



## MODELO COMPUTACIONAL DE UM SISTEMA DINÂMICO DE TANQUES COMUNICANTES DIDÁTICO

**Raphael Diego Comesanha e Silva** – raphael@prof.iesam-pa.edu.br

IESAM - Instituição de Ensino Superior da Amazônia

Av.: Governador José Malcher, 1128

66055-260 – Belém - Pará

**Filipe Duarte de Oliveira** – duarte\_fp@hotmail.com

**Edcleide Silva Pessoa Pereira** – edcleidep@hotmail.com

**Resumo:** *Este artigo apresenta os resultados do uso de um modelo computacional que torna o aprendizado mais eficiente utilizando-se de recursos computacionais, pois a utilização do computador torna o processo de aprendizagem mais interessante para o estudante, além de fazer a rara conexão entre teoria e prática. Usando um algoritmo de simulação computacional, no formato S-Function do programa Matlab, pôde-se simular o funcionamento de tanques comunicantes, obter as funções de transferência que regem a dinâmica desse sistema e validar as equações modeladas. A partir da realização dessas simulações através de roteiros experimentais, pretende-se concretizar o conteúdo ministrado nas aulas teóricas de disciplinas de identificação e modelagem de sistemas.*

**Palavras-chave:** *Tanques comunicantes, modelo computacional, modelagem de sistemas, identificação de sistemas, roteiros experimentais.*

### 1. INTRODUÇÃO

No Ensino Superior, a falta de interação entre conhecimento e realidade parece ser uma característica bastante acentuada. Os educadores, no esforço de levar o conhecimento aos seus alunos, dão significativa importância ao conteúdo em si, e não à sua interligação com a situação da qual surge, gerando, assim, a clássica dissociação entre teoria e prática. (FAVARÃO & ARAÚJO, 2004)

Por isso é de responsabilidade do educador fazer com que o discente seja o sujeito de sua aprendizagem, tendo ciência do porque e pra quê, o que leva o aluno ao conhecimento sistemático. Porém, para que estas habilidades sejam alcançadas, devem ser trabalhadas práticas pedagógicas voltadas para o aluno, utilizando-se de conteúdos interdisciplinares e, principalmente, contextualizados (FAVARÃO & ARAÚJO, 2004).

Assim, a utilização de computadores e de modelos verossímeis voltados para a prática do processo de aprendizagem, mostram-se ferramentas primordiais de auxílio ao professor. Um modelo computacional com fins didáticos não só ajuda o entendimento das aulas, mas também impulsiona o interesse dos acadêmicos pelo conhecimento, em especial pela disciplina Identificação e Modelagem de Sistemas, a qual contempla boa parte do conteúdo

Realização:

 **ABENGE**

Organização:



**O ENGENHEIRO  
PROFESSOR É O  
DESAFIO DE EDUCAR**

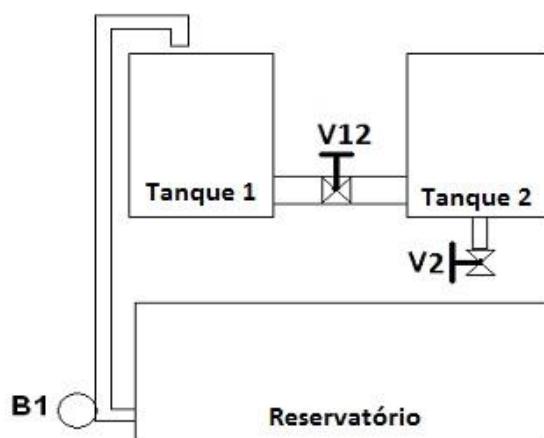


abordado.

## 2. CONFIGURAÇÕES DO SISTEMA

O modelo de experiência foi produzido considerando um sistema dinâmico de tanques comunicantes (SDTC), modelado em Matlab/Simulink e representado na Figura 1.

Figura 1 – Sistema Dinâmico de Tanques Comunicantes - SDTC



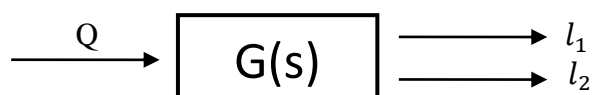
### 2.1. Configuração Física

A estrutura física do SDTC contém um reservatório para abastecimento e escoamento de água de dois tanques idênticos de acrílico dispostos lado a lado em um nível acima do reservatório (Figura 1), sendo que este possui dimensões suficientes para prover a água solicitada por ambos os tanques. A lateral direita desse reservatório tem um orifício ao fundo, onde está conectada uma bomba que transporta água para os dois tanques.

Para adquirir um conhecimento adequado a respeito da dinâmica do sistema foi de extrema importância elaborar um modelo matemático para simulação computacional que represente essa dinâmica o mais aproximado possível do protótipo existente.

O SDTC é um sistema hídrico de tanques multivariável, com uma entrada e duas saídas (figura 2). Do ponto de vista teórico pode ser modelado a partir de suas equações físicas, as quais simulam o comportamento do nível de cada tanque (variáveis de saída), devido a um sinal de entrada aplicado (vazão de entrada no tanque 1).

Figura 2 – Diagrama de blocos – Sistema SIMO.





## 2.2. Equações Dinâmicas

Precisa-se de duas equações para descrever o comportamento dos tanques, uma representa o nível do tanque 1, enquanto a outra representa o nível do tanque 2.

Ao considerar o tanque 2, com uma vazão de entrada  $Q_{s12}$ , fornecida pelo tanque 1 através da válvula  $V_{12}$ , e uma vazão de saída  $Q_{s2}$ , através da válvula  $V_2$ , o volume nesse tanque varia conforme a Equação 1.

$$\frac{dV}{dt} = Q_{s12} - Q_{s2} \quad (1)$$

As vazões  $Q_{s12}$  e  $Q_{s2}$  são calculadas pelas Equações 2 e 3 respectivamente.

$$Q_{s12} = \alpha_{12} s_{12} v_{12} \quad (2)$$

$$Q_{s2} = \alpha_2 s_2 v_2 \quad (3)$$

Onde,  $v_{12}$  e  $v_2$  representam a velocidade da água nos tubos de interligação e saída do tanque 2, que têm seção transversal  $s_{12}$  e  $s_2$ , respectivamente,  $\alpha_{12}$  é o coeficiente de fluxo da válvula  $V_{12}$  e  $\alpha_2$  da válvula  $V_2$ .

Por meio da equação fundamental da hidrodinâmica de Bernoulli é possível encontrar a relação da velocidade de escoamento da água pela tubulação em função da altura do líquido nos tanques. Assim, para o tanque 2 em relação ao seu tubo de saída, a equação de Bernoulli é dada pela Equação 4.

$$p_L + \rho g l_2 + \frac{\rho v_L^2}{2} = p_s + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (4)$$

A pressão do líquido na superfície  $p_L$ , e na saída  $p_s$ , são iguais a pressão atmosférica;  $g$  é a constante gravitacional;  $\rho$  é a densidade da água;  $l_2$  é a altura do nível no tanque;  $v_2$  é a velocidade do líquido no tubo de saída e  $h_s$  é a altura do orifício de saída da água, considerada como referência.

A equação da continuidade em um líquido incompressível permite isolar a velocidade  $v_L$ .

$$v_L = \frac{s_2 v_2}{A_2} \quad (5)$$

Em que  $A_2$  é a área do tanque,  $v_L$  é a velocidade com que o nível desse tanque diminui e  $s_2$  é a seção da tubulação de saída.

Ao substituir a Equação 5 na Equação 4 e efetuar os devidos cancelamentos, é obtida a Equação 6.

$$v_2^2 \left(1 - \frac{s_2^2}{A_2^2}\right) = 2g(l_2 - h_s) \quad (6)$$

Como  $A_2$  é muito maior que  $s_2$ , a razão entre eles pode ser desprezada e  $v_2$  é calculada através da Equação 7.

$$v_2 = \sqrt{2gl_2} \quad (7)$$



Utilizando o mesmo método para o tanque 1, tendo em mente que pela configuração, o nível  $l_1$  é sempre maior, ou igual ao  $l_2$ , a velocidade da água nesse tudo é:

$$v_{12} = \alpha_2 s_2 \sqrt{2g(l_1 - l_2)} \quad (8)$$

Ao substituir as Equações 7 e 8 nas Equações 2 e 3, é obtido o valor das vazões

$$Q_{s2} = \alpha_2 s_2 \sqrt{2gl_2} \quad (9)$$

$$Q_{s12} = \alpha_{12} s_{12} \sqrt{2g(l_1 - l_2)} \quad (10)$$

Assim, a equação que representa a variação do volume assume a seguinte forma:

$$\frac{dV}{dt} = \alpha_{12} s_{12} \sqrt{2g(l_1 - l_2)} - \alpha_2 s_2 \sqrt{2gl_2} \quad (11)$$

Como a variação volumétrica corresponde ao produto da Área transversal do tanque pela variação da altura do nível ( $\frac{dV}{dt} = A \frac{dl}{dt}$ ), a Equação 11 passa a ser:

$$\frac{dl_2}{dt} = \frac{1}{A_2} [\alpha_{12} s_{12} \sqrt{2g(l_1 - l_2)} - \alpha_2 s_2 \sqrt{2gl_2}] \quad (12)$$

Da mesma forma, o tanque 1, que possui vazão de entrada  $u_1$ , fornecida pela bomba e de saída  $Q_{s12}$ , apresenta a seguinte equação, para a dinâmica do seu nível.

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{1}{A_1} [u_1 - \alpha_{12} s_{12} \sqrt{2g(l_1 - l_2)}] \quad (13)$$

Todas as Equações deduzidas aqui foram introduzidas no programa em S-Function através do Matlab para que, juntamente com os dados da vazão e dimensões dos recipientes, o programa possa calcular o nível dos tanques.

### 2.3. Diagrama de Blocos

O sistema estudado é classificado com um sistema SIMO (*Single Input Multiple Output*), como mostrado na figura 2. Ou seja, este apresenta entrada única e múltiplas saídas. O sinal de entrada corresponde à vazão, em centímetros cúbicos por segundo [ $\text{cm}^3/\text{s}$ ], que é fornecida pela bomba 1. Os sinais de saída são os valores de nível dos tanques 1 e 2, em centímetros (SILVA, 2012).

Porém, para adequar o sistema para o propósito do modelo acadêmico, utilizou-se um sistema SIMO rearranjado, o que o manteve em um sistema com uma única entrada e uma saída, porém com uma configuração diferente, como mostrado na Figura 3. Essa mudança ocorreu, para que pudessem ser visualizadas as curvas de nível separadamente, resultando em duas equações de transferência de primeira ordem ( $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ ), já que para que um sistema seja de primeira ordem, ele deve apresentar a função de transferência como aquela mostrada



na Figura 4 (NISE, 2002), onde  $R(s)$  representa a entrada,  $G(s)$  a função de transferência e  $C(s)$  representa a saída.

Figura 3 – Diagrama de blocos – Sistema SIMO Rearranjado.

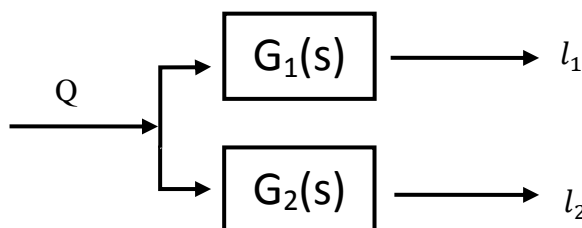
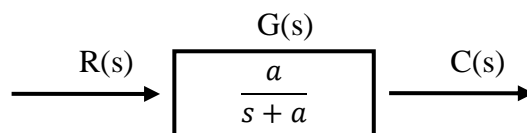


Figura 4 – Sistema de primeira ordem (NISE, 2002)



### 3. Modelagem do sistema de tanques.

Como mencionado, as curvas de saída de nível dos tanques, são funções de transferências de primeira ordem. E como a função de transferência representa uma relação entre entrada e saída, a resposta do sistema ao degrau pode levar a obtenção de uma representação gráfica, mesmo haver o conhecimento da construção interna (NAISE, 2002). Ressaltando que o Sistema Dinâmico de Tanques Comunicantes trabalha com entrada degrau, pois, inicialmente, a vazão tem valor zero, ou próximo de zero, e após pouquíssimo tempo tem seu valor alterado drasticamente.

Segundo Naise (2002), a função de transferência pode ser obtida através de um gráfico da seguinte maneira: Considera-se uma entrada degrau; a função de transferência (equação 14);  $K$ , sendo o ganho e  $t$  a constante de tempo, que representa o tempo necessário para que a função atinja 63% do seu valor final.

$$C(s) = \frac{K}{s(s+a)} = \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{(s+a)} \quad (14)$$

Se os valores de  $K$  e  $a$  forem encontrados, a função de transferência poderá ser montada. Como mostrado na primeira parte da equação o ganho  $K$  da função de transferência pode ser encontrado através da relação  $K/a$ , que representa o próprio ganho apresentado pelo gráfico. Como mencionado,  $t$  corresponde ao tempo em que o ganho esteja em 63% do seu valor máximo, já para se encontrar o  $a$ , deve-se simplesmente fazer o inverso do valor da constante tempo.

Tendo em posse o valor da constante  $a$ , o  $K$  pode ser encontrado através da relação  $k/a$ , como mencionado anteriormente.



#### 4. EXPERIMENTO

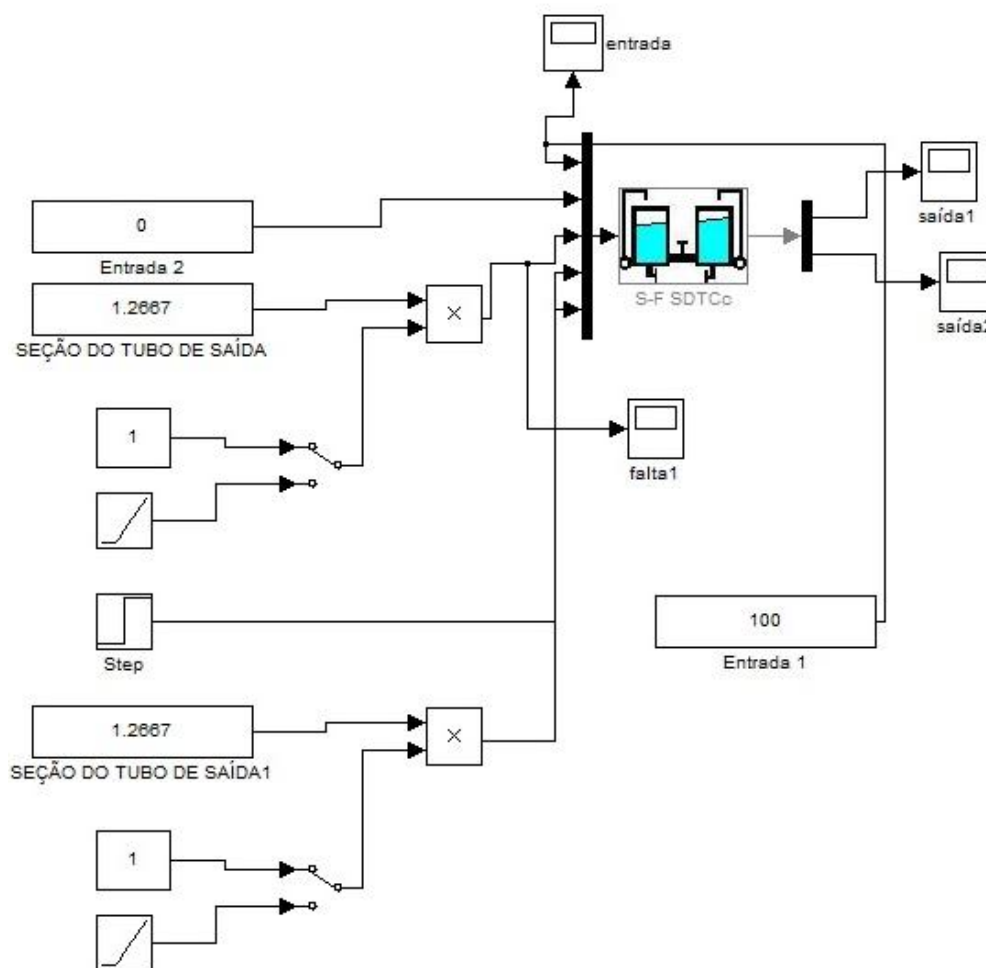
Utilizando-se a rotina presente no ANEXO A e o programa em Simulink mostrado na Figura 5, pôde-se construir o modelo representativo dos tanques comunicantes.

O primeiro passo é executar a inicialização dos valores iniciais dos vetores e isso é feito através da rotina descrita no ANEXO B. Após o código ser escrito, deve-se executá-lo através do *run* no MATLAB. O próximo passo é a execução do programa em Simulink e da rotina mostrada no ANEXO A, ou seja, a inicialização do modelo computacional.

O valor de vazão de entrada deve ser inserido no campo Entrada 1, no programa em Simulink, já os gráficos contendo o comportamento do nível dos tanques, ou seja, as saídas, são mostrados ao se clicar nos *scopes* nomeados como saída1 e saída2.

Vale notar que o tempo de execução é de 3000 segundos, por que após esse tempo, o fluxo será constante, ou seja, o fluxo de entrada, o fluxo entre os tanques e o fluxo de saída será igual.

Figura 5 – Programa em Simulink, tanques comunicantes.





#### 4.1. Identificação do SDTC

Ao se utilizar um valor de entrada de  $100 \text{ cm}^3/\text{s}$ , o programa gera os gráficos de nível, tanto do tanque 1, quanto do tanque 2, como mostrado nas Figuras 6 e 7, respectivamente.

Figura 6 – Nível do tanque 1

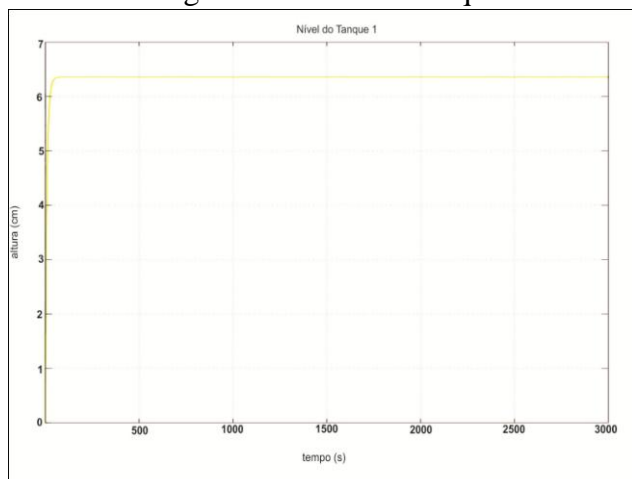
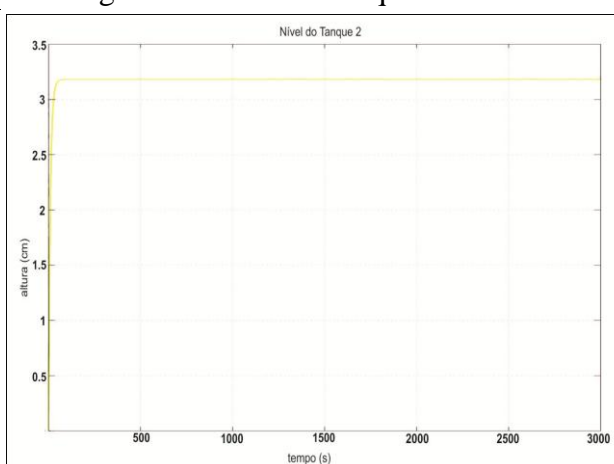


Figura 7 – Nível do tanque 2



##### 4.1.1 Determinação da Função de transferência de 1ª ordem

Utilizando a ferramenta zoom do MATLAB, pôde-se encontrar a constante de tempo para cada um dos gráficos. Para o tanque 1, 63% do valor máximo equivale a 4 cm, já para o tanque 2, vale 2 cm. Assim, as respectivas constantes de tempo são:  $t_1 = 7,38 \text{ s}$  e  $t_2 = 9,04 \text{ s}$ .

O inverso das constantes de tempo é:

$$a_1 = 1/7,38 = 0,1355 \quad (15)$$

$$a_2 = 1/9,04 = 0,1106 \quad (16)$$

Utilizando-se (14) encontra-se o valor do ganho  $k_1$  e  $k_2$ .

$$k_1/a_1 = 6,36 \quad (17)$$

$$k_1 = 6,36 \times 0,1355 \quad (18)$$

$$k_1 = 0,86178 \quad (19)$$

$$k_1/a_1 = 3,18 \quad (20)$$

$$k_1 = 3,18 \times 0,1106 \quad (21)$$

$$k_1 = 0,3518 \quad (22)$$

Assim, segundo (14), as equações de transferência, baseando-se nos dados encontrados, assumem a seguinte forma:

$$G_1(s) = \frac{0,86178}{s + 0,1355} \quad (23)$$

$$G_2(s) = \frac{0,3518}{s + 0,11025} \quad (24)$$



#### 4.1.1 Validação da Função de transferência identificada

Através do Simulink é feita a verificação das equações utilizando-se um bloco *Transfer Function*, ou função de transferência, no qual é inserido os dados calculados, como mostra a Figura 8 e 9, respectivamente.

Figura 8 - Bloco *transfer function*  $G_1(s)$

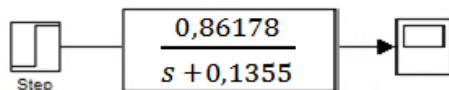
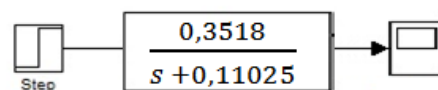


Figura 9 - Bloco *transfer function*  $G_2(s)$



E os gráficos resultantes das funções de transferência  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  são mostrados nas figuras 10 e 11, respectivamente.

Figura 10 – Gráfico de  $G_1(s)$

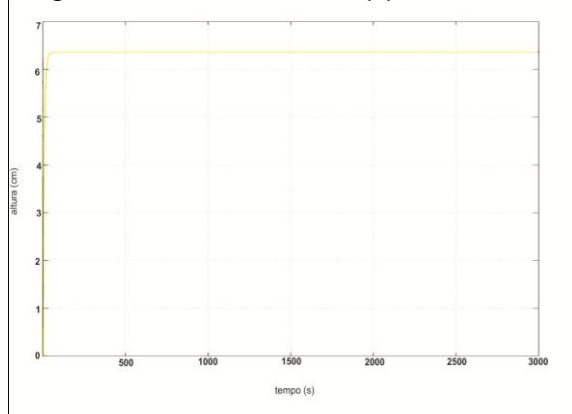
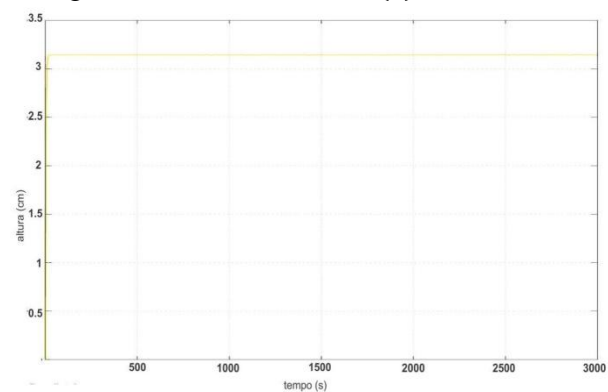


Figura 11 – Gráfico de  $G_2(s)$



## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo computacional se mostra como um grande aliado no ensino superior para discentes de engenharia elétrica. Através de inserção de valores, os alunos poderão visualizar curvas de nível, calcular o ganho e constante de tempo e finalmente a partir desses dados montar a equação de transferência da curva e comprovar se os valores estão corretos, de uma maneira intuitiva, interativa e interessante, chamando a atenção do aluno e melhorando o ensino devido a utilização de exemplos reais, o que é uma carência nos dias atuais.

Como propostas futuras, pretende-se comprovar a não linearidade do SDTC através de técnicas de identificação de sistemas; elaborar um controlador clássico para os modelos identificados, aplicar técnicas para o estudo de detecção e diagnóstico de faltas e desenvolver roteiros experimentais didáticos para que todos os experimentos possam ser aplicados em sala de aula.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

NISE, Norman S. Engenharia de sistemas de controle.3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 700p.





SILVA, Raphael Diego Comesanha e. UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Estudos de Estratégias de Identificação Paramétrica para Detecção e Diagnóstico de Falhas em um Processo Industrial de Tipo Tanques Comunicantes, 2012. 102p.

TOZZI, M.; OTA, J. Vertedouro em degraus. **Revista da Vinci**, Curitiba, v.1, n.1, p. 9-28, 2004.

## **COMPUTER MODEL WITH SIMULATIONS APPLIED TO THE CLASSROOMS**

**Abstract:** *This paper presents the results of a computational model that makes learning more efficiently using computing resources, because the use of computer makes the learning process more interesting for the student, in addition to the unusual connection between theory and practice. Using a computer simulation algorithm in the format S-Function in Matlab, we could simulate the operation of interconnected tanks, obtain the transfer functions that rule the dynamics of this system and validate the modeled equations. From the realization of these simulations using experimental manuals, we intend to realize the content taught in theoretical classes of the disciplines of systems identification and modeling. Keywords: Tanks communicating, computational modeling, system modeling, system identification, experimental manuals.*

**Key-words:** *Communicating tanks, computational modeling, system modeling, system identification, experimental manuals.*



## ANEXOS

### ANEXO A – PROGRAMA EM S-FUNCTION NO MATLAB - SIMULAÇÃO DO SISTEMA DE TANQUES COMUNICANTES

```
%% S-Function SISTEMA DIÂMICO DE TANQUES COMUNICANTES - SDTC
% Universidade Federal do Pará
% Instituto de Tecnologia
% Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
% Raphael Diego Comesanha e Silva -

function [sys,x0,str,ts]=SDTCcont(t,x,u,flag,x0)

    switch flag

%% Inicializa variáveis:
        case 0
            [sys,x0,str,ts] = Inicio(x0);

%% Cálculo do vetor de estados discretos (derivadas):
        case 1
            sys = Estados(t,x,u,x0);

%% Saídas:
        case 3
            sys = Saida(t,x,u);

%% Atualização de parametros:
        case 2
            sys = []; % Não executa nada;
        case 9
            sys = []; % Não executa nada;

%% Mensagem de erro para flag inválido
        otherwise
            error(['Flag inválido = ',num2str(flag)]);
        end

function [sys,x0,str,ts] = Inicio(x0)

    global variaveis

    sizes = simsizes; %dar informação ao simulink
    sizes.NumContStates = 2; %n° de estados contínuos
    sizes.NumDiscStates = 0; %n° de estados discretos
    sizes.NumOutputs = 2; %n° de saídas
    sizes.NumInputs = 5; %n° de entradas
    sizes.DirFeedthrough = 0; % Saída depende diretamente da entrada -
0(não) e 1(sim)
    sizes.NumSampleTimes = 1; % n° de tempos de amostragem

%    l1o = ParSDTC(7);
%    l2o = ParSDTC(8);
%x0 = [21.92 14.65];%ponto de operação 3
```



```
%x0 = [23.5 16.24];%ponto de operação 3-5%
%x0 = [25.35 18.09];%ponto de operação 3-10%
%x0 = [27.55 20.28];%ponto de operação 3-15%
%x0 = [30.15 22.9];%ponto de operação 3-20%
%x0 = [14.1499 7.4425];%ponto de operação 2
%x0 = [14.95 8.25];%ponto de operação 2-5%
%x0 = [15.89 9.18];%ponto de operação 2-10%
%x0 = [17 10.3];%ponto de operação 2-15%
%x0 = [18.33 11.62];%ponto de operação 2-20%
%x0 = [9.54 3.58];%ponto de operação 1
%x0 = [9.94 3.97];%ponto de operação 1-5%
%x0 = [10.39 4.42];%ponto de operação 1-10%
%x0 = [10.91 4.95];%ponto de operação 1-15%
%x0 = [11.55 5.59];%ponto de operação 1-20%
x0 = [0.001 0.001];
sys = simsizes(sizes); %transporta as informações dos sizes para o SYS
str = []; % reservado para o futuro (matriz vazia)
variaveis = zeros(2,1);
ts = [0 0]; % Período de Amostragem: [Período, offset] tempo de
amostragem contínuo.

function sys = Estados(t,x,u,x0);

global variaveis

%% Parametros:
at1 = 60; % Área do tanque 1;
at2 = 60; % Área do tanque 2;
%sf1 = 0; % Secção do tubo do tanque 1;
%sf12 = 5.0645; % Secção do tubo do tanque 1 para o tanque 2;
%sf2 = 2.5322; % Secção do tubo do tanque 2;
g = 980; % gravidade;

%% Entradas:
fe1 = u(1,1); % Vasão de betrada do tanque 1;
fe2 = u(2,1); % Vasão de betrada do tanque 2;
sf2 = u(3,1); % variação da seção do tubo de saída 2;
sf1 = u(4,1); % variação da seção do tubo de saída 1;
sf12 = u(5,1);% variação da seção do tubo de interligação;

%% Variáveis de estado:
l1 = x(1,1);
l2 = x(2,1);

%% Equações de estado (derivadas):
% Equações dinâmicas dx/dt = f(x,u) configuração k;

%cf12=(0.0015*(fe1+fe2))+0.2462;
%cf2=(-0.0101*(fe1+fe2))+1.7058;
cf12= 1;
cf2= 1;

if l1>l2
p11 = (1/at1)*(fe1-(sf1*sqrt(2*g*l1))-(cf12*sf12*sqrt(2*g*(l1-
12)))));
p12 = (1/at2)*(fe2-(cf2*sf2*sqrt(2*g*l2))+(cf12*sf12*sqrt(2*g*(l1-
12)))));
```



```
end
if l2>l1
p11 = (1/at1)*(fe1-(sf1*sqrt(2*g*l1)))+(cf12*sf12*sqrt(2*g*(l2-
l1))));
p12 = (1/at2)*(fe2-(cf2*sf2*sqrt(2*g*l2)))-(cf12*sf12*sqrt(2*g*(l2-
l1))));
end
if l1==l2
p11 = (1/at1)*(fe1-(sf1*sqrt(2*g*l1)));
p12 = (1/at2)*(fe2-(sf2*sqrt(2*g*l2)));
end

variaveis=[p11; p12];

%% Saída das variáveis de estado do sistema:
sys = [p11 p12];

function sys = Saida(t,x,u)

global variaveis

l1 = x(1);
l2 = x(2);

sys = [l1 l2];
```

## **ANEXO B – ROTINA PARA A INICIALIZAÇÃO DOS VALORES INICIAIS.**

```
%% Parâmetros do Sistema Dinâmico de Tanques Comunicantes - SDTC
% Raphael Diego Comesanha e Silva

%% Referencia:
% J.Korbicz et all Fault Diagnosis Capítulo 1 secção 1.4

clear
x0 = [0 0]; % Condições iniciais do vetor de estados;
x1 = [0 0];
```