada, a converterá numa matriz singular ou não-invertível. Portanto, para um autovalor  $\lambda$ , subtrair esse autovalor de cada entrada da diagonal de uma matriz quadrada  $A$  é o mesmo que subtrair  $\lambda$  vezes uma matriz identidade  $I$  de  $A$ , do modo como pode ser visto na equação a seguir.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (4)$$

A Transformada de Laplace é uma transformada integral que ganhou o nome de seu criador, o matemático francês *Pierre-Simon Laplace* que gera, a partir de uma função de variável tempo ( $t$ ), uma função no domínio da frequência. Sua forma é apresentada por meio da equação a seguir, onde é  $s = \sigma + j\omega$  a variável complexa.

$$L[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5)$$

Já a Transformada Inversa de Laplace, que fica na forma da equação mostrada a seguir, é utilizada para transformar uma função no domínio da frequência em uma no domínio do tempo, isto é, fazendo o trabalho inverso da transformada tradicional.

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st} ds = f(t) \times u(t); \text{ onde } u(t) = \{1, t > 0; 0, t < 0\} \quad (6)$$

A Transformada de Laplace foi originalmente utilizada por seu criador, para solução de integrais e equações diferenciais, transformando-as do domínio do tempo para o domínio da frequência onde elas, muitas vezes, se tornam mais simples de se manusear e resolver.

A função de transferência é um conceito fundamental no ramo da engenharia, particularmente no que diz respeito ao controle e à análise de sistemas. Ela descreve a relação matemática entre entrada e saída de um sistema linear e invariante no tempo. Ela descreve matematicamente a relação entre a entrada e a saída de um sistema linear e invariante no tempo (LTI). A função de transferência é representada no domínio da frequência ( $s$ ) e geralmente é formalmente definida na forma da equação apresentada seguir, onde  $X(s)$  representa a Transformada de Laplace da entrada do sistema,  $Y(s)$  é a Transformada de Laplace da saída do sistema e  $s$  é variável complexa de Laplace,  $s = \sigma + j\omega$ .

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (7)$$

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo são uma classe de sistemas que, como o próprio nome indica, possuem duas características principais: Linearidade e Invariância no Tempo.

- **Linearidade:** Um sistema é linear se, e somente se, obedece aos princípios da superposição e da homogeneidade.
  - **Superposição:** Se uma entrada  $x_1(t)$  produz uma saída  $y_1(t)$  e uma entrada  $x_2(t)$  produz uma saída  $y_2(t)$ , então a entrada  $x_1(t) + x_2(t)$  produzirá a saída  $y_1(t) + y_2(t)$ .
  - Se uma entrada  $x(t)$  produz uma saída  $y(t)$ , então uma entrada  $a \cdot x(t)$  (onde  $a$  é uma constante) produzirá uma saída  $a \cdot y(t)$ .
- **Invariância no Tempo:** Um sistema é invariante no tempo se suas propriedades não mudam ao longo do tempo. Isso significa que uma entrada  $x(t)$  produz uma saída  $y(t)$ , então uma entrada  $x(t - t_0)$  produzirá uma saída  $y(t - t_0)$ .

### 3 METODOLOGIA

Para obter os resultados e respostas acerca da problematização apresentada, será feita a análise de uma série de artigos e teses através de uma pesquisa explicativa, todos os documentos utilizados serão detalhados a posteriori e foram selecionados por terem relação direta com os assuntos especificados e suas respectivas utilidades na engenharia elétrica. Sendo essa uma pesquisa bibliográfica foram utilizados de plataformas como periódicos CAPES, *IEEEExplore*, *Sustainability*, *Mathematics*, entre outras, para a coleta das fontes secundárias.



Por meio desses artigos, o aprendizado de Sistemas Lineares se tornou mais contextualizado e, conseqüentemente, mais direto. O que antes era visto como algo de uma natureza quase etérea e de pouco entendimento prático, se tornou um conjunto de ferramentas cuja aplicação é inequívoca e claramente reproduzível. Isso estimula o uso dessas novas técnicas obtidas por meio desse processo para o aprimoramento de pesquisas científicas, trabalhos acadêmicos e projetos práticos além de, conseqüentemente, levar a obtenção de melhores resultados e reflexões mais aprofundadas sobre esse.

#### 4 RESULTADOS

A primeira aplicação associada com autovalores e autovetores, é bem simples e está presente no dia-a-dia de todos, a barra de pesquisa do google usa do conceito de centralidade de autovalores e autovetores para avaliar a importância de determinada pesquisa, ditando qual site irá aparecer primeiro. Somado a isso, há outra aplicação relacionada, citada em Sreenivasan (2023), para avaliar a relevância e popularidade dos objetivos de desenvolvimento sustentável, como mostrado na Figura 1.

Figura 01 – Investigação sobre o ISM e ligações aos ODS (centralidade do vetor próprio).



Fonte: Sreenivasan (2023).

Outra aplicação relacionada, é uma maneira de localização precisa e eficiente sem a utilização de satélites e dispositivos semelhantes utilizando radiofrequência e sensores para para detectar, acompanhar e localizar alvos, apresentada em Huang (2018), que utiliza autovalores e autovetores como critérios de convergência em um dos dois algoritmos, desenvolvidos no artigo, utilizados para classificar e selecionar os dados obtidos dos sensores, sendo essencial para a localização do alvo. Os autovetores também podem ser usados para filtrar o ruído de dados coletados por sensores ajudando a separar os componentes de sinal do ruído, melhorando assim a precisão das medições, como mostrada em Junior (2015).

Prichoa (2013), utiliza autovalores e autovetores para Análise de Componentes Principais em dados espaciais, espectrais e de textura extraídos de imagem Landsat 5TM de duas unidades de paisagem mediante Análise Orientada a Objetos, com o intuito de reduzir a dimensionalidade, filtrando aqueles descritores ou variáveis de maior correlação com as unidades de estudo. A Análise de Componentes Principais (ACP) é uma técnica matemática da análise multivariada, que possibilita buscas com um grande número de dados disponíveis. (Bouroche; Saporta, 1982).

A ACP pode ser sumarizada em três passos RICHARDS (1993): (a) derivação da matriz de correlação ou de variância covariância, (b) cálculo dos autovetores e autovalores, e (c) transformação linear do conjunto de dados. Esta transformação tem como base a rotação do espaço de atributos na direção dos autovetores com o intuito de tornar ortogonal o conjunto de dados, promovendo a união das informações de maior correlação nas primeiras componentes (Mather, 1999).

A evolução da engenharia de sensores associada à tecnologia de informação e serviços de telecomunicações surgiu para auxiliar na criação de projetos de baixo custo de implantação e manutenção. A revolução da Internet das Coisas (IoT - Internet of Things) tornou-se uma realidade e refere-se ao uso de sensores, atuadores e tecnologia de comunicação de dados montados em objetos físicos, de autoestrada a marca-passo, que permitem que os objetos (ou coisas) sejam monitorados, coordenados ou controlados através de uma rede de dados ou da Internet (Prado, 2014). É um dos tipo de maneira de utilização de Autovetor e Autovalor aplicações em IoT.

Já na análise de sistemas lineares no domínio da frequência, uma interessante aplicação, mostrada em Xiao (2020), é na detecção de dados anômalos em sensores de Internet das coisas, tendo em vista que os componentes de frequência seriam mais sensíveis aos valores anômalos, facilitando sua localização, na Figura 2 é exemplificado o sistema. Também, trás um algoritmo de detecção desses dados, por meio de coeficientes da transformada de Fourier do gráfico.

Figura 2 – Sistema de monitorização inteligente baseado na IoT, em que o nó vermelho indica o sensor avariado.



Fonte: Xiao 2020.

Análise de Sistemas no Domínio da Frequência e Espaço de Estados pode utilizar as Redes de Sensores Sem Fio (RSSF) são redes formadas por sensores responsáveis pelo funcionamento e pela retransmissão das mensagens, surgindo como uma abordagem alternativa para obtenção de dados, podendo fornecer informações atualizadas para os gerenciamentos dos recursos hídricos (Ueyama et al, 2010). Normalmente uma RSSF funciona em três etapas: sensor, fenômeno e observador. No caso do e-Noé os sensores espalhados pelos rios determinados aguardam o fenômeno (enchente) e o alerta é encaminhado para o observador (defesa civil e população).

A utilização de redes de sensores desempenha um papel decisivo na arquitetura da Internet of Things (IoT). Tanto a arquitetura de rede de sensores quanto a IoT afetam diretamente o sistema e as funções para o qual foi desenvolvido (Pereira, Zaslavky, Christen & Georgakopoulos, 2014). Porém o estudo realizado por Mainetti, Patrono e Vilei (2011), ressaltou a necessidade de pesquisa sobre a utilização de RSSF e IoT com o propósito de conseguir uma arquitetura tolerante a falhas, sendo a IoT uma evolução natural de RSSF para a previsão de desastres naturais.

Já em Sistemas Lineares Invariantes no Tempo Contínuo e Discreto temos a aplicação do sistema de acesso do *Power Line Communication (PLC)* é otimizado para transmissão de dados via uma rede de distribuição de energia já existente, provendo um máximo “*throughput*” em um mínimo nível de energia. Para a máxima eficiência dessa tecnologia é necessário um tipo de modulação do sinal e frequências específicas que devem evitar interferências vindas de sinais de rádio e de serviços *broadcast*. Os fabricantes têm investido em avançadas tecnologias para garantir a privacidade dos dados transmitidos. Uma das vantagens mais marcantes do *PLC* é que como toda a informação trafega pela rede elétrica da casa, a monitoração e o controle de equipamentos elétricos podem ser facilmente implementados, além é claro da comunicação de dados com o mundo exterior. No entanto, essa ainda é uma tecnologia nova, mas seus fabricantes acreditam que em breve seu uso seja difundido. Para tal, eles implementam a cada dia uma série de características para ajudar a sua popularização, dentre elas podemos citar (Tav, 2002).

Outra funcionalidade de sistemas invariantes no tempo é na defesa de sistemas *cyber-físicos*, que são sistemas físicos controlados/monitorados por algoritmos ou computadores, que frequentemente sofre ataque de hackers, no estudo de Kanellopoulos (2018), trás uma proposta de uma defesa de alvo em movimento. Nesse projeto os controles do sistema são alterados além da criação de réplicas dos dados coletados aumentando a dificuldade dos invasores de acessarem e prejudicarem o processo. A seguinte equação representa o sistema linear para modelar o sistema físico:

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (9)$$

Onde  $x(k)$  é o vetor que representa os estados do sistema físico, como temperatura, velocidade, entre outros, e  $u(k)$  é a entrada do controle.



## 5 CONCLUSÃO

Os sistemas lineares são fundamentais na engenharia elétrica, pois muitos dos sistemas e dispositivos elétricos e eletrônicos podem ser modelados e analisados usando teorias de sistemas lineares. A linearidade simplifica a análise e o projeto, permitindo o uso de ferramentas matemáticas poderosas. Tendo isso em vista, o presente trabalho abordou os conceitos básicos de sistemas lineares, bem como algumas aplicações na área da engenharia elétrica, e alguns exemplos práticos desses sistemas.

Concluiu-se, portanto, que os sistemas lineares oferecem uma base sólida para o estudo e o design de muitos aspectos na engenharia elétrica. A linearidade simplifica a análise e permite o uso de ferramentas matemáticas robustas, facilitando o entendimento e a solução de problemas complexos, como exemplificado diante das aplicações propostas.

A evolução da aquisição e monitoramento de dados remotos requer alinhamento das melhores práticas com as lacunas de mercado. A estratégia defendida inclui desenvolvimento de tecnologia nacional, cooperação entre centros de pesquisa, universidades e empresas tecnológicas no Brasil. Um bom sistema de aquisição e monitoramento de dados remotos ajuda a planejar paradas programadas, detecta áreas com falhas potenciais, organiza recursos e otimiza o desempenho do equipamento, evitando o envelhecimento prematuro e excesso de peças de reserva.

## REFERÊNCIAS

BOROUCHE, J. M., SAPORTA. G. **Análise de dados**. Zahar Editores. Rio de Janeiro, 1982. 116 p.

HUANG, H.; ZHAO, H.; LI, X.; DING, S.; ZHAO, L.; LI, Z. An accurate and efficient device-free localization approach based on sparse coding in subspace. **IEEE Access**, v. 6, n.1, 2018.

JUNIOR, Francisco Granziera. **Mapeamento de conflitos na determinação e controle de atitude e estratégia para sua mitigação considerando erros dos sensores e atuadores e quesitos de missão**. 2015. Tese (Doutorado) – Curso de Pós-Graduação em engenharia e tecnologia espaciais/mecânica espacial e controle. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015. Disponível em: <http://mtc-m21b.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m21b/2015/04.24.14.00/doc/publicacao.pdf>. Acesso em: 07 jun. 2024.

KANELLOPOULOS, A.; VAMVOUDAKIS, K.G. A moving target defense control framework for cyber-physical systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**. No. CPS-1851588, 2018.

LATHI, B. P. **Sinais e sistemas lineares**. 2. ed., Porto Alegre: Bookman, 2008.



MATHER, P.M. Computer processing of remotely sensed images. New York: John Wiley e Sons, Inc., 1999. 292 p.

Nascimento, M. B. Tavares, A. C. Tecnologia de Acesso em telecomunicações. São Paulo: Berkeley, 2002. 114 p. Acesso em: 08 jun. 2024.

Pereira, C., Zaslavsky, A., Christen, P., Georgakopoulos, D., (2014). Aware computing for the internet of things: A survey. **IEEE Communications Surveys Tutorials**, v. 16, p. 414 – 454. Acesso em: 08 jun. 2024.

PESCADOR, A. Aplicação de álgebra linear na engenharia. In: XXXIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2011, Blumenau. **Anais**. Blumenau. Disponível em: <https://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/8/sexsoestec/art2127.pdf>. Acesso em 07 jun. 2024.

Prado, E. (2014). **Internet das Coisas: O charme dos sensores**. Disponível em: <https://www.convergenciadigital.com.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?UserActiveTemplate=site&inford=38222&sid=15>. Acesso em: 08 jun. 2024.

PRICHOA, Carla Eva; RIBEIRO, Selma Regina Aranha. Aplicação da análise de componentes principais em dados extraídos automaticamente de imagens de satélite Landsat 5 TM. In: Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, 16., 2013, Foz do Iguaçu. **Anais...** São José dos Campos: INPE, 2013. p. 3986-3993.

RICHARDS, John. A. **Remote Sensing Digital Image Analysis - An Introduction**. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin. 1993. 281p

SREENIVASAN, A.; MA, S.; NEDUNGADI, P.; SREEDHARAN, V.R.; RAMAN, R.R. Interpretive structural modeling: research trends, linkages to sustainable development goals, and impact of COVID-19. **Sustainability**, 15, 4195, 2023.

Ueyama, J., Hughes, D., Man, K. L., Guan, S., Matthys, N., Horré, W., Michiels, S., Huygens, C., & Joosen, W. (2010). Applying a multi-paradigm approach to implementing wireless sensor network based river monitoring. p. 187 – 191. Acesso em: 08 jun. 2024.

XIAO, Z.; FANG, H.; WANG, X. Anomalous IoT sensor data detection: an efficient approach enabled by nonlinear frequency-domain graph analysis. **IEEE Internet of Things Journal**. Vol \*\*, N \*\*, 2020.

## CONTEXTUALIZED TEACHING OF LINEAR SYSTEMS IN ELECTRICAL ENGINEERING

**Abstract:** *This study addresses the contextualized teaching of linear systems in Electrical Engineering, with a focus on their practical applications. Concepts such as eigenvalues, eigenvectors, and the Laplace transform are explored through practical examples, including their use in search algorithms, precise localization without satellites, principal component analysis in spatial data, and anomaly detection in IoT sensors. The research*

*highlights how understanding these concepts improves the design and analysis of electrical and electronic systems, contributing to technological advances and efficiency in Electrical Engineering projects.*

**Keywords:** *Eigenvalues, Eigenvectors, Electrical Engineering, Geolocation, Internet of Things, Laplace Transform, Linear Systems.*

