



FERRAMENTA COMPUTACIONAL VOLTADA AO ENSINO DE ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

DOI: 10.37702/2175-957X.COBENGE.2024.4933

Autores: MARCELO GRECO, GABRIELA ARAUJO MACHADO, JULIANO DOS SANTOS BECHO

Resumo: O presente trabalho trata do desenvolvimento e da divulgação de uma ferramenta computacional desenvolvida em linguagem de programação Python, destinada ao ensino da análise não linear de estruturas reticuladas, particularmente aplicada ao estudo de estruturas treliçadas tridimensionais. A formulação numérica utilizada é baseada no mapeamento dos pontos nodais da estrutura (formulação posicional do método dos elementos finitos) e são utilizados no desenvolvimento as bibliotecas NumPy, Matplotlib e Pandas do Python 3. Os arquivos de entrada e saída trabalham com a extensão .xlsx e utilizam a estrutura DataFrame da biblioteca Pandas. São apresentados dois exemplos numéricos (previamente validados) para ilustração da potencialidade da ferramenta desenvolvida.

Palavras-chave: análise não linear, treliças, Python, elementos finitos, formulação posicional

FERRAMENTA COMPUTACIONAL VOLTADA AO ENSINO DE ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

1 INTRODUÇÃO

A análise não linear geométrica de estruturas é tema relevante em diversas áreas da engenharia (aeroespacial, civil, mecânica, naval, entre outras). Esse tipo de comportamento ocorre quando o equilíbrio na configuração deformada de uma estrutura altera significativamente as respostas mecânicas e pode estar associado a grandes deslocamentos/rotações e/ou a grandes deformações dos materiais constituintes da estrutura.

Os sistemas estruturais treliçados são concepções de projeto nas quais os componentes estruturais trabalham à tração ou à compressão. São os sistemas estruturais mais simples, mas que dependendo da topologia ou do arranjo estrutural podem apresentar comportamento complexo, como por exemplo comportamento não linear geométrico.

As aplicações práticas podem ser encontradas em fuselagens de aeronaves, torres de linhas de transmissão, estruturas de cobertura de estádios, pontes e passarelas, entre outras tipologias estruturais projetadas para vencer grandes vãos horizontais ou alcançar grandes alturas. As treliças se destacam pelo relativo baixo peso próprio quando comparadas com outros sistemas estruturais destinados à mesma finalidade.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é a ferramenta numérica mais utilizada para resolução de problemas na Mecânica dos Sólidos. A versão posicional do MEF, com referência em um único sistema de referência Lagrangiano e na descrição da cinemática calculada com base nos pontos nodais dos elementos estruturais, foi originalmente aplicada em treliças no trabalho de Greco et al. (2006) para a medida de deformação de Biot e seu par energético conjugado (tensão nominal). Coda (2018) apresentou o desenvolvimento da formulação posicional de treliças para a medida de deformação de Green e seu par energético conjugado (2º tensor de Piola-Kirchhoff). O presente trabalho apresenta a aplicação da formulação posicional do MEF em treliças com comportamento não linear geométrico para o ensino de engenharia utilizando a linguagem de programação Python com suas bibliotecas numérica (NumPy), gráfica (Matplotlib) e de ciência de dados (Pandas). Os gráficos e animações são gerados para facilitar a compreensão do comportamento não linear das estruturas, essencial para o aprendizado dos alunos. Assim, ao visualizar a estrutura, por exemplo, pode criar conexões cerebrais, entre o conhecimento entendido e o que se está vendo, contribuindo para que seja armazenado na memória de longo prazo.

Ainda mais, considerando que o tema é geralmente abordado de forma introdutória nos cursos de graduação, sendo mais detalhado em cursos de pós-graduação. A ferramenta desenvolvida visa preencher essa lacuna, permitindo uma melhor visualização e compreensão de fenômenos complexos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A formulação numérica é baseada no trabalho de Greco e Peixoto (2021), desenvolvida originalmente para a medida de deformação seno-hiperbólico e adaptada aqui para a medida de deformação de Biot.

Os estudos sobre comportamento não linear geométrico partem da definição de estiramento (λ) (Driemeier et al., 2005).

$$\lambda = \frac{ds}{dS_0} \quad (1)$$

em que ds e dS_0 são os comprimentos de uma fibra na configuração deformada e inicial, respectivamente. No caso da treliça esses comprimentos correspondem aos comprimentos dos próprios elementos finitos.

O estiramento neutro ($\lambda = 1$), independentemente da medida de deformação utilizada, sempre corresponde à deformação normal nula ($\varepsilon = 0$). No caso da medida de deformação de Biot tem-se:

$$\varepsilon = \lambda - 1 \quad (2)$$

O par energético conjugado de tensão é obtido a partir da energia de deformação específica (u) de cada um dos elementos finitos, conforme apresentado em Greco e Peixoto (2021).

$$u = \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_{\lambda} \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} d\lambda = \int_{\lambda} \sigma d\lambda \quad (3)$$

Os pares energéticos de tensão-deformação devem ser conservativos e, portanto, o termo $\sigma(\partial \varepsilon / \partial \lambda)$ deve ser constante e igual à tensão nominal (σ_N) medida em ensaios de laboratório. Assim, pode-se reescrever a equação (3) da seguinte forma:

$$u = \int_{\lambda} \sigma_N d\lambda = C \int_{\lambda} (\lambda - 1) d\lambda = C \left(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda \right) \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} \quad (4)$$

em que C é um parâmetro relacionado com as propriedades do material, que no caso assume valor unitário.

Na literatura científica há diversas formulações do MEF que utilizam as posições nodais como incógnitas, publicadas nos trabalhos de Shabana (1997), Bonet et al. (2000) e Aguiar e Fosdick (2000) e Coda (2003). São formulações diferentes entre si. No presente trabalho, será utilizada a descrição cinemática proposta originalmente por Coda (2003), que parte da parcela elástica da energia de deformação (U) de um elemento finito (m) expressa por:

$$U^{(m)}(x_i^\alpha) = A_0^{(m)} \cdot l_0^{(m)} \cdot u_e(\varepsilon(x_i^\alpha)) \quad (5)$$

em que α é o nó do elemento, i é a direção do grau de liberdade (*DoF*), l_0 é o comprimento inicial do elemento, A_0 é a seção transversal do elemento na configuração indeformada e u_e é a energia de deformação específica do elemento.

No caso do elemento de treliça 3D, a energia de deformação e a força interna de equilíbrio ($[f_i^\alpha]^{(m)}$), associada às posições nodais em determinada configuração deformada ($[x_i^\alpha]^{(m)}$), estão relacionadas por:

$$[f_i^\alpha]^{(m)} = \frac{\partial U^{(m)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(m)}} \quad (6)$$

Considerando-se as Equações (5) e (6) e aplicando-se a regra da cadeia, tem-se:

$$[f_i^\alpha]^{(m)} = A_0^{(m)} \cdot l_0^{(m)} \cdot \frac{\partial u_e}{\partial [\varepsilon]^m} \frac{\partial [\varepsilon]^m}{\partial [x_i^\alpha]^{(m)}} = A_0^{(m)} \cdot l_0^{(m)} \cdot \sigma \cdot \frac{\partial [\varepsilon]^m}{\partial [x_i^\alpha]^{(m)}} \quad (7)$$

Os comprimentos inicial ($l_0^{(m)}$) e final ($l^{(m)}$) de um elemento finito m são calculados com base nas posições das configurações inicial (X) e deformada (x) e com base nos nós inicial (1) e final (2) de cada elemento finito.

$$l_0^{(m)} = \sqrt{(X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2} \quad (8)$$

$$l^{(m)} = \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2} \quad (9)$$

A medida de deformação de Biot pode ser expressa em função das posições nodais na configuração deformada, conforme a seguir:

$$\varepsilon^{(m)} = \frac{\sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}}{l_0} - 1 \quad (10)$$

A derivada da medida de deformação em relação às posições nodais na configuração deformada fornece as seguintes expressões:

$$\frac{\partial [\varepsilon]^{(m)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(m)}} = (-1)^\alpha \cdot \frac{(x_i^2 - x_i^1)}{l^{(m)} \cdot l_0^m} \quad (11)$$

$$[f_i^\alpha]^{(m)} = A_0^{(m)} \cdot \sigma \cdot (-1)^\alpha \cdot \frac{(x_i^2 - x_i^1)}{l^{(m)}} \quad (12)$$

No equilíbrio na posição deformada há igualdade entre as forças externas aplicadas ($[F_i^\alpha]$) e as forças internas ($[f_i^\alpha]$) em cada elemento finito.

$$[g_i^\alpha]^{(m)} = [f_i^\alpha]^{(m)} - [F_i^\alpha]^{(m)} = 0 \quad (13)$$

Para resolver o sistema de equações não lineares, apresentado na Equação (13), pode-se zerar o vetor dos resíduos $[g_i^\alpha]$, usando o método iterativo de Newton-Raphson, até que o módulo do vetor dos resíduos seja menor que determinada tolerância numérica (aqui adotada como 10^{-8}).

O vetor das correções das posições ($[\Delta x_i^\alpha]$) é calculado por:

$$[\Delta x_i^\alpha] = - \left[\frac{\partial^2 U_e^{(m)}}{\partial [x_i^\alpha] \cdot \partial [x_k^\gamma]} \Big|_x \right]^{-1} \cdot [g(\underline{x}^\alpha)] = - [H_{ik}^{\alpha\gamma}]^{-1} \cdot [g(\underline{x}^\alpha)] \quad (14)$$

em que $[H_{ik}^{\alpha\gamma}]$ é a matriz hessiana, γ é o nó e k é a direção do grau de liberdade.

A matriz hessiana é calculada pela derivada da Equação (7). Aplicando-se a regra da cadeia tem-se:

$$\begin{aligned} [H_{ik}^{\alpha\gamma}]^{(m)} &= A_0^{(m)} \cdot l_0^{(m)} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial [x_i^\alpha]} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial [x_k^\gamma]} + \frac{\partial u_e}{\partial [\varepsilon]^m} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial [x_i^\alpha] \cdot \partial [x_k^\gamma]} \right) = \\ &= A_0^{(m)} \cdot l_0^{(m)} \cdot \left(E_t(\varepsilon) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial [x_i^\alpha]} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial [x_k^\gamma]} + \sigma \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial [x_i^\alpha] \cdot \partial [x_k^\gamma]} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

em que $E_t(\varepsilon)$ é o módulo de elasticidade longitudinal tangente.

3 METODOLOGIA

A metodologia desenvolvida busca a facilitação do entendimento e o reforço do conhecimento. A qual facilita o entendimento do comportamento não linear geométrico, tanto para alunos de graduação quanto de pós-graduação. A visualização do comportamento estrutural reforça a importância de compreender fenômenos complexos, contribuindo significativamente para a formação dos engenheiros. Tornando o aprendizado mais dinâmico, agradável e efetivo.

Inclusive, corroborando com a importância da interdisciplinaridade no estudo de engenharia e formação do profissional, visto que a utilização de ferramentas computacionais auxiliam no trabalho do engenheiro, seja tornando as tarefas mais rápidas e com resultados ainda mais precisos; auxiliando a comunicação, diante da possibilidade de geração de elementos visuais detalhados e resultados mais próximos da realidade, considerando mais parâmetros que influenciam no problema a ser resolvido. Sendo assim, é de grande relevância o uso e desenvolvimento de tais ferramentas.

Portanto, a formulação numérica apresentada na seção anterior foi implementada em linguagem de programação interpretada Python 3.X (Lutz, 2011), usando as funções de bibliotecas apresentadas no Quadro 1. Também foram utilizadas funções da biblioteca matemática interna do interpretador (biblioteca math) e funções das bibliotecas celluloid e mpl_toolkits para geração de animações da estrutura deformada (gravadas no arquivo anima.gif). As aplicações das bibliotecas NumPy e Matplotlib foram baseadas no livro de Langtangen (2008).

Quadro 1 – Bibliotecas e componentes utilizadas no código desenvolvido

| Biblioteca | NumPy | Matplotlib | Pandas |
|------------|---|---|--|
| Métodos | - | .subplot .title .plot .legend .grid | .sort_values .to_excel .loc .iloc |
| Funções | .array .linalg (submódulo) .solve (função dentro do .linalg) | .figure .show .pause .close | .concat, .read_excel |
| Classes | - | - | .dataframe .excelwriter |

A versão do código executável com arquivos de entrada e de saída .txt (com bibliotecas incluídas) foi gerada a partir do programa PyCharm e disponibilizada na rede ResearchGate (Greco, 2024). O nome do arquivo de entrada (com extensão .txt) deve ser digitado na janela de execução do código. Essa versão mais antiga não gera animação. Na versão mais atual do código, que roda no IDLE (*Integrated Development and Learning Environment*) disponibilizado por Python Software Foundation (2024), são aceitos arquivos com as seguintes extensões: .xlsx ou .txt. Como resultado de saída são gerados gráficos com a estrutura inicial, gráfico com passo (força ou deslocamento) versus posição de um nó específico, gráfico com a estrutura deformada e arquivo de saída em formato .xlsx. Os gráficos gerados com a biblioteca Matplotlib foram configurados para fecharem automaticamente após um tempo de 15 segundos, mas o usuário pode fechar o gráfico mais rapidamente simplesmente fechando a janela. É possível salvar a figura em formato de arquivo de imagem.

Na Figura 1 é apresentada uma planilha de saída do programa (arquivo_saida.xlsx) com as quatro abas de resultados, descritas a seguir:

- Dados de processamento: com informações sobre o passo, número de iterações e evolução da norma do vetor dos resíduos;
- Estrutura deformada: com o passo considerado, números dos nós, posições X, Y e Z dos nós;
- Gráfico: com o passo considerado, Nó considerado para impressão, posições X, Y e Z do nó específico considerado;
- Forças axiais: com o passo considerado, números dos elementos, forças axiais em cada elemento finito.

Cabe ressaltar que é possível impor uma frequência de geração de resultados a partir do arquivo de entrada. Por exemplo, o resultado apresentado na Figura 1 apresenta os resultados de quatro em quatro passos (Load Step = 4). Optou-se por usar a língua inglesa no código distribuído na rede ResearchGate para ampliar a difusão do código desenvolvido.

Figura 1 – Arquivo de saída em formato .xlsx para o exemplo do domo treliçado em forma de estrela.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|----|-------------------------|------------------------|------------------------|---|---|
| 1 | | C1 | C2 | C3 | | |
| 2 | 0 | - Output file: NORMAL - | | | | |
| 3 | 1 | Load Step | | | | |
| 4 | 2 | Element | Initial node | Final node | | |
| 5 | 3 | 1 | 24830.3268267548155563 | 24830.3268267548155563 | | |
| 6 | 4 | 2 | 24830.4691798058847780 | 24830.4691798058847780 | | |
| 7 | 5 | 3 | 24830.4691798060921428 | 24830.4691798060921428 | | |
| 8 | 6 | 4 | 24830.3268267548155563 | 24830.3268267548155563 | | |
| 9 | 7 | 5 | 24830.4691798063031456 | 24830.4691798063031456 | | |
| 10 | 8 | 6 | 24830.4691798063031456 | 24830.4691798063031456 | | |
| 11 | 9 | 7 | -7996.1696973106791120 | -7996.1696973106791120 | | |
| 12 | 10 | 8 | -7995.4241902951780503 | -7995.4241902951780503 | | |
| 13 | 11 | 9 | -7996.1696973104681092 | -7996.1696973104681092 | | |
| 14 | 12 | 10 | -7996.1696973105727011 | -7996.1696973105727011 | | |
| 15 | 13 | 11 | -7995.4241902952844612 | -7995.4241902952844612 | | |
| 16 | 14 | 12 | -7996.1696973104681092 | -7996.1696973104681092 | | |
| 17 | 15 | 13 | 13788.0556827089967555 | 13788.0556827089967555 | | |
| 18 | 16 | 14 | 13788.1697724021978502 | 13788.1697724021978502 | | |
| 19 | 17 | 15 | 13787.6051069003970042 | 13787.6051069003970042 | | |

Fonte: Autores.

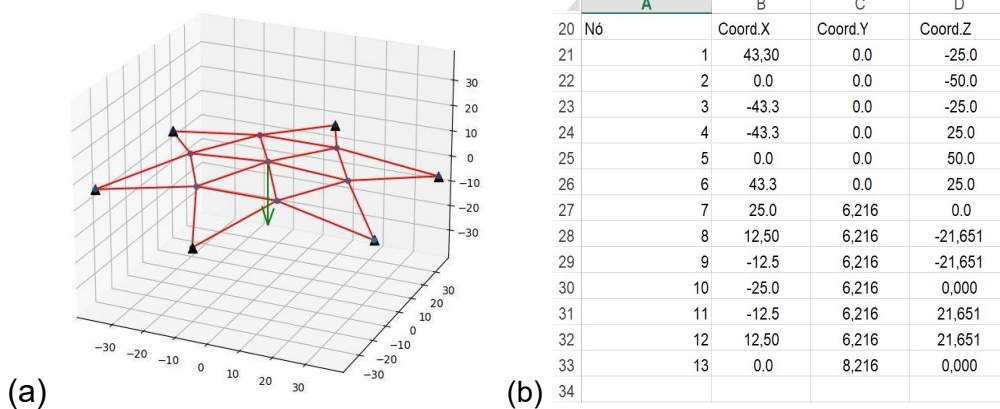
4 RESULTADOS

São apresentados dois exemplos ilustrativos da literatura científica que já foram validados em trabalhos prévios do grupo de pesquisa dos autores.

4.1 Domo treliçado em formato de estrela

O domo treliçado em formato de estrela apresentado na Figura 2 foi analisado em Blandford (1996) e validado para a formulação posicional em Greco et al. (2006). A estrutura tem 24 elementos, 13 nós e uma rigidez axial igual a $EA_0 = 951$ kN para todos os elementos. Para analisar esta estrutura, foi utilizado controle de força, com 100 incrementos 10 kN aplicados verticalmente para baixo. Na Figura 2 apresentam-se informações sobre a geometria inicial (indeformada) do domo (Figura 2a) e o destaque do arquivo de entrada com as posições dos nós (Figura 2b).

Figura 2 – Geometria do domo treliçado em formato de estrela: (a) perspectiva; (b) arquivo de entrada.

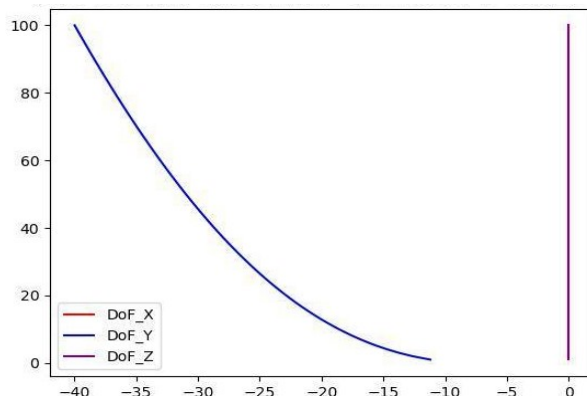


Fonte: Autores.

Na Figura 3 apresenta-se o gráfico de resultado da força vertical aplicada versus as posições nodais do nó central (nó 13). Observa-se que há forte não linearidade geométrica na resposta da posição vertical (grau de liberdade DoF_Y). O nó não sofre

deslocamentos laterais (DoF_X e DoF_Z), conforme era esperado devido à simetria em faixa radial da estrutura. A resposta começa com um salto de deslocamento da estrutura e evolui no gráfico de baixo para cima e da direita para a esquerda.

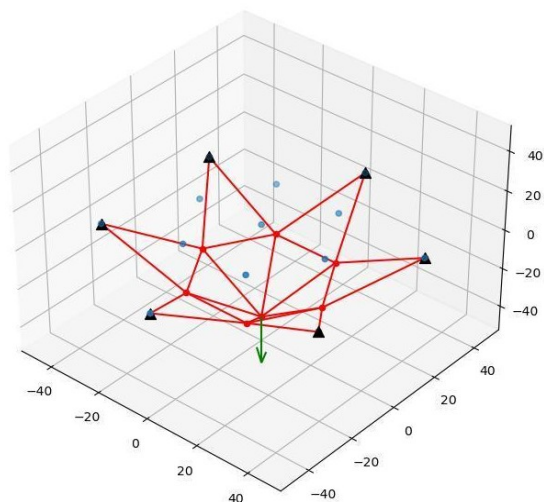
Figura 3 – Gráfico de resultado da força versus posições nodais vertical no nó central.



Fonte: Autores.

Na Figura 4 apresenta-se a geometria final deformada do domo. Observa-se que se trata de um exemplo de não linearidade geométrica extremo, no qual a concavidade do domo é invertida e as barras, que nos passos iniciais da análise eram comprimidas, passaram a trabalhar em regime de tração após o salto de deslocamento completo da estrutura (*snap-through*). Os pontos azuis ilustrados na figura representam as posições iniciais dos nós na configuração indeformada e os triângulos representam os apoios.

Figura 4 – Geometria deformada final do domo treliçado em formato de estrela.



Fonte: Autores.

4.2 Viga treliçada

A viga treliçada apresentada na Figura 5 foi analisada em Noor e Peters (1980) e validada para a formulação posicional em Ferreira (2009). A estrutura tem 76 elementos,

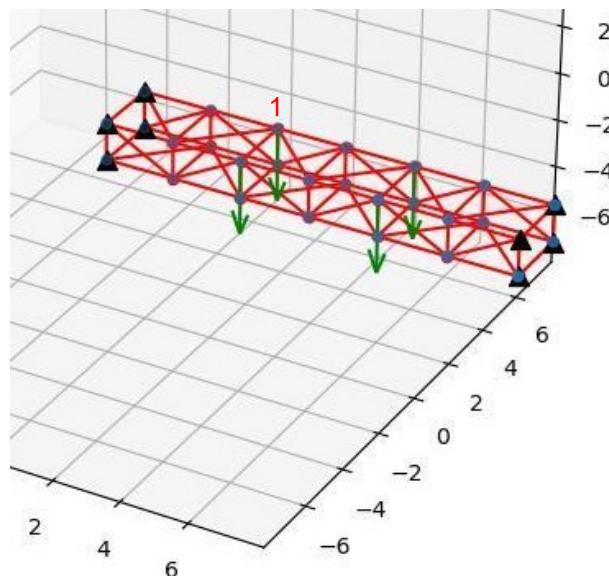
28 nós. A estrutura tem comprimento total de 12m, sendo construída por módulos treliçados de 2m x 2m x 1,5m (comprimento x largura x altura). As áreas das seções transversais são apresentadas na Tabela 1. O módulo de elasticidade longitudinal é igual a $E = 71,7$ GPa. Para analisar esta estrutura, foi utilizado controle de força, com 2000 incrementos 50N aplicados verticalmente de cima para baixo em quatro nós da estrutura. Na Figura 5 apresentam-se informações sobre a geometria inicial (indeformada) da estrutura e o destaque do nó 1 a ser impresso nos resultados.

Tabela 1 – Áreas das seções transversais dos elementos.

| Elemento | Longitudinal | Transversal | Diagonal |
|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Área [m ²] | $0,8 \times 10^{-4}$ | $0,6 \times 10^{-4}$ | $0,4 \times 10^{-4}$ |

Fonte: Autores.

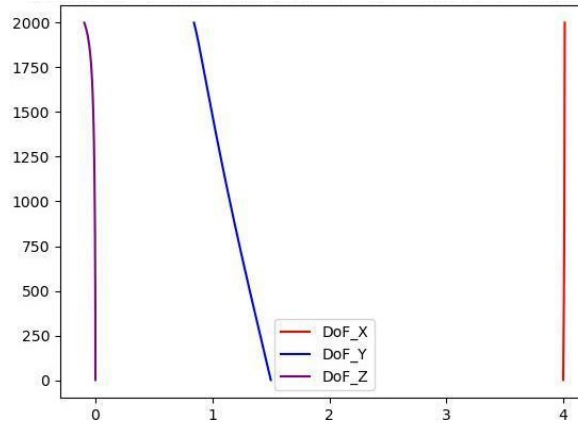
Figura 5 – Geometria inicial da viga treliçada.



Fonte: Autores.

Na Figura 6 apresenta-se o gráfico de resultado da força vertical aplicada versus as posições nodais do nó 1 (um dos nós de aplicação de força). Observa-se que há uma leve ocorrência de não linearidade geométrica na resposta da posição vertical (grau de liberdade DoF_Y). O nó não sofre deslocamentos laterais na direção longitudinal (DoF_X), conforme era esperado devido à simetria da estrutura, no entanto, há início de perda de estabilidade lateral da estrutura com início de deslocamento transversal (DoF_Z) no final da análise (passo 2000 = força total de 4×100 kN). Esse ponto de carregamento está na iminência da carga crítica de perda de estabilidade por bifurcação na estrutura. A partir desse ponto na análise a estrutura perde sua estabilidade ou segue sua trajetória de solução fundamental (que é apenas teórica). Novamente, a interpretação da evolução do comportamento estrutural no gráfico deve ser feita de baixo para cima.

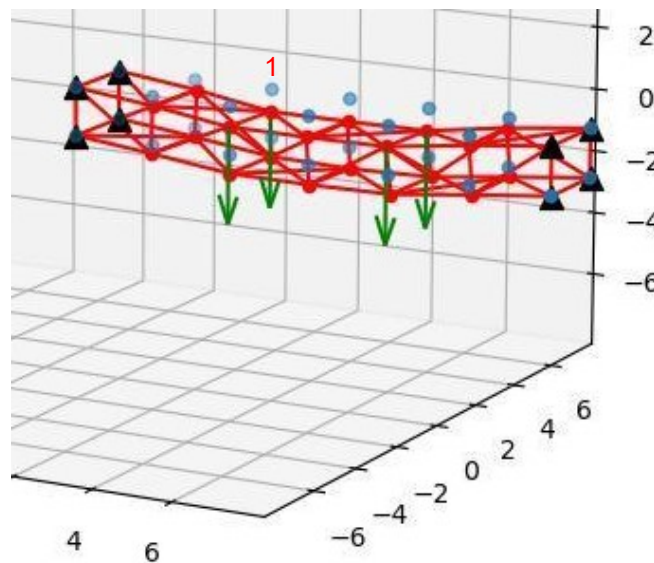
Figura 6 – Gráfico de resultado da força versus posições nodais vertical no nó 1.



Fonte: Autores.

Na Figura 7 apresenta-se a geometria final deformada da viga treliçada. Observa-se que se trata de um exemplo de não linearidade geométrica na iminência da ocorrência de instabilidade por bifurcação. Os pontos azuis ilustrados na figura representam as posições iniciais dos nós, na configuração indeformada e os triângulos representam os apoios.

Figura 7 – Geometria deformada final da viga treliçada.



Fonte: Autores.

5 CONCLUSÕES

A abordagem apresentada no artigo destaca a importância de ferramentas computacionais no ensino de tópicos avançados de engenharia, proporcionando um aprendizado mais intuitivo e visual dos conceitos teóricos complexos.

Durante os cursos de graduação em engenharia no Brasil o tema da não linearidade é, geralmente, abordado de maneira introdutória. O comportamento não linear material, envolvendo plastificação, dano, fratura e/ou viscoelasticidade, é mais

contemplado em cursos de engenharia mecânica e civil. Na engenharia mecânica faz-se importante o estudo de outra fonte de não linearidade, associada ao contato. No entanto, pode-se afirmar que a fonte de não linearidade mais relacionada com a instabilidade estrutural e ao mesmo tempo com ganho de rigidez em sistemas estruturais, que é a não linearidade geométrica, tem tido pouca atenção nos currículos dos cursos de graduação. Por se tratar de um tema complexo, que pode ser associado a outras fontes de não linearidade, o tema acaba sendo objeto de estudo de cursos de pós-graduação, relacionados com as áreas de Mecânica dos Sólidos e de Estruturas. Na área das engenharias aeroespacial e aeronáutica o tema da não linearidade geométrica é fundamental, mas os conteúdos amplos desses cursos acabam restringindo a oferta de disciplinas específicas sobre o tema.

Outra dificuldade para lecionar o tema é que há poucas soluções analíticas disponíveis para tratar problemas com comportamento não linear geométrico, geralmente destinadas a resolver problemas muito simples e de pouco interesse prático. Nesse contexto, o presente trabalho busca apresentar e disponibilizar uma ferramenta computacional para resolução de treliças 3D com comportamento não linear geométrico; que possibilite a visualização do comportamento estrutural diante desse tipo de fenômeno.

Nesse sentido, os autores consideram que o objetivo do trabalho tenha sido atingido, ou seja, facilitar o entendimento do comportamento não linear geométrico por meio de ferramenta computacional educativa. Tanto para alunos de graduação quanto para alunos de pós-graduação, esse tipo de ferramenta faz-se importante. A exemplificação visual do comportamento estrutural facilita o entendimento e reforça a importância do entendimento de fenômenos complexos como o da não linearidade geométrica.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro concedido pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

REFERÊNCIAS

AGUIAR, A. R.; FOSDICK, R. L. A singular problem in incompressible nonlinear elastostatics. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 10, n. 8, p. 1181-1207, 2000.

BLANDFORD, G. E. Progressive failure analysis of inelastic space truss structures. **Computers & Structures**, v. 58, p. 981-990, 1996.

BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; Heywood, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5, p. 579-595, 2000.

CODA, Humberto Breves. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In: XVIII Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 2003, São Paulo. **Anais**. São Paulo. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/item/001372218>. Acesso em 15 mai. 2024.

CODA, Humberto Breves. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas – não linearidade geométrica e dinâmica**. EESC/USP, São Carlos, 2018.

DRIEMEIER, L.; PROENCA, S. P. B.; ALVES, M. A contribution to the numerical nonlinear analysis of three-dimensional truss systems considering large strains, damage and plasticity. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 10, n. 5, p. 515-535, 2005.

FERREIRA, Ivone Passos. **Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais**. 2009. Dissertação (Mestrado) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), Belo Horizonte, 2009. Disponível em:

https://oasisbr.ibict.br/vufind/Record/BRCRIS_a0419c67e200be22b407c0191b34ccd2

Acesso em: 15 mai. 2024.

GRECO, M. **Python Positional Truss 3D for Windows**. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/370939988_PPTRUSS3Dexe. Acesso em: 14 mai. 2024.

GRECO, M.; PEIXOTO, D.H.N. Comparative assessments of strain measures for nonlinear analysis of truss structures at large deformations. **Engineering Computations**, v. 39, n. 5, p. 1621-1641.

GRECO, M.; GESUALDO, F.A.R.; VENTURINI, W.S.; CODA, H.B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite elements in analysis and design**, v. 42, n. 12, p. 1079-1086, 2006.

LANGTANGEN, Hans Petter. **Python Scripting for Computational Science**. Texts in Computational Science and Engineering Book v. 3. 3 ed. Springer, Berlin, 2008.

LUTZ, Mark. **Programming Python**. O'Reilly Media, Sebastopol, 2011.

NOOR, A. K.; PETERS, J. M. Nonlinear dynamic analysis of space trusses. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 21, p. 1311-151, 1980.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. **Integrated Development and Learning Environment (IDLE)**. Disponível em: <https://docs.python.org/3/library/idle.html>. Acesso em: 15 mai. 2024.

SHABANA, A. A. Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 3, p. 339-348, 1997.

COMPUTATIONAL TOOL FOR TEACHING GEOMETRIC NON-LINEAR ANALYSIS OF TRUSS STRUCTURES

Abstract: *The present work deals with the development and the dissemination of a computational tool developed in the Python programming language, aimed at teaching the nonlinear analysis of truss structures, particularly applied to the study of three-dimensional truss structures. The numerical formulation used is based on the mapping of nodal points*

of the structure (positional formulation of the finite element method) and the Python 3 NumPy, Matplotlib and Pandas libraries are used in the development. The input and output files work with the .xlsx extension and use the DataFrame structure from the Pandas library. Two previously validated numerical examples are presented to illustrate the potential of the developed tool.

Keywords: nonlinear analysis, trusses, Python, finite elements, positional formulation.

