



ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM SEMIPRESENCIAL COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

Sueli Liberatti Javaroni, suelilj@fc.unesp.br

UNESP, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática

Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01

17033-360 – Bauru – SP

Felipe Pereira Heitmann, felipeph@gmail.com

Débora da Silva Soares – debbie_mat@yahoo.com.br

UNESP, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, IGCE

Av. 24-A, 1515 – Bairro Bela Vista

CEP 13506-900 – Rio Claro – SP

Resumo: Neste artigo desenvolvemos uma reflexão sobre como tecnologias digitais podem propiciar o estudo de Modelagem Matemática e Equações Diferenciais. Para isso, analisamos três atividades que fizeram uso intensivo de tecnologias digitais para o seu desenvolvimento. A primeira atividade refere-se ao estudo das soluções de uma EDO por meio de abordagens gráfica e numérica; a segunda, à leitura e discussão de um texto relacionado com Modelagem Matemática e EDO; e a terceira, à análise do comportamento das soluções de um modelo matemático para a transmissão da malária em uma região, com foco na influência dos parâmetros nesse comportamento. A partir da análise destas atividades foi possível identificar diferentes possibilidades fornecidas pelas tecnologias digitais, possibilidades estas que moldaram o pensamento e as ações dos alunos durante o estudo destes modelos e equações. Além disso, também foi possível obter indicações de que as formas de comunicação e interação desenvolvidas nas atividades realizadas online se aproximam da ideia do estar-junto-virtual-com-mídias, ilustrando a possibilidade de desenvolvimento de aulas a distância sobre modelagem e EDO que envolvem um processo coletivo e interativo de produção de conhecimento.

Palavras-chave: Educação matemática online, Tecnologias da Informação e Comunicação, Modelagem Matemática, Equações Diferenciais Ordinárias.

1. INTRODUÇÃO

Com a expansão da Educação a Distância (EaD) no Brasil temos um novo cenário educacional. Segundo Sanches (2007), a pós-graduação é a modalidade que mais pratica o ensino a distância em nosso país. No ano de 2006, foram oferecidos 889 cursos a distância,

Realização:



Organização:





dos quais a maior parte foi de pós-graduação lato sensu (27,7%) ou de extensão, aperfeiçoamento ou capacitação (30,6%). A graduação, com 205 cursos, chegou a apenas 23% do total. Nos dados divulgados nesse documento, na ocasião havia registro de apenas um curso de mestrado sendo oferecido na modalidade a distância, no estado do Paraná.

Já segundo o Censo da Educação Superior 2010 (BRASIL, 2011), a EaD foi responsável por 14,6% das matrículas em cursos de graduação no país em 2010, apresentando um crescimento de mais de 500% nos últimos 10 anos. A Universidade Aberta do Brasil (UAB) e Universidade Virtual do Estado de São Paulo (Univesp) são alguns dos exemplos de iniciativas governamentais que colaboram com essa expansão.

Entretanto, muitos são os relatos, como o de Mattar (2010) apud Sommer (2010, p.26) que assim com nós, fica “surpreso de perceber, cada vez mais, que pessoas e instituições só enxergam na EaD a produção de conteúdo, só conseguem imaginar a EaD como entrega de um conteúdo pronto para o aluno”. Relatos como esse mostram uma abordagem pedagógica que se aproxima do broadcast, um dos extremos que define o contínuo de interação entre professores e alunos, exposto em Valente (2010). No outro extremo desse contínuo encontra-se o “estar junto virtual, que prevê um alto grau de interação entre professor e alunos, que estão em espaços diferentes, porém interagindo via internet” (VALENTE, 2010, p.29). A concepção de EaD baseada na interação e colaboração entre os diversos atores num ambiente de aprendizagem- alunos, professores, tutores e tecnologias- que apoiamos se aproxima mais do estar junto virtual.

Nesse contexto vemos ainda a importância de discutir questões relacionadas às disciplinas matemáticas como Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Imprescindíveis no estudo de modelos matemáticos utilizados em diversas áreas, as EDO têm o seu estudo geralmente pautado nas soluções de equações por métodos algébricos específicos que não permitem resolver a maior parte das EDO utilizadas em modelos reais, dado sua complexidade. A compreensão do comportamento das soluções de forma gráfica e a busca de soluções numéricas para casos específicos são de grande importância no estudo desse tipo de modelo. Parte desse estudo só é possível em ambientes com tecnologias digitais e investigar esse tipo de estudo em um ambiente de EaD tem se mostrado cada vez mais necessário.



2. OBJETIVOS DA PESQUISA

Tendo em vista o cenário da EaD no Brasil, suas questões e problemas, e colocando o foco específico na produção de conhecimento matemático nesse contexto, é necessário investigarmos possibilidades tecnológicas para ampliar a interação e colaboração. A fim de nortear essa investigação, elaboramos a seguinte questão: “*Como as tecnologias digitais podem propiciar o estudo de Modelagem Matemática e Equações Diferenciais a distância?*”

Em busca de compreensões sobre o exposto, desenvolvemos e aplicamos atividades com o uso intenso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) em uma disciplina que contemplava momentos presenciais e a distância. Com isso buscamos investigar e avaliar as possibilidades de uso dessas tecnologias no estudo de Modelagem Matemática e Equações Diferenciais.

3. A DISCIPLINA DE MODELAGEM MATEMÁTICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A ementa da referida disciplina contemplou o estudo de concepções e abordagens de Modelagem Matemática, tanto na prática profissional quanto na Educação Matemática; estudo de equações diferenciais de primeira ordem e suas aplicações; estudo de equações diferenciais lineares de ordem n e análise qualitativa¹ de modelos matemáticos como os de Malthus, Verhulst, Lei do Resfriamento e Ross-MacDonald para contágio da malária. De acordo com Javaroni (2007, 2009), apesar da simplicidade matemática dos modelos mencionados e de certo modo limitados quanto à representação de fenômenos da realidade, eles são extremamente didáticos e, portanto, interessantes para o ensino de modelagem matemática e de introdução às equações diferenciais ordinárias.

4. ATIVIDADES REALIZADAS E TECNOLOGIAS EMPREGADAS

Diversas atividades desta disciplina previam uso de TDIC com o objetivo de ampliar as possibilidades de exploração e ensino dos conceitos relativos à Modelagem Matemática e Equações Diferenciais. Como suporte às aulas foi implementado um espaço de curso online junto à plataforma Moodle, hospedada no Núcleo de Educação a Distância da UNESP². A

¹ Maiores detalhes podem ser encontrados em Javaroni (2007)

² <http://moodle.unesp.br/course/view.php?id=93>



Sala Virtual, com sistema de Webconferência Adobe Connect Pro hospedado no NEaD-UNESP³, também foi utilizada nos encontros a distância.

No espaço do sistema de gestão de cursos online foram colocadas orientações para as leituras, discussões e escrita de resenhas dos textos que fizeram parte das atividades programadas, previstos nas referências bibliográficas do plano da disciplina. Ainda nesse espaço foram disponibilizadas ferramentas para fóruns de discussão e envio de arquivos de resenhas.

Aqui apresentamos três atividades que fizeram uso intensivo de tecnologias digitais durante o curso. Uma análise sobre o papel das tecnologias utilizadas acompanha a descrição detalhada de cada uma delas.

4.1. Exploração gráfica e numérica de soluções de EDO

Uma atividade sobre busca de soluções numéricas e gráficas de Equações Diferenciais utilizando computadores foi realizada presencialmente, com a participação dos 13 alunos da disciplina divididos em cinco duplas e um trio. A atividade foi dividida em dois momentos. Inicialmente buscou-se soluções numéricas para uma EDO que modela crescimento populacional utilizando planilhas de cálculo no OpenOffice Calc e na sequência foi utilizado o software de computação algébrica Maple para construção de gráficos de campos de direções para análise.

Inicialmente, os alunos trabalharam por meio de variação de intervalos entre os valores nas planilhas, com objetivo de perceber padrões de comportamento para as curvas soluções, mesmo que essas não fossem algebricamente encontradas. Na continuidade da atividade, a construção gráfica de campos de direções e da solução de problemas de valor inicial permitiu a exploração de diversas possibilidades de soluções por parte dos alunos. Além disso, a construção dinâmica dos campos de direções possibilitou avaliar o comportamento de curvas soluções mesmo que estas não fossem possíveis de ser encontradas algebricamente.

As planilhas eletrônicas e o software de computação algébrica são tecnologias que se juntaram ao lápis e o papel e a oralidade no estudo que os alunos realizaram do comportamento das equações diferenciais. Essas tecnologias, ou mídias, segundo Borba e Villarreal (2005), moldam a forma e o conteúdo do conhecimento produzido. Tais autores

³ <http://salavirtual.ead.unesp.br>



afirmam que esse conhecimento não é produzido pelos seres humanos com o auxílio das máquinas, e sim por um coletivo pensante composto por os diversos atores humanos e não humanos presentes no contexto. Vemos aqui a formação de um coletivo pensante de seres-humanos-com-mídias produzindo conhecimento sobre equações diferenciais.

As explorações realizadas, as conjecturas colocadas e testadas pelos alunos, só se tornaram possíveis devido à realização de simulações e do *feedback* rápido oferecido pelo computador. Com esses processos, a interação com o modelo matemático foi mais direta que aquela possibilitada com apenas lápis e papel. Aqui percebemos que as tecnologias utilizadas moldaram a forma de realização da atividade, mas também foi possível observar que os alunos moldam a tecnologia utilizada, uma vez que as planilhas eletrônicas, por exemplo, não foram pensadas para explorar comportamentos de soluções de equações diferenciais, mas foram utilizadas para tal nessa atividade. Isso nos leva a visualizar a moldagem recíproca entre os seres humanos e as mídias envolvidas no processo, o que reforça a concepção de integração levando à constituição de uma unidade, o coletivo de seres-humanos-com-mídias produzindo conhecimento.

4.2. Discussão online de textos de Modelagem Matemática e EDO

Em outra atividade foi discutido o texto “New directions in differential equations: A framework for interpreting students’ understandings and difficulties.” (Rasmussen, 2001), utilizando sistemas de gestão de cursos online e ferramentas de videoconferência. Fóruns de discussão foram utilizados pelos alunos para postagem de comentários e questões sobre o texto, possibilitando que a atividade se estendesse além do encontro síncrono. Uma extensão que permite reflexões com mais tempo para serem realizadas, uma vez que não se prendem apenas ao horário de realização de uma aula.

Kenski (2007) afirma que com suporte online ou não, a natureza do ensino é semipresencial, uma vez que no modelo educacional dito presencial, os alunos são incentivados, ou mesmo cobrados, a realizar atividades fora do horário das aulas. Listas de exercícios, trabalhos em grupos, elaboração de seminários e escrita de resenhas são algumas dessas atividades não presenciais, que se tornam transparentes devido a sua inserção na cultura escolar e acadêmica.

A autora afirma ainda que, estamos todos sendo impactados pela internet e seus desdobramentos, mesmo aqueles que não têm acesso a ela. Essa autora vê, em uma educação



híbrida com interações em um mesmo espaço físico e no ciberespaço, uma ampliação das possibilidades de aprendizagem e envolvimento de todos que participam do ato de ensinar. A utilização de Ambientes Virtuais de Aprendizagem nessa atividade da disciplina permitiu a expansão do tempo de reflexão para além da discussão do texto em um encontro síncrono, ampliando assim as possibilidades de aprendizagem não só do aluno com professor, mas com as discussões entre os colegas nos fóruns.

Para o referido encontro síncrono foi utilizada a webconferência na Sala de Aula Virtual⁴ para discussão do texto entre os 12 alunos e a professora, por meio de vídeo e áudio em tempo real. A possibilidade de escrita colaborativa em murais e realização de bate-papo por texto entre os participantes também foi explorada. A utilização dessas ferramentas de colaboração a distância permitiu que os alunos compartilhassem suas questões e dúvidas sobre o texto com os colegas e professora, em tempo real, mesmo que muitos estivessem a quilômetros de distância uns dos outros.

4.3. Investigações do Modelo de Contágio da Malária

Durante o curso foi realizada uma atividade investigativa a distância com objetivo de explorar o Modelo de Ross-MacDonald para o contágio da malária. Nessa proposta, o sistema de gestão de cursos Moodle foi destinado à postagem dos arquivos como textos, vídeos e apresentações, necessários para realização das tarefas. Isso possibilitou à professora concentrar o material a ser utilizado pela disciplina em um só espaço, facilitando sua distribuição aos alunos.

Foram disponibilizados dois vídeos a fim de introduzir o problema da malária. Um deles sobre o problema da malária no Brasil⁵, e o outro vídeo sobre o ciclo de contágio e desenvolvimento da doença, tanto no corpo humano quanto no hospedeiro⁶. Uma vídeo-aula sobre Modelo de Ross-MacDonald foi produzida em colaboração com uma doutoranda do Programa de Pós-Graduação, terceira autora desse trabalho, de forma a preparar os alunos para a atividade de exploração do modelo. Essa vídeo-aula⁷ foi publicada na internet, via Youtube, e nela são apresentados um histórico do modelo matemático, suas condições e

⁴ <http://salavirtual.ead.unesp.br/modelagem1/>

⁵ http://www.youtube.com/watch?v=WZc-IX0r_rw&feature=youtu.be&t=2m28s

⁶ <http://www.youtube.com/watch?v=N6DVuJQRK3I&feature=youtu.be&t=1m38s>

⁷ <http://www.youtube.com/watch?v=LGKtxd5I1po&feature=youtu.be>



Para a exploração do modelo de Ross-MacDonald foi utilizado o software Modellus, em conjunto com um roteiro de atividade elaborado previamente com objetivo de proporcionar aos alunos o contato com o modelo e compreensão do significado dos seus parâmetros. Os alunos puderam explorar a variação dos parâmetros e construir soluções numéricas por meio de planilhas eletrônicas e soluções gráficas por meio de plotagem discreta de pontos encontrados a partir dos cálculos numéricos realizados pelo software.

Como um dos objetivos da atividade era a investigação de soluções para um sistema de equações diferenciais cuja obtenção da solução algébrica seria muito difícil, ou talvez impossível, a construção dos gráficos das curvas soluções possibilitou a elaboração de conjecturas e análise de informações acerca do modelo estudado, obtendo conclusões sobre o significado e importância das relações de dependência dos parâmetros do modelo matemático.

Nessa atividade, mais uma vez podemos ver a importância da exploração no processo de investigação matemática feita pelos alunos em grupo. O software Modellus se mostra como um integrante importante durante a atividade, possibilitando a simulação e verificação de conjecturas por meio da variação de parâmetros no modelo. Observamos nessa atividade momentos em que o coletivo pensante seres-humanos-com-modellus se mostra como aquele que produz o conhecimento sobre o modelo em questão. A representação gráfica e interativa tem o foco, uma vez que consegue mostrar em tempo real o que acontece em diversas situações pensadas pelos alunos para a relação entre humanos e mosquitos.

Não somente o software de modelagem, mas também a mídia webconferência tem um papel importante nessa atividade. Nela, o compartilhamento da tela da professora com todos os alunos ganha destaque uma vez que o controle do cursor pôde ser passado para os alunos, tornando possível a esses mostrarem aos demais as suas conjecturas e experimentações para compreender o comportamento do modelo. Com isso foi possível compartilhar as descobertas individuais, receber opiniões dos colegas e professora para encaminhamentos, e mesmo deixar com que outra pessoa continuasse as explorações iniciadas por um dos participantes, tornando ainda mais coletivo o conhecimento produzido.

Dessa forma, a interação entre os alunos e com o professor aconteceu em vários sentidos e não somente do professor para o aluno. Distanciamos-nos assim da abordagem *broadcast* (Valente, 2010) e nos aproximamos do que Zullato (2007) chama de *estar-junto-virtual-com-mídias*, em uma concatenação do conceito “*estar-junto-virtual*” de Valente e o construto “*seres-humanos-com-mídias*” de Borba e Villarreal (2005). Julgamos esse novo



termo mais apropriado para o que foi visto durante essa atividade, pois não só a coletividade entre humanos aparece quando vemos o compartilhamento das descobertas dos alunos, mas observamos que essas descobertas não foram produzidas pelo aluno individualmente, mas pelo coletivo pensante que ele forma com a mídia utilizada, nesse caso o software Modellus, e com os demais colegas.

5. RESULTADOS OBTIDOS

A disciplina fez uso intensivo de tecnologias digitais por meio de vídeos, softwares geométricos e algébricos, ambiente virtual de aprendizagem Moodle e Sala Virtual. Essas tecnologias serviram como apoio para uma prática de ensino presencial. O uso desses recursos foi inovador para aquele ambiente de aprendizagem, propiciando à professora pesquisadora e aos alunos, o uso efetivo dos recursos para a exploração de modelos matemáticos, bem como para refletir acerca das potencialidades e limitações do uso dessas ferramentas da modalidade a distância na prática da sala de aula de Matemática. A possibilidade de combinação de diversas tecnologias nas atividades realizadas foi tida como um sucesso, uma vez a interação entre os alunos e a professora aconteceram de forma ampla.

Cada um dos episódios aqui apresentados traz uma característica específica, sejam as tecnologias utilizadas ou as formas de interação entre os alunos e professora, possibilitadas por elas. De forma geral, podemos observar o conhecimento acerca de Modelos Matemáticos e Equações Diferenciais Ordinárias sendo produzidos por um coletivo pensante de seres-humanos-com-mídias. Além disso, os processos de comunicação utilizados, como a webconferência, possibilitaram uma interação que se aproxima do *estar-junto-virtual-com-mídias* em diversos momentos, onde os alunos, professores e software trabalham juntos e se comunicam durante a atividade.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dessa análise, podemos afirmar que existe a possibilidade de realização de atividades de ensino de Equações Diferenciais Ordinárias e Modelagem Matemática na modalidade a distância. Entretanto, chamamos a atenção para as condições tecnológicas e humanas envolvidas no processo. Softwares que permitem a exploração de modelos matemáticos e sistemas que possibilitem o diálogo entre os participantes, seja por áudio,



vídeo ou texto, são imprescindíveis numa abordagem de experimentação e investigação como essa.

O número reduzido de alunos e a participação alunos bolsistas para apoio tanto com relação às questões pertinentes as mídias tecnológicas utilizadas, quanto às questões específicas de elaboração e desenvolvimento das atividades condicionaram a realização dessas atividades.

Contudo, julgamos que a abordagem aberta, com exploração, investigação, conjecturas e busca de justificativas é uma característica muito importante para atividades desse tipo, utilizando tecnologias digitais. A transição para um novo ambiente, diferente da sala de aula tradicional, exige um repensar das concepções pedagógicas, que devem levar em consideração a participação ativa dos alunos no processo de produção do conhecimento. Além disso, o tipo de abordagem das EDO, por meio da análise qualitativa de modelos matemáticos, se mostrou adequada ao uso das tecnologias disponíveis, uma vez que a visualização e simulação são de vital importância nessa abordagem.

Consideramos que a pesquisa aqui apresentada traz contribuições para a área de ensino de equações diferenciais, assim como para reflexões sobre o uso de tecnologias em ambientes de educação a distância. Futuras pesquisas com maior integração de tecnologias digitais nos processos educativos se mostram como próximos passos a serem trilhados. Dificuldades como a transposição da escrita matemática típica do lápis-e-papel, mídia com qual o conhecimento estabelecido se desenvolveu e estamos habituados a pensar-com, se apresentam como novos desafios para essa área.

Agradecimentos

Agradecemos ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” e à FUNDUNESP pelo apoio concedido para a participação desse evento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUDINO, D. F.; NASCIMENTO, R. S.; Objetos de Aprendizagem – diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. Revista Contemporânea de Educação, 128 – 148 vol. 5, n. 10, jul/dez 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mônica. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. Nova York: Springer, 2005.

BRASIL. Censo da Educação Superior, INEP/MEC, 2010.



JAVARONI, S. L. Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

JAVARONI, S.L. *O processo de visualização no curso de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. In Revista de Educação em Engenharia da Associação Brasileira de Ensino de Engenharia – ABENGE, 28, 2009.

KENSKI, Vani Moreira. *Educação e Tecnologias: o novo ritmo da informação*. Campinas: Papirus, 2007.

RASMUSSEN, C. *New Directions in Differential Equations: a framework for interpreting students' understandings and difficulties*. In Journal of Mathematical Behavior, 20, 2001, p.55-87.

SOMMER, Luís Henrique. Formação inicial de professores a distância: questões para debate. *Em Aberto*, Brasília, v. 23, n. 84, p.17-30, nov. 2010.

SANCHES, F. *Anuário Brasileiro Estatístico de Educação Aberta e a Distância*, 2007. Coordenação: Fábio Sanchez. -- 3. ed. -- São Paulo: Instituto Monitor, 2007.

VALENTE, José Armando. O papel da interação e as diferentes abordagens pedagógicas de Educação a Distância. In: MILL, Daniel; PIMENTEL, Nara Maria. *Educação a Distância: desafios contemporâneos*. São Carlos: Edufscar, 2010. Cap. 2, p. 25-42.

ZULATTO, R. B. A. *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

TEACHING DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL MODELLING: A SEMI-PRESENCE APPROACH WITH DIGITAL TECHNOLOGIES

Abstract: *In this paper we develop a reflection about how digital technologies can propitiate the study of Mathematical Modelling and Differential Equations. In order to fulfill our aim, we analyzed three activities that intensively used digital technologies to its development. The first one refers to the study of a ODE's solutions through graphical and numerical approaches; the second one refers to the reading and discussing of a paper related with Mathematical Modelling and ODE; and the third one refers to the analysis of the behavior of*



the solutions of a mathematical model describing the transmission of malaria in a determined region, with a focus on the influence of parameters in this behavior. From the analysis of these activities it was possible to identify different possibilities provided by digital technologies, possibilities which shaped the thinking and actions of the students during the study of these models and equations. Furthermore, it was possible to obtain indications that the forms of communication and interaction developed in the activities which were performed online are close to the idea of virtually-being-together-with-media, illustrating the possibility of developing distance classes about modelling and ODE involving a collective and interactive process of knowledge production.

Key-words: *Online mathematics education, Information and Communication Technologies, Mathematical modelling, Ordinary differential equations*