



## EXPLORANDO A SIMETRIA NO LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL: IMPLICAÇÕES DA INTERDISCIPLINARIDADE E APLICAÇÕES NO CÁLCULO DIFERENCIAL

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2024.5288

**Autores:** VITÓRIA BEATRIZ SILVA SOUZA, CAMILA FERRO DE OLIVEIRA FARIAS, MARIANA FARIAS VITAL DOS SANTOS, JOZELITA MARIA DOS SANTOS NETA, ALBERTO HELENO ROCHA DA SILVA

**Resumo:** Diversos autores renomados, bem como Barbosa (2021) e Nasser (2008), enfatizam a importância do estudo do cálculo na área de exatas, em especial na Engenharia. No contexto de que a matéria é de suma importância para o desenvolvimento da capacidade lógico-analítica dos estudantes para a continuidade de toda a matriz curricular dos cursos, visto que o cálculo adapta-se às necessidades de cada matéria e seus contextos. Porém, a grande dificuldade de compreensão encontrada pelos estudantes, acarreta nos altos índices de reprovação e abandono dos cursos, nas quais as principais barreiras enfrentadas pelos discentes, são advindas desde o ensino médio e estão na compreensão de conceitos fundamentais, como funções, limites e derivada. Diante disso, artigo em questão, visa dissertar sobre uma abordagem de ensino de um dos temas centrais da matéria, o Limite Trigonométrico Fundamental (L.T.F.), almejando enfatizar seus aspectos de interdisciplinaridades através da utilização de representações gráficas de dados, configurando uma exemplificação mais acessível e eficaz, proporcionando uma visão mais ampla de sua aplicação na grade curricular dos cursos de engenharia.

**Palavras-chave:** L.T.F, engenharia, ensino, cálculo, interdisciplinaridades.

# EXPLORANDO A SIMETRIA NO LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL: IMPLICAÇÕES DA INTERDISCIPLINARIDADE E APLICAÇÕES NO CÁLCULO DIFERENCIAL

## 1 INTRODUÇÃO

Nos estudos de Barbosa (2021), destaca-se a relevância do cálculo nos cursos da área de exatas, especialmente nos cursos de Engenharia. Nesse contexto, o cálculo é essencial para o desenvolvimento da capacidade lógico-analítica dos estudantes, influenciando diretamente no desenvolvimento ao decorrer de todas as matérias de forma aplicada em cada contexto. No entanto, essa disciplina específica é geralmente ministrada no início do curso, representando o primeiro contato dos alunos com uma matemática “nova”, introduzindo de maneira abstrata, levando os fundamentos da base às formas mais complexas, muito distinta daquela abordada no Ensino Médio. Essa transição abrupta pode resultar em uma falta de envolvimento dos alunos com a disciplina e, conseqüentemente, questionamentos sobre sua importância dentro do curso, devido à dificuldade em compreender seus verdadeiros objetivos e aplicações.

Como consequência desse cenário, os índices de reprovação nas disciplinas de cálculo nos cursos de engenharia tendem a ser elevados, prejudicando o desempenho, o progresso e, muitas vezes, a própria continuidade dos estudantes universitários. Essa situação tem sido motivo de preocupação desde a década de 1980, com o surgimento do movimento conhecido como *calculus reform*, conforme evidenciado por Rezende (2003, p.3, citado por Silveira, 2015, p. 2). Esse movimento destaca-se por várias características distintas, com o objetivo de melhorar o ensino e a aprendizagem do cálculo: o uso de tecnologia, como software computacional e calculadoras gráficas; um ensino pautado na "Regra dos Três", que exige que todos os tópicos e problemas sejam abordados de maneira numérica, geométrica e analítica; uma forte ênfase na demonstração da aplicabilidade do cálculo por meio de exemplos reais e dados referenciados; e uma tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos.

Além disso, Nasser (2008, citado por Silveira, 2015, p. 2) afirma, em suas pesquisas sobre as dificuldades no ensino do cálculo, que as principais barreiras encontradas estão na compreensão de conceitos fundamentais, como funções, limites e derivadas, tanto pela dificuldade de assimilação das informações dos alunos, devido a falta e domínio dos princípios básicos fundamentais dos assuntos ao decorrer da deficiência de aprendizado partindo do ensino médio, quanto às metodologias utilizadas pelos docentes à transmissão de tais informações. Diante desse panorama, Silva (2016) argumenta que uma variedade de fatores influencia os processos de ensino e aprendizagem do cálculo, contribuindo para as dificuldades enfrentadas tanto pelos alunos quanto pelos professores. Dentre essas dificuldades, destaca-se a metodologia pedagógica tradicional e conteudista, baseada no ensino centrado na reprodução, que tende a comprometer a compreensão dos conceitos e a motivação para o aprendizado.

Diante deste contexto desafiador, o presente trabalho propõe apresentar uma abordagem de ensino, fundamentada na demonstração de um tema central na matriz curricular do cálculo, o limite trigonométrico. Almejando, por meio do artigo, evidenciar sua interdisciplinaridade conjugando-a à utilização de representações gráficas de dados,

configurando uma exemplificação mais acessível e eficaz para facilitar o aprendizado dos discentes.

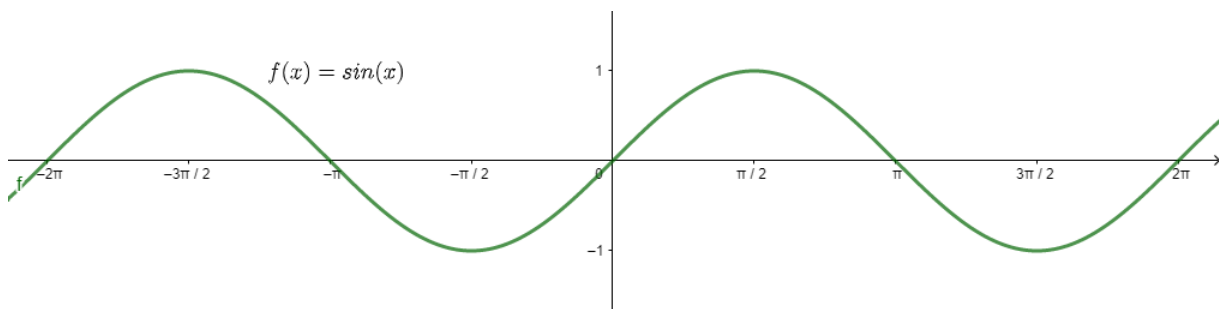
## 2 METODOLOGIA

A metodologia adotada baseia-se na aplicação das simetrias, em concordância com Silva (2014), no Limite Trigonométrico Fundamental (L.T.F.), com ênfase teórica e abordagem quantitativa. Desse modo, este artigo fundamenta-se na apresentação das interdisciplinaridades presentes no Cálculo Diferencial, especificamente no L.T.F. Diante desse contexto, realizou-se uma revisão da literatura, consultando livros de cálculo, cálculo aplicado e aplicações matemáticas relevantes para este estudo. Para aprofundar o embasamento teórico, foram feitas leituras complementares de materiais essenciais à compreensão das simetrias, um princípio fundamental para a aprendizagem dos limites. Essas leituras nos permitem afirmar, de acordo com Lívio (2011) e Singh (2004), que um modelo matemático, como uma equação ou teorema, é uma aplicação prática de simetria no contexto teórico e social. Com essa perspectiva, as análises começaram com o estudo das simetrias aplicadas aos limites, utilizando definições, propriedades e teoremas. Além disso, o *software* GeoGebra foi empregado para modelar gráficos e visualizar as simetrias nas funções. Dessa maneira, tornou-se viável explorar o L.T.F. e as interdisciplinaridades que o compõem. Essa abordagem interdisciplinar não só reforça a compreensão do limite, mas também destaca sua aplicação prática e teórica em diversos contextos.

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As funções trigonométricas são ricamente dotadas de simetrias – rotações, translações e afins. Neste tópico, trataremos especificamente da função seno (Figura 1). Essa função é classificada como ímpar e, portanto, sua curva é simétrica em relação à origem (SILVA, 2014). Ademais, seu domínio inclui todos os elementos do conjunto dos números reais, enquanto sua imagem é determinada pelo intervalo fechado que vai de menos um (-1) até um (1), ou seja, [-1, 1].

Figura 01 – Senóide



Fonte: Autores, 2022.

É importante destacar que a função seno pode ser demonstrada com base nos princípios do Cálculo Diferencial II. Assim, observa-se que essa função pode ser reescrita como uma série de Maclaurin, conforme apresentado abaixo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

Diante do exposto, torna-se viável tratarmos neste momento do Limite Trigonométrico Fundamental, temática principal deste trabalho. Inicialmente, temos:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2)$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \quad (3)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots = \quad (4)$$

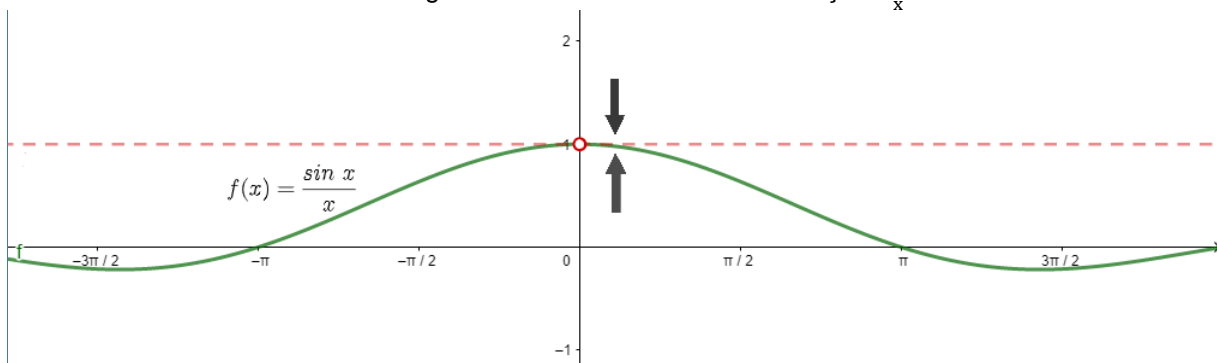
Aplicando o limite nessa igualdade, encontramos:

$$\frac{\sin x}{x} = \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) = \quad (5)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (6)$$

Assim, identificamos o Limite Trigonométrico Fundamental, ilustrado no gráfico a seguir (Figura 2).

Figura 02 – Gráfico do limite da função  $\frac{\sin x}{x}$



Fonte: Autores, 2022.

Fundamentando-se no contexto apresentado, é notório que o L.T.F. exemplifica a rica interdisciplinaridade presente no Cálculo Diferencial, que inicia sua trajetória de aprendizado na natureza das funções ímpares bem como na simetria gráfica das funções trigonométricas, avança para a análise das propriedades, o entendimento da linearidade das funções e aplicação das séries a partir da simetria da função seno. Por fim, aprofunda-se na aplicação de integrais, para que se possibilite o entendimento da convergência e aproximação dessas funções.

A reescrita da função seno em termos de uma série de Maclaurin permite representá-la como uma soma infinita de termos polinomiais, facilitando a compreensão de seu comportamento próximo de zero. Esse mecanismo matemático, além de viabilizar o cálculo dos limites, evidencia os parâmetros simétricos presentes na função trigonométrica e na série. Essa abordagem demonstra a conexão entre a análise matemática e a resolução de

problemas complexos que envolvem aproximações e modelagem, utilizando os princípios das simetrias.

Os conceitos simétricos são frequentemente apresentados em sala de aula a partir de métodos teóricos e práticos, introduzindo-se o conceito de simetria relacionada ao L.T.F, ao explicar as propriedades das funções a ele relacionados e suas respectivas curvas - simetria esta que é fundamental para entender o comportamento da função abordada próxima ao zero. Para além, são utilizados gráficos como estratégia de visualização, a partir de softwares de matemática como o GeoGebra, além de se provar formalmente o limite trigonométrico fundamental a partir de métodos analíticos, utilizando-se da desigualdade para demonstrar que ambos os limites laterais convergem para um.

Outrossim, são realizadas abordagens a partir de métodos de aproximação e da série de Taylor, além de atividades práticas que impulsionam os discentes a aplicarem o limite trigonométrico fundamental em diferentes contextos. Essa conexão entre o entendimento do funcionamento da simetria nas funções e limites, bem como as discussões entre métodos de aproximação e séries comprovam a interdisciplinaridade alcançada entre as aplicações dos cálculos nas áreas de graduação, visto que esses conteúdos são explorados em disciplinas diferentes, estabelecendo-se uma ponte entre elas.

A interdisciplinaridade se estende ainda mais ao considerarmos a aplicação desses conceitos em física, engenharia e outras ciências, onde os limites e as séries de Taylor são ferramentas indispensáveis para descrever fenômenos naturais e tecnológicos, permitindo que sua aplicação prática possibilita que diversas áreas sejam beneficiadas mutuamente e promovendo avanços e soluções inovadoras nestes campos. Dessa forma, o método de ensino aplicado na disciplina de Introdução ao Cálculo das turmas de engenharia civil no Instituto Federal de Alagoas – IFAL, campos de Palmeira dos Índios.

Através dessa metodologia, houveram resultados de aprendizagem significativos, visto que os alunos que foram submetidos ao ensino conseguiram resolver um número maior de exercícios propostos, assimilar a identidade do limite fundamental através da manipulação do cálculo de limites de funções trigonométricas e assim, obtiveram a aprovação na disciplina com um aproveitamento positivo ao longo das demais disciplinas do curso.

O procedimento de resolução adotado pelo professor nas aulas utiliza simetrias (SANTOS NETA et al, 2023) em cálculo de limites que envolvem funções trigonométricas, envolvendo a manipulação das equações com a finalidade de identificar o Limite Trigonométrico Fundamental (L.T.F.). Essas simetrias são do tipo topológica (LIVIO, 2011), transformam as curvas de acordo com as substituições adotadas sem alterar o limite da função original. Usar as simetrias faz com que os alunos compreendam o que de fato acontece com as funções e seus gráficos, além de fazer uma abordagem que conduz em aprendizagem significativa.

Vejamos o procedimento para calcular o limite da função  $f(x) = (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$  (figura 3) quando  $x \rightarrow 1$ . Ou seja, queremos

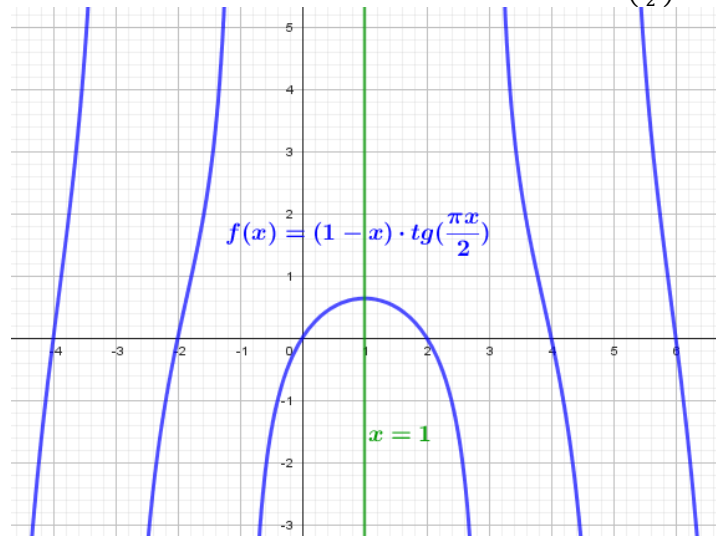
$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \quad (7)$$

Note que esse limite é uma indeterminação do tipo  $0 \cdot (\pm\infty)$ . Para calcular esse tipo de limite é necessário usarmos congruências de limites (SANTOS NETA et al, 2023).

A função tem simetria axial vertical em relação à reta  $x = 1$ . Observe que se fizermos a seguinte substituição

$$\begin{aligned} x \rightarrow 1 &\Leftrightarrow 1 - x = 0 = y \Leftrightarrow y \rightarrow 0 \\ \therefore 1 - x = y &\Rightarrow x = 1 - y \end{aligned}$$

Figura 3: Gráfico da função  $f(x) = (1 - x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$



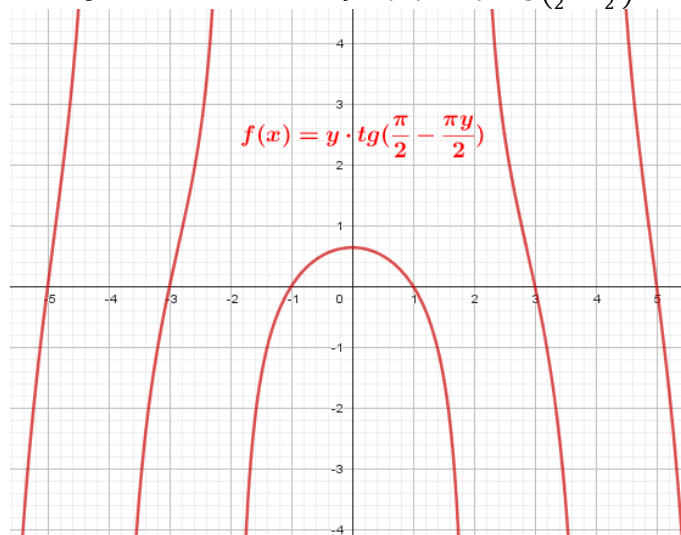
Fonte: Elaborada pelos autores utilizando o software GeoGebra, 2024.

Daí

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \equiv \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi(1 - y)}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right) \quad (8)$$

Esse limite mantém a simetria da curva original e gera uma simetria de translação (SILVA, 2014) do gráfico da função original por um deslocamento de 1 unidade para a esquerda trazendo o eixo de simetria da curva original da reta  $x = 1$  para o eixo vertical do plano cartesiano ortogonal como mostra a figura 4.

Figura 4: Gráfico da função  $f(y) = y \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2}\right)$ .

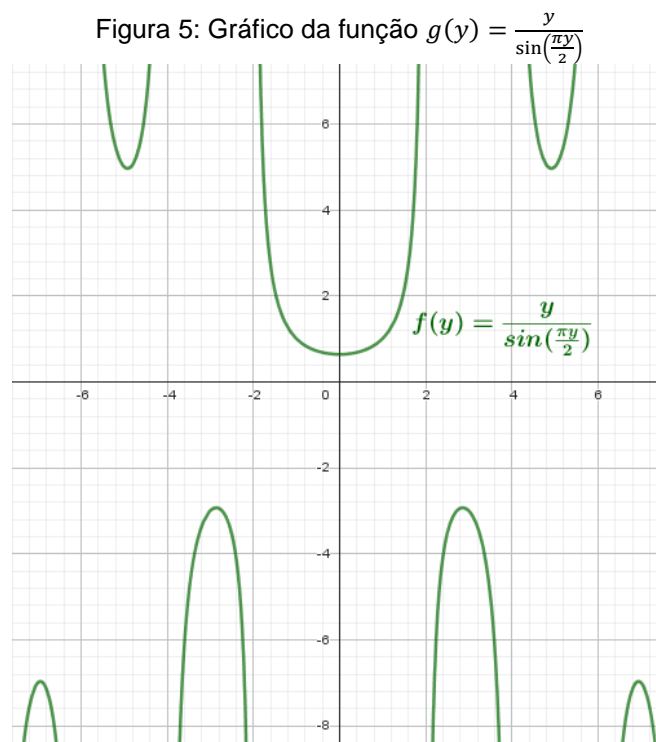


Fonte: Elaborada pelos autores utilizando o software GeoGebra, 2024.

O gráfico tem simetria axial vertical em relação ao eixo vertical (função par). Manipulando um pouco a equação (8) temos:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{\cos \left( \frac{\pi y}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\pi y}{2} \right)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \cos \left( \frac{\pi y}{2} \right) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \left( \frac{\pi y}{2} \right)} = \cos 0 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \left( \frac{\pi y}{2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \left( \frac{\pi y}{2} \right)} \\ \therefore \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \left( \frac{\pi y}{2} \right)} \end{aligned} \quad (9)$$

Esta igualdade 9 nos dá uma função  $g(y) = \frac{y}{\sin \frac{\pi y}{2}}$  que converte, por simetria topológica (LIVIO, 2011), o gráfico da figura 4 no gráfico da figura 5, que também tem simetria axial (SILVA, 2014) no eixo vertical do plano cartesiano (função par). Esse último limite é uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$  que é o mesmo tipo do L.T.F., mas ainda não se pode aplicar. Contudo é necessária ainda uma substituição e algumas manipulações.



Fonte: Elaborada pelos autores utilizando o software GeoGebra, 2024.

Vamos a outra congruência de limites. Na equação 9 fazemos a seguinte substituição

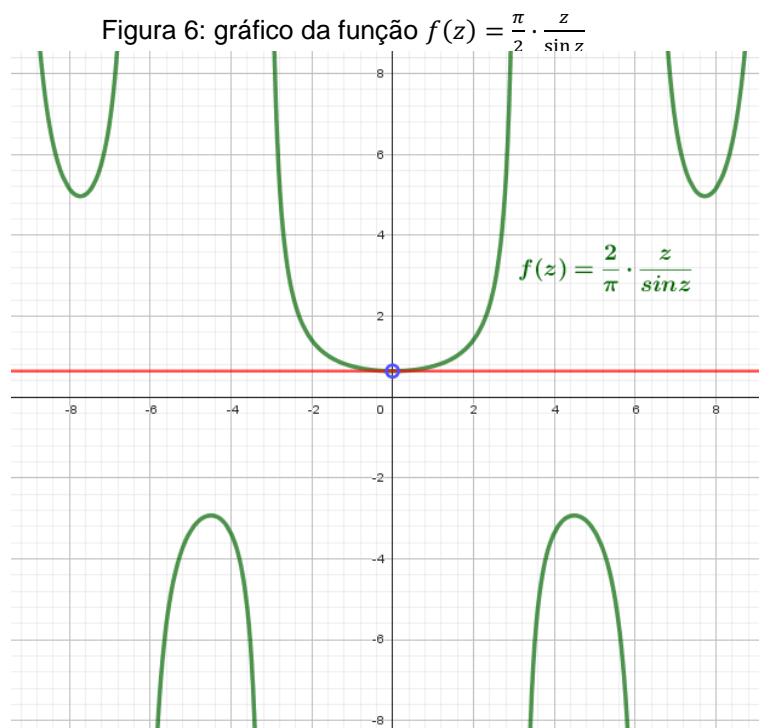
$$\begin{aligned} y \rightarrow 0 &\Rightarrow \frac{\pi y}{2} = 0 = z \Rightarrow z \rightarrow 0 \\ \therefore \frac{\pi y}{2} = z &\Rightarrow y = \frac{2z}{\pi} \end{aligned} \quad (10)$$

Segue então que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \equiv \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{2z}{\pi}}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{z}{\sin z} \quad (11)$$

A função do último limite  $f(z) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{z}{\sin z}$  tem gráfico de acordo com a figura 4, modifica a curva por simetria topológica (LIVIO, 2011) mantendo a simetria axial em relação ao eixo vertical do plano cartesiano ortogonal (SILVA, 2014). Da última igualdade é possível finalmente utilizando as propriedades adequadas de frações, potências e limites chegarmos ao L.T.F. pois,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{z}{\sin z} = \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{-1} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}\right)^{-1} = \frac{2}{\pi} \quad (12)$$



Fonte: Elaborada pelos autores utilizando o software GeoGebra, 2024.

A dinâmica das simetrias atreladas às manipulações aplicadas e as transformações que ocorrem por simetrias topológicas, tanto nas equações (congruências) como nos gráficos, dão sentido geral às manipulações necessárias para a identificação do L.T.F. e deixam no estudante a certeza da eficiência do cálculo e dos resultados obtidos. Isso gera mais segurança, em parte dos estudantes, na resolução de limites que envolvem funções trigonométricas.

Por fim, reitera-se que o estudo do Limite Trigonométrico Fundamental através das simetrias não só reforça os conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial, mas também exemplifica como diferentes áreas da matemática e suas aplicações práticas estão interconectadas, oferecendo uma visão abrangente e integrada do conhecimento matemático.



## 4 COSIDERAÇÕES FINAIS

O artigo apresenta uma metodologia que combina a apresentação teórica do Limite Trigonométrico Fundamental (L.T.F.) com uma abordagem quantitativa, utilizando representações gráficas e o software GeoGebra para visualizar as simetrias nas funções trigonométricas. Esta abordagem não apenas reforça a compreensão dos limites, mas também evidencia sua aplicabilidade na resolução de problemas complexos que envolvem aproximações e modelagem, promovendo uma compreensão mais profunda e integrada dos conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial.

Além disso, foi possível demonstrar que o estudo do L.T.F. proporciona a interdisciplinaridade dos conceitos matemáticos, estabelecendo conexões com outras áreas como em física, engenharia e outras ciências, onde os limites e as séries de Taylor são ferramentas indispensáveis para descrever fenômenos naturais e tecnológicos. Isso ressalta a importância do cálculo em diversas aplicações práticas e não apenas como uma disciplina isolada.

Portanto, ao entender o Limite Trigonométrico Fundamental através das simetrias, os alunos não só fortalecem seus conhecimentos em cálculo, mas também desenvolvem uma visão mais ampla e integrada do conhecimento matemático, contribuindo para sua formação acadêmica e preparação para desafios futuros em suas respectivas áreas de atuação. O objetivo da metodologia foi alcançado com êxito, demonstrado através do aproveitamento significativo dos alunos, uma vez que todos os aprovados não apresentaram dificuldades em relação às disciplinas seguintes de cálculo inseridas na sequência da matriz curricular do curso de engenharia civil da instituição.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, João. et al. Análise das reprovações em grande escala na disciplina de Cálculo I nos cursos de engenharia. In: XLI ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 2021, Foz do Iguaçu. **Anais**. Foz do Iguaçu. Disponível em: [TN STO 363 1876 42660.pdf \(abepro.org.br\)](http://tn.sto.363.1876.42660.pdf(abepro.org.br)). Acesso em 20 de maio de 2024.

LIVIO, Mario. **A equação que ninguém conseguia resolver. Como um gênio da matemática descobriu a linguagem da simetria**. 2.ed. Trad. Jesus de Paula Assis. Rev. Téc. Michelle Dysman e Diego Vaz Bevilaqua. São Paulo: Record, 2011.

SANTOS NETA, Jozelita Maria dos; *Et al.* **Aplicabilidade do Limite Exponencial Fundamental utilizando Simetrias com ênfase em engenharia**. In: 51º Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia e VI Simpósio Internacional de Educação em Engenharia. **Anais**. Rio de Janeiro. Disponível em: [http://www.abenge.org.br/sis\\_artigos.php](http://www.abenge.org.br/sis_artigos.php). Acesso em 16 maio de 2024.

SILVA, Alberto H. R. **Simetrias para o ensino de equações e funções na educação básica**. 2014. Dissertação de Mestrado – curso de Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/6197>. Acesso em 16 maio 2024.

SILVA, Juliana. Aprender Cálculo I para os estudantes de engenharia: Uma discussão em termos da teoria da relação com o saber. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais**. São Paulo. Disponível em: [6924\\_3744\\_ID.pdf \(sbembrasil.org.br\)](#). Acesso em 15 de junho de 2024.

SILVEIRA, R.; SANTOS, A. Desempenho Acadêmico na Disciplina de Cálculo em Cursos de Engenharia. **Revista Espacios**. Venezuela, v.36, n.18, p. 2, 2015.

SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat**. A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 10.ed. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2004.

### **EXPLORING SYMMETRY IN THE FUNDAMENTAL TRIGONOMETRIC LIMIT: IMPLICATIONS OF INTERDISCIPLINARITY AND APPLICATIONS IN DIFFERENTIAL CALCULUS**

**Abstract:** Various renowned authors, as well as Barbosa (2021) and Nasser (2008), emphasize the importance of studying calculus in the exact sciences, especially in Engineering. In the context that the subject is of paramount importance for the development of students' logical-analytical capacity for the continuity of the entire curriculum of the courses, considering that calculus adapts to the needs of each subject and its contexts. However, the significant difficulty in comprehension encountered by students results in high rates of failure and dropout in courses, where the main barriers faced by students stem from high school and lie in the understanding of fundamental concepts such as functions, limits, and derivatives. In light of this, the article in question aims to discuss an approach to teaching one of the central themes of the subject, the Fundamental Trigonometric Limit (FTL), aiming to emphasize its interdisciplinary aspects through the use of graphical representations of data, configuring a more accessible and effective exemplification, providing a broader view of its application in the curriculum of engineering courses.

**Keywords:** L.T.F, engineering, teaching, calculation, interdisciplinary.

