



• **ENSINO DA ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMOS  
ACOPLADOS A MANCAIS FLEXÍVEIS COM O USO DO MATLAB-  
SIMULINK®**

**Marcelo de Castro e Almeida**<sup>1</sup> – mcastro@ita.br

**Carlos Sergio Pivetta**<sup>1</sup> – carlos.pivetta@etep.edu.br

**Oswaldo Prado de Rezende**<sup>1</sup> – osvaldo.rezende@etep.edu.br

<sup>1</sup>CETEC Educacional SA, ETEP Faculdades - Engenharias

Av. Barão do Rio Branco, 882

12232-800 São José dos Campos – São Paulo

**José Geraldo Trani Brandão**<sup>2</sup> – brandao@feg.unesp.br

**José Elias Tomazini**<sup>2</sup> – tomazini@feg.unesp.br

<sup>2</sup>UNESP, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333

12516-410 Guaratinguetá – São Paulo

**Resumo:** Mecanismos fazem parte da humanidade, quer seja no transporte de carga, na execução de trajetórias para elementos de máquinas ou robôs. Oriundos da combinação de partes rígidas de forma a executar uma função, movimento ou transmissão de força de maneira predeterminada, a cinemática e a dinâmica geralmente são estudadas por meio de álgebra linear ou do cálculo vetorial. Os mecanismos de “quatro barras” normalmente estão acopladas à mancais, que são componentes mecânicos que suportam cargas de dispositivos rotativos. Os mancais flexíveis são expressos através de sua “rigidez elástica”. Este trabalho tem o objetivo de demonstrar ao aluno de engenharia as possibilidades de estudar os efeitos da vibração mecânica no mancal flexível devido às cargas dinâmicas exercidas por um mecanismo de quatro barras utilizando sistemas computacionais atuais disponíveis. Para a resolução da cinemática e da dinâmica do mecanismo foi criado um programa utilizando-se o software MatLab®. Um modelo computacional foi criado no Simulink®, ambiente de simulação do MatLab®. Desta forma podem-se obter dados da deflexão do mancal flexível em função do tempo. O tempo, por sua vez, é associado ao ângulo de deslocamento da barra de entrada, o qual varia de 0° a 360°, quando for o caso. O resultado da simulação permitiu observar que há um pico de deflexão muito claro, o qual deve ser levado em consideração pelo projetista ao determinar o mancal correto para suportar a carga exercida pelo mecanismo analisado.

**Palavras-chave:** Simulação de Mecanismo Quatro Barras, Mancal Flexível, Vibração Mecânica, MatLab-Simulink®, Deflexão.

Realização:

 **ABENGE**

Organização:



**O ENGENHEIRO  
PROFESSOR E O  
DESAFIO DE EDUCAR**



## 1. INTRODUÇÃO

No cenário atual, elementos de máquinas, dispositivos e outros aplicativos são estudados através de modelos computacionais, gerando análises confiáveis e relativamente baratas, pois não se tem a necessidade física do dispositivo a ser pesquisado e nem o mesmo que venha a ser danificado em ensaios destrutivos, por exemplo.

Mancais flexíveis, termo que engloba toda a categoria, pois todos podem ser expressos por meio de sua rigidez elástica, são estudados à partir de análise de “carga estática”, “lubrificação” e “vida útil”. Neste trabalho foi desenvolvida a análise do comportamento dinâmico de um mecanismo do tipo “quatro barras” acoplado à um mancal flexível.

## 2. METODOLOGIA

A análise cinemática pode ser feita adotando-se o método de solução analítica proposto por Norton (2010). A Figura 1 representa esquematicamente um mecanismo de quatro barras acoplado a mancais rotativos.

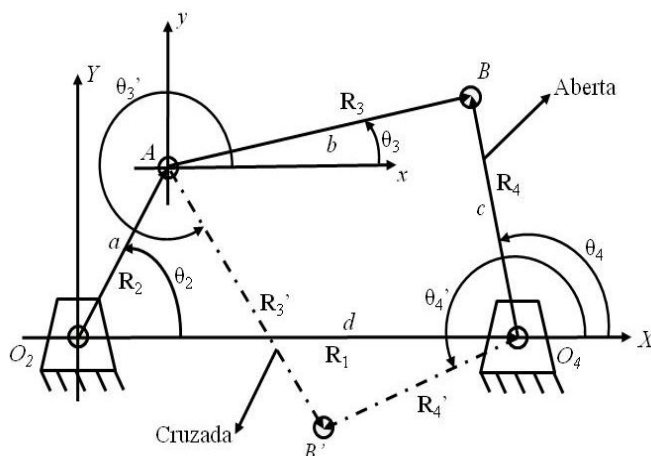


Figura 1 – Esquema de um mecanismo quatro barras (Adaptada de NORTON, 2010).

Conforme a direção e sentido dos vetores posição dos elos do mecanismo ilustrado na Figura 1, pode-se escrever a Equação vetorial (1):

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{0} \quad (1)$$

Adotando-se o comprimento escalar dos elos do mecanismo como sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$ , chamando-se de unidade imaginária “ $j$ ” e reescrevendo-se a Equação (1) na forma complexa, de acordo com Norton (2010) obtém-se a Equação (2):

$$ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_1} = 0 \quad (2)$$

A notação complexa permite a utilização da Identidade de Euler, conforme Equação (3).

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (3)$$



Para simplificar a expressão resultante, são definidas as constantes  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  e  $K_5$  em função do comprimento constante dos elos do mecanismo, conforme as Equações (4) a (8), conforme Norton (2010):

$$K_1 = \frac{d}{a} \quad (4)$$

$$K_2 = \frac{d}{c} \quad (5)$$

$$K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac} \quad (6)$$

$$K_4 = \frac{d}{b} \quad (7)$$

$$K_5 = \frac{c^2 - d^2 - a^2 - b^2}{2ac} \quad (8)$$

Substituindo-se a identidade  $\cos(\theta_2 - \theta_4) = \cos\theta_2\cos\theta_4 + \sin\theta_2\sin\theta_4$ , chega-se à Equação de Freudenstein, obtendo-se as soluções para  $\theta_3$  e  $\theta_4$  (NORTON, 2010).

Os termos em função das constantes  $\theta_2$  (dados de entrada) e  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  e  $K_5$ , são agrupados, resultando as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ . Com o objetivo de simplificar o resultado final, pode-se resultar nas Equações (9) a (14), de acordo com Norton (2010):

$$A = \cos\theta_2 - K_1 - K_2\cos\theta_2 + K_3 \quad (9)$$

$$B = -2\sin\theta_2 \quad (10)$$

$$C = K_1 - (K_2 + 1)\cos\theta_2 + K_3 \quad (11)$$

$$D = \cos\theta_2 - K_1 - K_4\cos\theta_2 + K_5 \quad (12)$$

$$F = K_1 + (K_4 - 1)\cos\theta_2 + K_5 \quad (13)$$

$$E = -2\sin\theta_2 \quad (14)$$

Desta forma, podem-se obter os resultados para  $\theta_3$  e  $\theta_4$  de acordo com as Equações (15) e (16):

$$\theta_3 = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right) \quad (15)$$

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) \quad (16)$$

As Equações (15) e (16) tem duas soluções possíveis, como qualquer equação quadrática. Se o discriminante dentro do radical for negativo, o resultado é um conjugado complexo, o



que significa que o comprimento escolhido para os elos do mecanismo não permite conectar o aparato para o ângulo  $\theta_2$  dado. Isso também pode ocorrer caso o mecanismo seja impossível de ser montado em qualquer posição, por não seguir a condição de Grashof ou uma condição geométrica construtiva.

De acordo com a Figura 1, há duas configurações possíveis para o mecanismo de quatro barras, “aberta” ou “cruzada”. Se o sinal antes do radical for negativo, caracteriza-se o mecanismo aberto, caso o sinal antes do radical seja positivo, o mesmo será cruzado (NORTON, 2010).

A velocidade angular de entrada do elo 2,  $\omega_2$ , é dada ou pode ser obtida conhecendo-se o torque do motor. Derivando-se a Equação (2) no tempo, determinam-se as velocidades angulares  $\omega_3$  e  $\omega_4$  dos elos 3 e 4, dadas pelas Equações (17) e (18):

$$\omega_3 = \frac{a \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{b \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (17)$$

$$\omega_4 = \frac{a \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{c \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (18)$$

De forma análoga, derivando-se mais uma vez no tempo e conhecendo-se a aceleração angular de entrada do elo 2,  $\alpha_2$ , obtém-se as acelerações angulares  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$  dos elos 3 e 4, pelas Equações (19) e (20):

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD} \quad (19)$$

$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD} \quad (20)$$

Onde as variáveis  $A, B, C, D, E$  e  $F$  são dadas pelas Equações (21) a (26):

$$A = c \operatorname{sen} \theta_4 \quad (21)$$

$$B = b \operatorname{sen} \theta_3 \quad (22)$$

$$D = c \operatorname{cos} \theta_4 \quad (23)$$

$$C = a \alpha_2 \operatorname{sen} \theta_2 + a \omega_2^2 \operatorname{cos} \theta_2 + b \omega_3^2 \operatorname{cos} \theta_3 - c \omega_4^2 \operatorname{cos} \theta_4 \quad (24)$$

$$E = b \operatorname{cos} \theta_3 \quad (25)$$

$$F = a \alpha_2 \operatorname{cos} \theta_2 - a \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - b \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 + c \omega_4^2 \operatorname{sen} \theta_4 \quad (26)$$

### 3. DESENVOLVIMENTO

Existem vários métodos para se fazer uma análise dinâmica. O uso das Leis de Newton irá fornecer mais informações sobre as forças internas do mecanismo. Elas podem ser escritas como um somatório de todas as forças e torques do sistema, mostradas pelas Equações (27), (28) e (29) que representam as equações de movimento de Newton .

$$\Sigma F_x = m a_x \quad (27)$$



$$\Sigma F_y = m a_y \quad (28)$$

$$\Sigma T = I_{CM} \alpha \quad (29)$$

Nos cálculos dinâmicos consideram-se os coeficientes inerciais de translação nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  de acordo com as Equações (27) e (28), e a dinâmica da rotação em torno do centro de massa para a componente em  $\hat{z}$  da Equação (29) nos elos 2, 3 e 4 do mecanismo (ROCHA *et al.*, 2011). Utilizando-se as equações para cada um dos corpos em movimento (elos) do mecanismo, obtém-se um sistema de equações lineares simultâneas, que pode, convenientemente, ser resolvido por um método matricial (NORTON, 2010). A localização dos centros de massa, os carregamentos no mecanismo e os demais dados pertinentes à análise dinâmica do mecanismo proposto são representados esquematicamente na Figura 2:

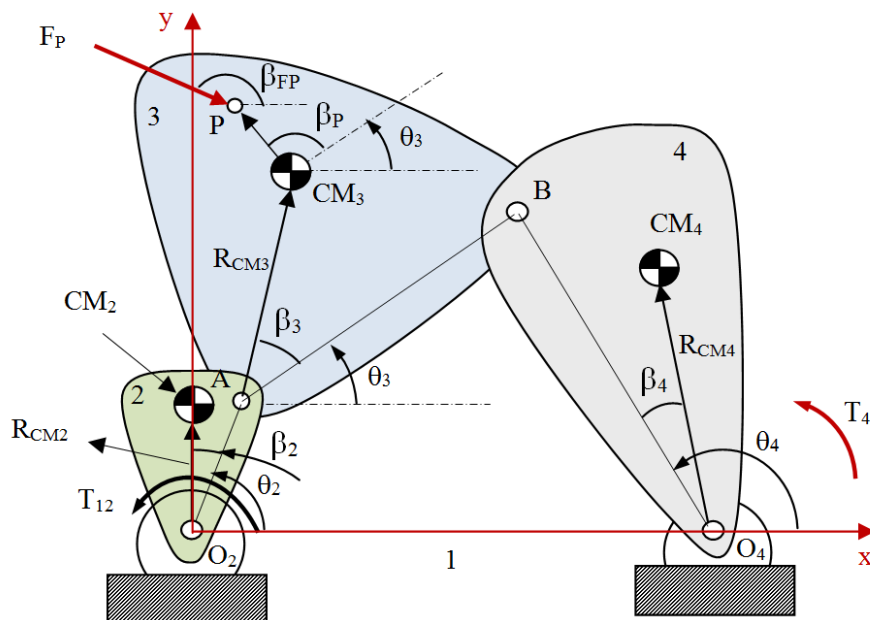


Figura 2 – Localização dos centros de massa e carregamentos no mecanismo de 4 barras (REZENDE *et al.*, 2010).

A Figura 3, ilustra o esquema de forças de reação nas juntas fixas  $O_2$  e  $O_4$  e nas juntas móveis A e B e também o torque  $T_{12}$  de acionamento sobre o elo 2 do mecanismo.

Os vetores  $\mathbf{R}_{CM2}$ ,  $\mathbf{R}_{CM3}$  e  $\mathbf{R}_{CM4}$  referem-se às distâncias do centro de massa dos elos com relação às suas respectivas juntas. Cada uma das forças terá a posição do ponto de aplicação referenciada com relação ao sistema não girante com origem definida no centro de massa de cada elo.

As equações da dinâmica do movimento são utilizadas considerando-se carregamentos tais como um torque resistente  $T_4$ , atuando no elo 4, e uma força  $F_P$  aplicada no ponto P situado no elo 3.

O diagrama de corpo livre (DCL) de cada elo do mecanismo, ilustrando as forças atuantes nos pontos A, B, P,  $O_2$  e  $O_4$  é ilustrado na Figura 3.

A ação do elo “i” sobre o elo “j” é representada pela notação “ $F_{ij}$ ”. Aplica-se também a mesma notação para indicar a posição do ponto de aplicação “ $R_{ij}$ ”. As acelerações absolutas dos centros de massa dos elos 2, 3 e 4 são indicadas por  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$ , respectivamente.



Desenvolvendo-se as Equações (27), (28) e (29) e as escrevendo para cada elo em movimento e rearranjando-se os termos numa equação matricial linear do tipo  $AX=B$ , em que a matriz  $A$   $[9 \times 9]$  é formada pelos coeficientes das incógnitas. A matriz  $X$   $[9 \times 1]$  representa as incógnitas e a matriz  $B$   $[9 \times 1]$  é formada pelas componentes  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  das forças e momentos inerciais, componentes da força de carregamento  $F_p$ , as componentes  $\hat{z}$  dos momentos inerciais e o torque resistivo  $T_4$ , pelos quais se obtém um sistema de resolução simultânea.

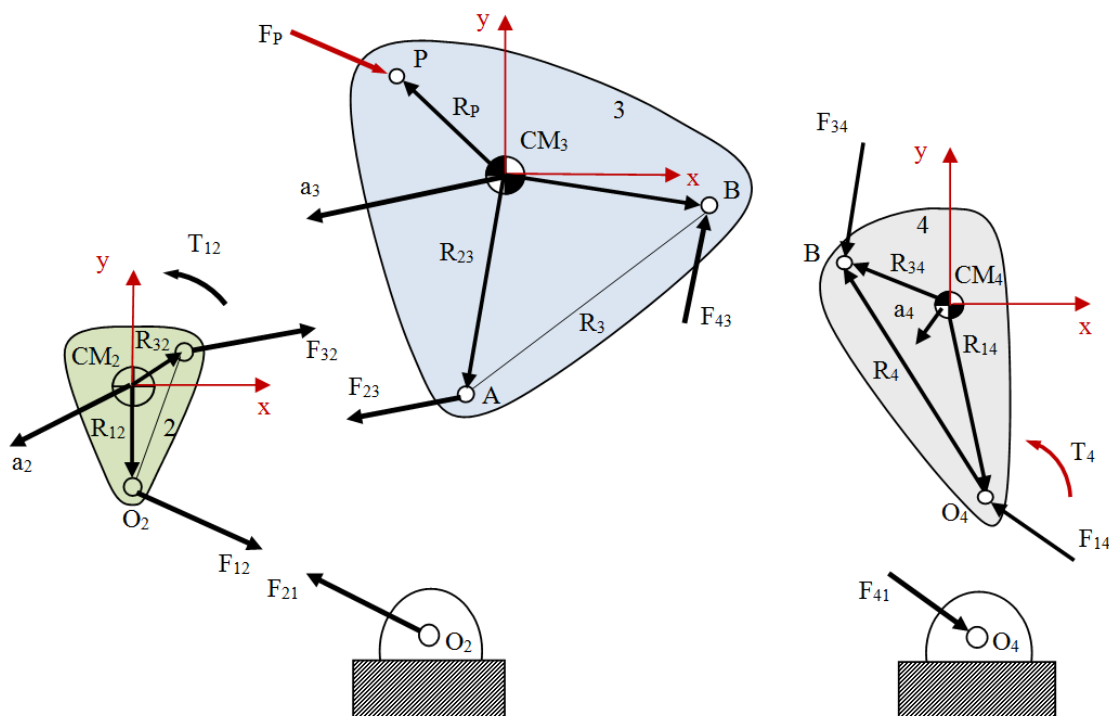


Figura 3 – Diagrama de corpo livre de cada elo do mecanismo de 4 barras (REZENDE *et al.*, 2010).

Os subscritos “ $x$ ” e “ $y$ ” representam as componentes nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  para as posições “ $R_{ij}$ ” dos pontos de aplicação das forças “ $F_{ij}$ ”.

As variáveis “ $m_i$ ” e “ $I_{CMi}$ ” representam a massa e o momento de inércia com relação ao centro de massa de cada elo. A Figura 4 ilustra o conjunto de equações matriciais para a resolução desse sistema:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34y} & -R_{34x} & -R_{14y} & R_{14x} & 0
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{Bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{43x} \\
 F_{43y} \\
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 T_{12}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 m_2 a_{2x} \\
 m_2 a_{2y} \\
 I_{CM2} \alpha_2 \\
 m_3 a_{3x} - F_{Px} \\
 m_3 a_{3y} - F_{Py} \\
 I_{CM3} \alpha_3 - R_{Px} F_{Py} + R_{Py} F_{Px} \\
 m_4 a_{4x} \\
 m_4 a_{4y} \\
 I_{CM4} \alpha_4 - T_4
 \end{Bmatrix}$$

Figura 4 – Equação matricial  $AX=B$  (Adaptada de REZENDE *et al.*, 2010).





Para auxiliar nos cálculos e facilitar a determinação das componentes  $R_{ij(x \text{ ou } y)}$ , Rezende *et. al.* (2010) elaboraram um diagrama dos vetores posição dos elos do mecanismo de quatro barras, expresso na Figura 5:

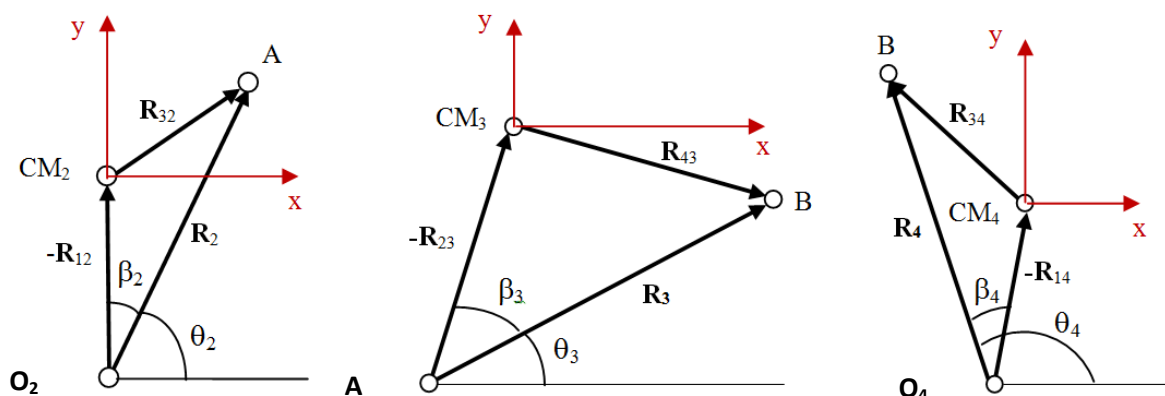


Figura 5 – Diagrama dos vetores posição dos elos 2, 3 e 4 (Adaptada de REZENDE *et al.*, 2010).

Da Figura 5, através de análise trigonométrica, obtém-se as Equações (30) a (41):

$$R_{12x} = -R_{CM2} \cos(\theta_2 + \beta_2) \quad (30)$$

$$R_{12y} = -R_{CM2} \sin(\theta_2 + \beta_2) \quad (31)$$

$$R_{32x} = R_2 \cos(\theta_2) - R_{CM2} \cos(\theta_2 + \beta_2) \quad (32)$$

$$R_{32y} = R_2 \sin(\theta_2) - R_{CM2} \sin(\theta_2 + \beta_2) \quad (33)$$

$$R_{23x} = -R_{CM3} \cos(\theta_3 + \beta_3) \quad (34)$$

$$R_{43x} = R_3 \cos(\theta_3) - R_{CM3} \cos(\theta_3 + \beta_3) \quad (35)$$

$$R_{23y} = -R_{CM3} \sin(\theta_3 + \beta_3) \quad (36)$$

$$R_{43y} = R_3 \sin(\theta_3) - R_{CM3} \sin(\theta_3 + \beta_3) \quad (37)$$

$$R_{14x} = -R_{CM4} \cos(\theta_4 - \beta_4) \quad (38)$$

$$R_{14y} = -R_{CM4} \sin(\theta_4 - \beta_4) \quad (39)$$

$$R_{34x} = R_4 \cos(\theta_4) - R_{CM4} \cos(\theta_4 - \beta_4) \quad (40)$$

$$R_{34y} = R_4 \sin(\theta_4) - R_{CM4} \sin(\theta_4 - \beta_4) \quad (41)$$

As variáveis  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  e  $\beta_4$  representam os ângulos entre os vetores posição dos centros de massa  $CM_2$ ,  $CM_3$  e  $CM_4$  e os segmentos  $\overline{O_2A}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{O_4B}$ .



De modo análogo, ao se utilizar a Figura 5 e considerando-se  $\beta_P$  o ângulo, formado pelo vetor posição do ponto P em relação à direção paralela do segmento BA passando pelo centro de massa  $CM_3$ , e sendo o ângulo  $\beta_{FP}$ , formado pela direção da força  $F_P$  e a direção do eixo  $\hat{x}$  que passa pelo ponto P, definem-se as Equações (42) a (45), as quais representam as componentes dos vetores posição do ponto P e da força  $F_P$ , considerando-se o sistema de coordenadas xy estabelecido.

$$R_{Px} = R_P \cos(\theta_3 + \beta_P) \quad (42)$$

$$R_{Py} = R_P \sin(\theta_3 + \beta_P) \quad (43)$$

$$F_{Px} = F_P \cos(\beta_{FP}) \quad (44)$$

$$F_{Py} = F_P \sin(\beta_{FP}) \quad (45)$$

As acelerações absolutas nos centros de massa dos elos do mecanismo nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são determinadas pelas Equações (46) a (51):

$$a_{CM2x} = -R_{CM2} \omega_2^2 \cos(\theta_2 + \beta_2) - R_{CM2} \alpha_2 \sin(\theta_2 + \beta_2) \quad (46)$$

$$a_{CM2y} = -R_{CG2} \omega_2^2 \sin(\theta_2 + \beta_2) + R_{CM2} \alpha_2 \cos(\theta_2 + \beta_2) \quad (47)$$

$$a_{CM3x} = +a \omega_2^2 \cos \theta_2 - a \alpha_2 \sin \theta_2 - R_{CM3} \omega_3^2 \cos(\theta_3 + \beta_3) - R_{CM3} \alpha_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \quad (48)$$

$$a_{CM3y} = -a \omega_2^2 \sin \theta_2 + a \alpha_2 \cos \theta_2 - R_{CM3} \omega_3^2 \sin(\theta_3 + \beta_3) + R_{CM3} \alpha_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \quad (49)$$

$$a_{CM4x} = -R_{CM4} \omega_4^2 \cos(\theta_4 - \beta_4) - R_{CM4} \alpha_4 \sin(\theta_4 - \beta_4) \quad (50)$$

$$a_{CM4y} = -R_{CM4} \omega_4^2 \sin(\theta_4 - \beta_4) + R_{CM4} \alpha_4 \cos(\theta_4 - \beta_4) \quad (51)$$

A análise dinâmica e vibratória do mancal flexível pode ser observada com o auxílio da Figura 6, em que se tem o modelo dinâmico do mancal flexível. O mancal foi substituído por uma viga em balanço de comprimento L, com o módulo de elasticidade E com o momento de inércia da área da seção transversal I, com carregamento na extremidade livre F.

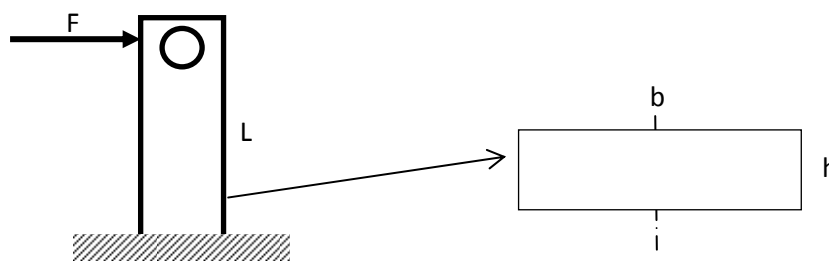


Figura 6 – Modelo dinâmico do mancal flexível.

A variável F representa a ação do mecanismo sobre o mancal,  $F_{12x}$ , calculada, considerando a condição dinâmica do mecanismo, por meio da equação matricial  $AX=B$ , representada na Figura 4.





Do modelo apresentado na Figura 6, chega-se ao sistema equivalente ilustrado na Figura 7.  $K$  refere-se à rigidez elástica,  $c$  representa a constante de amortecimento viscoso,  $m$  refere-se à massa equivalente. No modelo dinâmico foi considerado que todo o carregamento está concentrado na extremidade da viga.

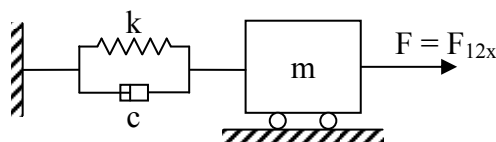


Figura 7 – Modelo dinâmico do mancal flexível.

A Equação (52) refere-se à equação diferencial resultante do sistema vibratório referente à Figura 7.

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = \left(\frac{F_{12x}}{m}\right) \quad (52)$$

O Módulo de Elasticidade do material da viga será considerado como sendo a do aço utilizado em rolamentos de mancais,  $E = 208$  GPa. Supondo-se o mancal como sendo uma barra retangular engastada de massa  $m = 0,5$  Kg e de dimensões  $L = 0,180$  m,  $a = 0,020$  m e  $b = 0,050$  m, chega-se a  $k = 3,6 \times 10^6$  N/m. Adotando-se um fator de amortecimento no valor de  $\zeta = 0,001$ , determina-se a constante de amortecimento  $c = 4,8$  Kg/s. A massa  $m$  do sistema vibratório será dada pela soma da massa efetiva da viga na sua extremidade, 23% da massa da viga conforme Hartog (1985), com a massa do motor modelo Weg TCW20\_ 1,5 Kg, de acordo com os dados do fabricante, resultando em  $m = 1,616$  Kg.

Com os dados mencionados e com a Equação (52), foi possível desenvolver o modelo do sistema no *Simulink*®. A Figura 8 ilustra o esquema do modelo utilizado no *Simulink*®.

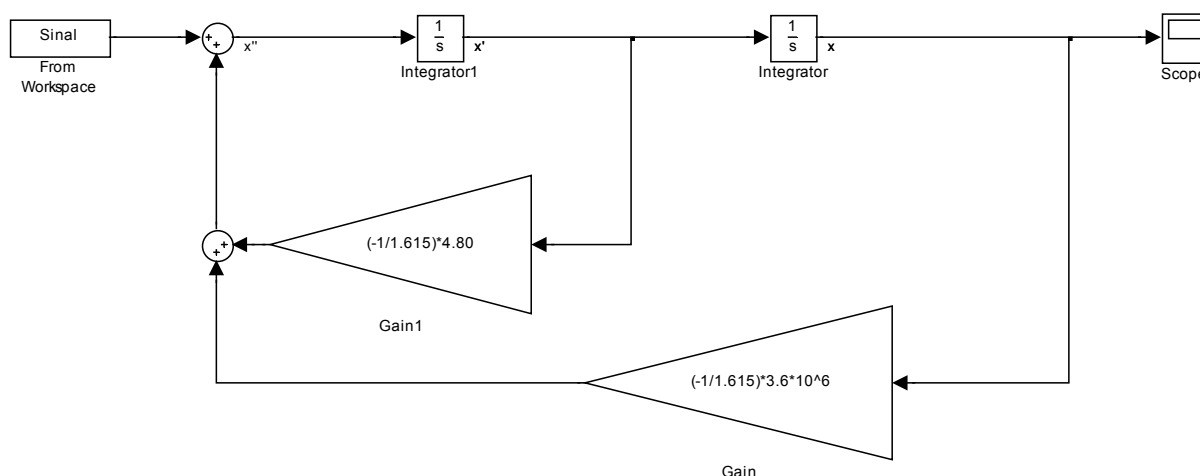


Figura 8 – Esquema do modelo utilizado no *Simulink*®.

#### 4. RESULTADOS

Um programa foi idealizado e utilizado no MatLab® para a solução da equação matricial  $AX=B$  representada na Figura 4 o que permitiu determinar os valores das componentes  $x$  e  $y$



das reações dinâmicas representadas pelas variáveis  $F_{12x}$ ,  $F_{12y}$ ,  $F_{14x}$  e  $F_{14y}$ , nos mancais 2 e 4 (posições  $O_2$  e  $O_4$ ), respectivamente.

Os dados do mecanismo que foram utilizados para a simulação referem-se ao exemplo 11-3 das páginas 578 a 581 do livro de Norton (2010):  $R_1=482,6$  mm,  $R_2=127$  mm,  $R_3=381$  mm,  $R_4=254$  mm,  $R_{CM2}=76,2$  mm @  $30^\circ$ ,  $R_{CM3}=228,6$  mm @  $45^\circ$ ,  $R_{CM4}=127$  mm @  $0^\circ$ , ponto P à  $76,2$  mm @  $100^\circ$  do centro de gravidade do elo 3,  $m_2=0,680$  kg,  $m_3=3,493$  kg,  $m_4=2,631$  kg,  $I_{CM2}=0,006$  kg.m<sup>2</sup>,  $I_{CM3}=0,011$  kg.m<sup>2</sup>,  $I_{CM4}=0,090$  kg.m<sup>2</sup>, uma força externa  $F_P=355,84$  N @  $330^\circ$  do sistema de coordenadas, aplicada no ponto P, um torque externo no elo 4,  $T_4=13,558$  N.m,  $\theta_2=60^\circ$ ,  $\omega_2=25$  rad/s,  $\alpha_2=-40$  rad/s<sup>2</sup>.

A Figura 9 ilustra os resultados das reações dinâmicas nos mancais e nas juntas em função do ângulo de posição  $\theta_2$  da barra de entrada. As reações dinâmicas nos mancais  $O_2$  e  $O_4$  obtidas pela simulação estão ilustradas nas Figuras 9a) e 9b). As Figuras 9c) e 9d) ilustram as reações dinâmicas nas juntas A e B.

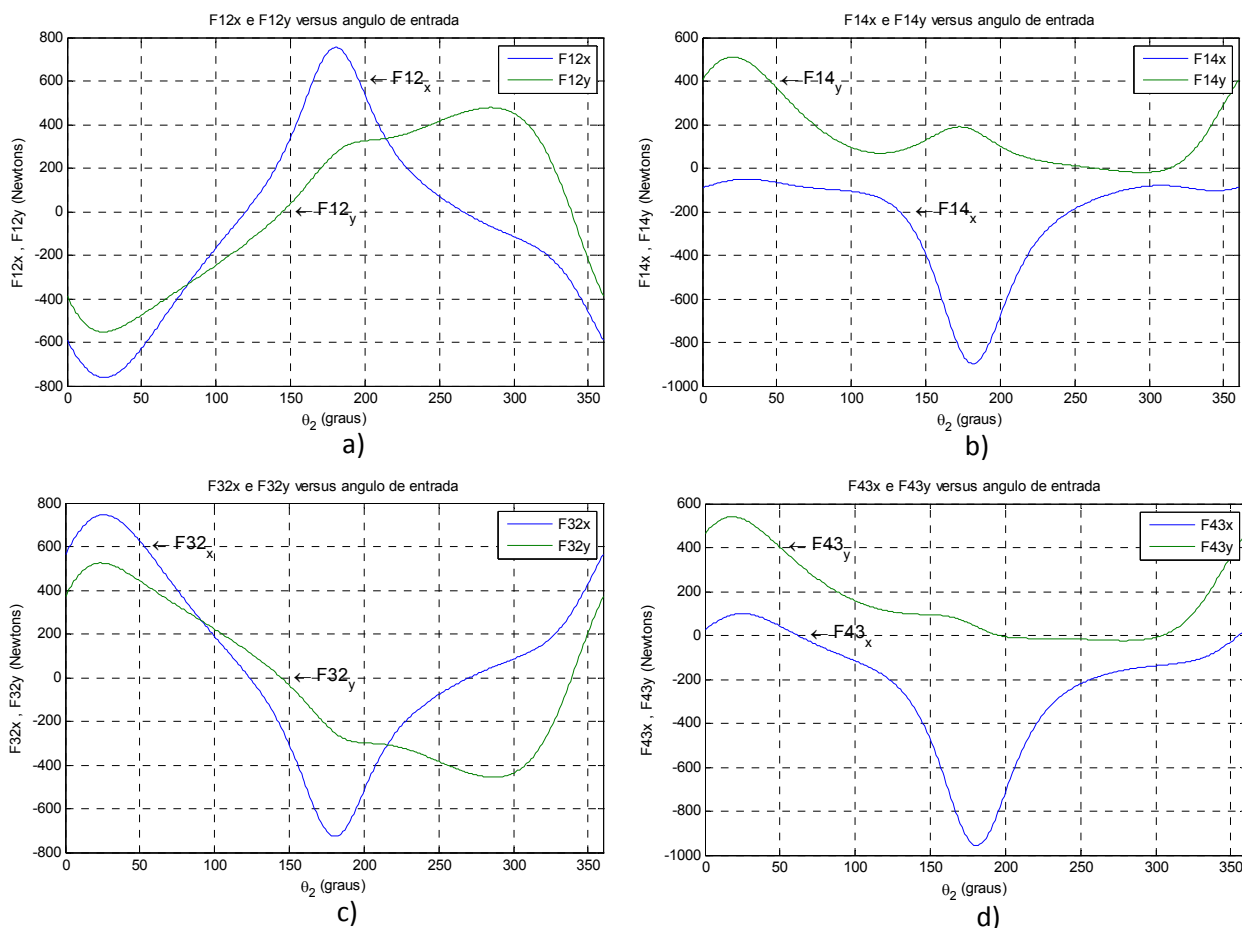


Figura 9 – Reações dinâmicas nos mancais  $O_2$  e  $O_4$  em função do ângulo de entrada  $\theta_2$ . Figura 9a): Reações no mancal  $O_2$ ; Figura 9b): Reações no mancal  $O_4$ ; Figura 9c): Reações na junta A; Figura 9d): Reações na junta B.

Para se obter os resultados da análise dinâmica do mancal flexível  $O_2$ , utilizando-se a equação diferencial resultante do sistema vibratório representada pela Equação (52), o modelo foi desenvolvido no MatLab-Simulink®, à partir do esquema da Figura 8, o que permitiu obter a deflexão do mancal em função do tempo. Os valores são ilustrados na Figura 10,



correspondentes a apenas um ciclo do mecanismo, isto é,  $\theta_2$  variando de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ . O tempo indicado na Figura 10 está sincronizado com o ângulo da barra de entrada  $\theta_2$ , de tal forma que 15 s equivalem ao tempo que o ângulo de posição da barra de entrada  $\theta_2$  refere-se à  $360^\circ$ . A deflexão causada pelo efeito da vibração mecânica no mancal é ilustrada na Figura 10.

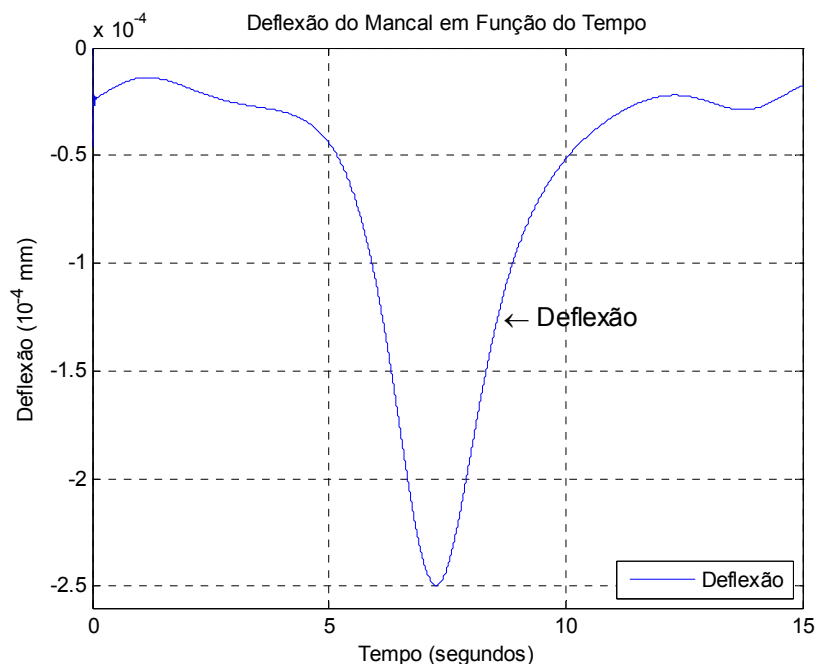


Figura 10 – Gráfico da deflexão do mancal na junta  $O_2$  em função do tempo.

Considerando-se os conceitos apresentados na metodologia deste trabalho e as respectivas deduções e adaptações desenvolvidas, as quais foram utilizadas para a execução da análise cinemática e dinâmica, ao se observar a Figura 10, pode-se ver que há um pico claro de deflexão do mancal flexível. O resultado da deflexão do mancal torna-se um dado muito importante a ser levado em consideração no projeto deste tipo de sistema mecânico.

## 5. CONCLUSÕES

Os resultados deste trabalho demonstraram que é possível o emprego de um programa de fácil utilização e acessibilidade para trabalhar com o ensino de engenharia e isto foi adequado em relação ao estudo de cinemática e dinâmica em sistemas mecânicos. A aplicação das teorias básicas da cinemática e da dinâmica permitiu a realização das análises das reações nos mancais e nas juntas do mecanismo e também se obteve resultados muito precisos.

Ao se observar o gráfico ilustrado na Figura 10 referente aos resultados da simulação correspondentes às deflexões do mancal na junta  $O_2$  em função do tempo, nota-se que a variação da deflexão causada pelo efeito da vibração mecânica no mancal devido aos esforços gera um pico de deflexão muito claro e acentuado. Este fato deve ser levado em consideração pelo projetista ao determinar o mancal correto para suportar a carga dinâmica exercida pelo mecanismo de quatro barras analisado.

Também, pode-se concluir que no ensino de engenharia apesar de se terem temas relativamente complexos, ao se utilizar conceitos básicos e ferramentas computacionais podem-se desenvolver as atividades dos alunos com muito interesse e dedicação.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HARTOG, J. P. D. Mechanical vibrations. 2 ed. New York: Dover Publications, Inc., 1985.

NORTON, R. L. Cinemática e dinâmica dos mecanismos. 1 ed. Porto Alegre: Editora McGraw-Hill, 2010.

NORTON, R. L. Projeto de Máquinas: Uma abordagem integrada. 2 ed. Porto Alegre: Editora Bookman, 2004.

REZENDE, O. P.; PIVETTA, C. S.; GRECHI, R.; CAMPOS, M. L.; BRANDÃO, J. G. T. Uma contribuição à análise dinâmica computacional de mecanismos de 4 barras. **Anais: X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Metalúrgica e Industrial.** Vitória: 2010.

ROCHA, M. S., PIVETTA, C. S., REZENDE, O. P. Estudo das reações dinâmicas de um mecanismo planar de quatro barras usando o MS Excel. **Anais: XI Encontro Latino Americano de Pós-Graduação.** São José dos Campos: UNIVAP, 2011.

## DYNAMIC ANALYSIS TEACHING OF ACOPLATED FLEXIBLE BEARING ON LINKAGES USING MATLAB-SIMULINK®

**Abstract:** *Mechanisms are part of mankind whether for load transportation, tracing point for machine elements or for robots systems. They are a rigid parts combination in order to perform a function, movement or predetermined way of load transmission. The kinematics and dynamics are studied through linear algebra or vector calculations. The four bar linkages normally working with bearings, which are mechanics components that support rotating movements. The flexible bearings are expressed through their "elastic stiffness" condition. This paper has the objective to demonstrate to the engineering student the possibilities of analysis of the mechanical vibration in flexible bearings effects of due to dynamic loads applied by a four bar linkage using the current computational systems available. For the mechanism kinematics and dynamics resolution, a program was created using the software MatLab®. A computational model was created using the Simulink®, which is the simulation environment of Matlab®. Thus, the flexible bearing's deflection was obtained in function of the time. The time depends of the input link (input bar) angular position from 0° to 360°. The simulation results provided information to observe that there is a maximum deflection point clearing detected, that should be taken in consideration by the designer to determine the correct bearing to support the load exerted by the analyzed four bar linkage.*

**Key-words:** *four bars linkage simulation, flexible bearings, mechanical vibration, MatLab-Simulink®, deflection.*