COBENGE 2014
ENGENHARIA: Múltiplos saberes e atuações
16 a 19 de setembro | Juiz de Fora - MG

O CONCEITO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO: UMA CONSTRUÇÃO ALTERNATIVA AO CONCEITO DE LIMITES

Jairo Rocha de Faria – jairo@ci.ufpb.br
Departamento de Computação Científica, Universidade Federal da Paraíba
Cidade Universitária
CEP: 58051-900. - João Pessoa - PB.

Emerson Souza Freire – emerson.freire@bol.com.br
Escola de Engenharia Industrial Metalúrgica de Volta Redonda
Av. dos Trabalhadores 420 - Vila Sta. Cecília
27255-125 Volta Redonda

Resumo: *Este artigo propõe uma construção alternativa para o conceito de derivada de uma função, um dos conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial, aproximando-se do Method of Fluxions de Newton, apresentado no século XVIII através de forte apelo intuitivo. Como consequência desta abordagem, evita-se a construção demasiadamente técnica do conceito de derivada através de um limite indeterminado, como se observa em grande parte dos livros didáticos adotados no Brasil. De fato, a percepção de que a abstração e o formalismo inerentes ao conceito de limite constituem dificuldades adicionais para os alunos que iniciam o estudo do Cálculo através da definição clássica, foi a principal motivação para este trabalho. Amparados ainda pelo desenvolvimento histórico do conceito de derivada, que precedeu os conceitos de limite e função, acreditamos que a abordagem proposta constitua uma alternativa bastante natural tanto para a significação do conceito de derivada, quanto para o desenvolvimento de alguns aspectos técnicos do conteúdo programático de Cálculo, como calcular derivadas e obter as regras de derivação, por exemplo. O principal objetivo deste trabalho é, portanto, fornecer fundamentos que corroborem com esta afirmação.*

Palavras-chave: *Cálculo Diferencial. Derivada. Educação Matemática. Limite.*

1. INTRODUÇÃO

Uma das grandes dificuldades enfrentadas pelos alunos em seu primeiro curso de Cálculo Diferencial é a abstrata definição de limite de uma função (CORNU, 1991). Além do mais, verifica-se um altíssimo nível de reprovação nas disciplinas de Cálculo, que frequentemente são responsabilizadas pelas taxas de evasão e retenção também bastante altas em diversos cursos do ensino superior, sobretudo no Brasil (VILLARREAL, 1999). Do ponto de vista histórico, podemos observar que estes dois conceitos: “limite” e “função” foram sendo construídos e aprimorados desde a Idade Antiga até o início da Idade Contemporânea (BOYER, 1991; ROQUE, 2012). Em particular, embora seja uma interpretação *a posteriori*, a noção de infinitésimo já pode ser identificada nos paradoxos de Zenão de Elea (495 - 430 A.C.). A formalização do conceito de limite estendeu-se, portanto, por um longo processo até o século XIX, devendo-se destacar as contribuições de Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857) e Weierstrass (1815-1897) (BARON, 2004; CARVALHO & D'OTTAVIANO, 2012), devendo-se a este último a definição precisa de limite como conhecemos hoje, em termos de ε e σ, dada em 1874 (HAIRER & WANNER, 1996). Analogamente, a definição de função atualmente aceita só foi concebida em 1837 por Dirichlet, consolidando os trabalhos de Fourier em fins do século XVIII (ÁVILA, 2002). Afere-se daí que as contribuições de Galileu (1564-1642), Kepler (1571-1630), Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716) perpassaram as dificuldades técnicas e teóricas do rigor matemático[1] atrelados aos dois conceitos supracitados.

Nesta discussão, merece lugar de destaque os legados de Newton e Leibniz que são reconhecidos por suas contribuições, desenvolvidas de forma totalmente independente, ao Cálculo (HALL, 2002; MELI, 1996). Convém sublinhar ainda o não menos importante legado matemático de Cauchy, que além de transformar o Cálculo Diferencial e Integral de variáveis de seus antecessores no Cálculo Diferencial e Integral de funções (KLEINER, 1989), com sua preocupação didática revolucionou o modo e a ordem de apresentação dos conceitos, contribuindo para a própria transformação dos conceitos fundamentais do Cálculo (GRABINER, 1981), o que causou forte influência no ensino das disciplinas de Cálculo e Análise até a atualidade.

Esta forte sistematização encontrada no trabalho de Cauchy (CAUCHY, 1821), remete a “Os Elementos de Euclides”, obra lançada por volta de 300 A.C., também com uma preocupação didática que levou a um encadeamento das proposições que, segundo Roque:

“A tese mais reveladora a respeito do encadeamento das proposições nos Elementos, partindo dos primeiros princípios, é a de que os resultados foram enunciados de trás para frente.” (ROQUE, 2012).

Embora esta sistematização seja fundamental para ciência, ela é, em geral, levada de forma equivocada para os livros didáticos e para a sala de aula com consequências muito negativas para o ensino, onde os conteúdos são apresentados como um “saber pronto” e de forma completamente descontextualizada, estando somente ao alcance de alguns poucos “gênios”. Nas palavras de Grabiner, acerca do trabalho de Cauchy:

> Ele sintetizou os trabalhos anteriores e construiu tão bem uma firme fundamentação que obscureceu as tentativas que o precederam. Assim como os Elementos de Euclides foram tão bem sucedidos que conduziram os trabalhos anteriores para o esquecimento, assim como o Cálculo de Newton-

[1] Cumpre ressaltar que, embora o rigor matemático seja um conceito histórico e, portanto, em evolução e que as justificativas tanto de Newton quanto de Leibniz sofreram severas críticas, é possível abordar os conceitos de derivada e integral e suas aplicações, sobretudo em cursos introdutórios, sem o excessivo formalismo dos dias atuais.

> Leibniz tornou desnecessária a leitura dos trabalhos prévios sobre áreas e tangentes, do mesmo modo o *Cauchy's Cours d'analyse and Calcul infinitesimal* tornou obsoletos muitos dos tratados anteriores sobre limites, convergência, continuidade, derivadas e integrais. (GRABINER, 1981, p.15, tradução nossa).

Em particular, fica evidenciada por grande parte dos livros de Cálculo nacionais e internacionais[2] uma forte instrumentalização do ensino. De fato, é comum verificar uma revisão do conceito de função e das funções elementares, seguida pela introdução do conceito de limite até sua definição formal, para em seguida se introduzir o conceito de derivada de uma função e suas aplicações mais comuns. Finalmente, os capítulos finais dedicam-se à introdução dos conceitos de primitiva de uma função e de integral definida, coroando-se o curso com o Teorema Fundamental do Cálculo que estabelece a relação formal entre os dois principais conceitos introduzidos: derivada e integral. Embora esta apresentação seja bastante apreciada do ponto de vista estético, deve-se salientar que ela caminha na contramão do desenvolvimento histórico que costuma apontar para o caminho natural da construção dos conceitos científicos. Justifica-se esta abordagem pela necessidade da compreensão do conceito de limite para a subsequente introdução do conceito de derivada em um ponto, dada, classicamente, pelo limite do quociente de Newton e reforçada com a importante interpretação geométrica do coeficiente angular da reta tangente à função no ponto em análise.

A proposta deste trabalho é introduzir o conceito de derivada de uma função através da sua definição alternativa, utilizando-se o conceito de *função de decaimento mais rápido a zero* (GRIFFEL, 2002), que embora também seja um conceito também associado ao limite de uma função, conduz a uma metodologia mais intuitiva, tanto para a obtenção das regras de derivação, quanto para a sistematização do cálculo de derivadas das funções elementares. Cumpre ressaltar que a metodologia ora proposta apresenta semelhanças com o *Method of Fluxions* (Método dos Fluxões)[3] desenvolvido por Newton na obtenção das derivadas, podendo ser vista como uma justificativa deste método, através da definição de função de decaimento mais rápido a zero, e sua extensão para a obtenção de técnicas mais gerais de derivação.

Para dar prosseguimento ao debate, vamos inicialmente discutir a definição de limite de uma função. Em seguida iremos fazer uma breve análise comparativa entre a definição clássica e a definição alternativa de derivada. Posteriormente, com o objetivo de comparar a complexidade entre as duas abordagens, serão deduzidas alguns resultados através da definição alternativa. Finalmente, serão apresentadas algumas conclusões e indicados alguns estudos a serem realizados.

---

[2] Aqui cabe ressaltar que embora o importante movimento de reforma do ensino do Cálculo nos Estados Unidos, iniciado em meados dos anos 1980, apresente várias propostas concretas para a problemática em questão, este movimento não teve influência significativa para o ensino no Brasil (ÁVILA, 2002).

[3] Newton justificava seu método de forma mais intuitiva, utilizando a noção de movimento e de incrementos infinitamente pequenos que podiam ser desprezados quando apresentavam potências maiores ou iguais a dois (HALL, 2002).

2. A DEFINIÇÃO DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO

No século XVIII, Newton e Leibniz introduziram quase que ao mesmo tempo e de maneira independente o conceito de derivada, sendo o conceito de limite como conhecemos hoje formulado apenas no século seguinte por Cauchy. Neste trabalho será utilizada a notação $f'(x_0)$, introduzida por Lagrange (1736-1813), para a definição clássica de derivada e a notação $\dot{f}(x_0)$ será reservada para a definição alternativa a fim de se distinguir as duas abordagens. Deve-se mencionar aqui que as denominações clássica e alternativa são adotadas neste texto apenas com a finalidade de distinguir as duas definições. Reconhecemos como clássica a definição usualmente adotada nos dias atuais, ainda que uma definição análoga à definição denominada de alternativa no presente trabalho tenha sido utilizada nos séculos XVII e XVIII, como será esclarecido no texto.

Como já mencionado, a maneira como o Cálculo Diferencial e Integral se apresenta na grande maioria dos livros didáticos da atualidade é devido em grande parte ao matemático Cauchy. Em seu Cálculo, os conceitos de função e limite eram fundamentais. Ele definiu a derivada como o limite de um quociente e apresentou uma definição satisfatória de função contínua que é análoga à utilizada nos dias de hoje. (BOYER, 1991). Também se deve a ele a definição formal de limite que é comumente apresentada nos cursos introdutórios de Cálculo.

No que segue iremos utilizar as definições apresentadas em “O Cálculo com Geometria Analítica” (LEITHOLD, L. 1994), livro que vem sendo amplamente adotado por décadas e, consequentemente, formando parte considerável das novas gerações de professores de Cálculo no Brasil.

Definição 1: Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a. O **limite de *f(x)* quando *x* tende a será *L***, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{1}$$

se a seguinte afirmação for verdadeira:
Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$, tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. (LEITHOLD, 1994).

A definição acima se encontra de maneira similar em boa parte dos mais tradicionais livros de Cálculo adotados no Brasil. No entanto, a grande maioria dos estudantes dificilmente consegue, num primeiro momento, determinar limites por meio dela. Além da dificuldade contida no próprio entendimento devido ao seu nível de abstração, tem-se a necessidade de manipular três parâmetros distintos, representados por ε, δ, e L.

3. AS DEFINIÇÕES CLÁSSICA E ALTERNATIVA DE DERIVADA

3.1. A definição clássica de derivada

Definição 2: A **derivada** de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

se esse limite existir (LEITHOLD, 1994).

Observação 1: Tanto na definição de limite (Eq. 2), quanto na definição de derivada (Eq. 3), apresentadas no citado livro texto, a exigência de que o ponto considerado seja um ponto de acumulação do domínio da função não está explícita, já que seria um novo conceito a ser introduzido aos aprendentes. Em geral, estes conceitos são abordados *a posteriori* em um curso mais avançado, como o de Análise Real, por exemplo. Na definição de derivada, no entanto, está implícito que o ponto considerado deve pertencer ao domínio da função como pode ser observado na Eq. 2.

3.2. A definição alternativa de derivada

A seguir será introduzida a definição alternativa de derivada que pode ser estendida para a derivada Gâteaux de funções vetoriais e tensoriais (GRIFFEL, 2002). Inicialmente deve ser construído o conceito de uma função $f(g(x))$ que *vai a zero mais rápido do que* $g(x)$, dado pela definição abaixo, onde admite-se que $f(g(x))$ pode ser definida.

Definição 3: Seja Ω um intervalo aberto da reta real $\Re$ e $f : \Omega \subset \Re \to \Re$. Uma função ***f*** **vai a zero mais rápido do que *g(x)*** se

$$\lim_{g(x) \to 0} \frac{f(g(x))}{g(x)} = 0, \tag{3}$$

que será denotada por $f(g(x)) = o(g(x))$. (GRIFFEL, 2002).

Embora este conceito seja formalizado utilizando-se o conceito de limite, ele pode ser construído a partir da exploração de exemplos bastante ilustrativos, como abaixo:

Exemplo 1) As funções $f_1(h) = h^2$ e $f_2(h) = h^3$ *vão a zero mais rápido do que* a função $g(h) = h$. Uma tabela, neste caso, pode ser bastante elucidativa:

Tabela 1: exemplo comparativo de funções

h	$f_1(h) = h^2$	$f_2(h) = h^3$
± 0.90	0.8100	± 0.729000
± 0.50	0.2500	± 0.125000
± 0.10	0.0100	± 0.001000
± 0.09	0.0081	± 0.000729
± 0.05	0.0025	± 0.000125
± 0.01	0.0001	± 0.000001

resultado que pode ser extrapolado para funções $f_3(h) = h^{1+\delta}$, com $\delta > 0$. Deve-se observar que os quocientes $\frac{|f_2(h)|}{|f_1(h)|} = \frac{|f_1(h)|}{|g(h)|} = |h|$ e $\frac{|f_2(h)|}{|g(h)|} = |h|^2$ tendem a zero quando h tende a zero e, portanto, $f_2(h) = o(f_1(h))$, $f_1(h) = o(g(h))$ e $f_2(h) = o(g(h))$.

Após a apropriação deste conceito pelos aprendentes, podemos introduzir o conceito de derivada via a definição alternativa:

Definição 4: (alternativa) Sejam $x_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \subset \Re \to \Re$. $\dot{f}(x_0)$ é a derivada de $f(x)$ em x_0, se a seguinte expansão pode ser escrita

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\dot{f}(x_0) + o(h), \tag{3}$$

para h suficientemente pequeno. Neste caso, diz-se que $f(x)$ é diferenciável no ponto x_0.

A noção *suficientemente pequeno*, inerente ao Cálculo Diferencial desde seus primórdios e por tantas vezes controversa na história da matemática, deve ser introduzida a partir de exemplos elucidativos. A interpretação geométrica fornece alguns elementos que tem apelo a esta definição, como ilustrado na seção abaixo.

3.3 Interpretações da derivada via definição alternativa

Vamos admitir que $f(x)$ seja derivável no ponto x_0 e vamos analisar o comportamento da expansão dada pela Eq. 2 em um intervalo (suficientemente pequeno) $I = (x_0 - h, x_0 + h)$. A interpretação que decorre imediatamente da definição alternativa é considerar que $f(x_0 + h)$ pode ser aproximado por $f(x_0) + h\dot{f}(x_0)$ para qualquer ponto em *I*. Consideremos um simples exemplo numérico para auxiliar esta interpretação:

Exemplo 2: Seja $f(x) = x^2$. Temos que $f(x+h) = (x+h)^2$. Assim, $f(x+h) = x^2 + h2x + h^2$, donde $\dot{f}(x) = 2x$ e $o(h) = h^2$.

Tomando-se $x_0 = 1$, temos $f(x_0) = 1$, $\dot{f}(x) = 2$ e o seguinte resultado, para alguns valores de h:

Tabela 2. Valores exatos e aproximados de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 2$ para vários valores de *h*.

h	**valor exato** $f(x_0 + h)$	**valor aproximado** $\approx f(x_0) + h\dot{f}(x_0)$
0.3	$1.3^2 = 1.69$,	$1.0 + 0.3 * 2 = 1.60$,

-0.3	$0.7^2 = 0.49,$	$1.0 - 0.3 * 2 = 0.40,$
0.2	$1.2^2 = 1.44,$	$1.0 + 0.2 * 2 = 1.40,$
-0.2	$0.8^2 = 0.64,$	$1.0 - 0.2 * 2 = 0.60,$
0.1	$1.1^2 = 1.21,$	$1.0 + 0.1 * 2 = 1.20,$
-0.1	$0.9^2 = 0.81,$	$1.0 - 0.1 * 2 = 0.80,$
0.05	$1.05^2 = 1.1025,$	$1.0 + 0.05 * 2 = 1.10,$
-0.05	$0.95^2 = 0.9025,$	$1.0 - 0.05 * 2 = 0.90,$
0.01	$1.01^2 = 1.0201,$	$1.0 + 0.01 * 2 = 1.02,$
-0.01	$0.99^2 = 0.9801,$	$1.0 - 0.01 * 2 = 0.98,$

No gráfico abaixo, podemos observar que os pontos obtidos da aproximação têm como reta suporte a reta tangente ao gráfico de $f(x_0)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Mais ainda, observa-se que o coeficiente angular desta reta tangente é dado por $\dot{f}(x_0)$.

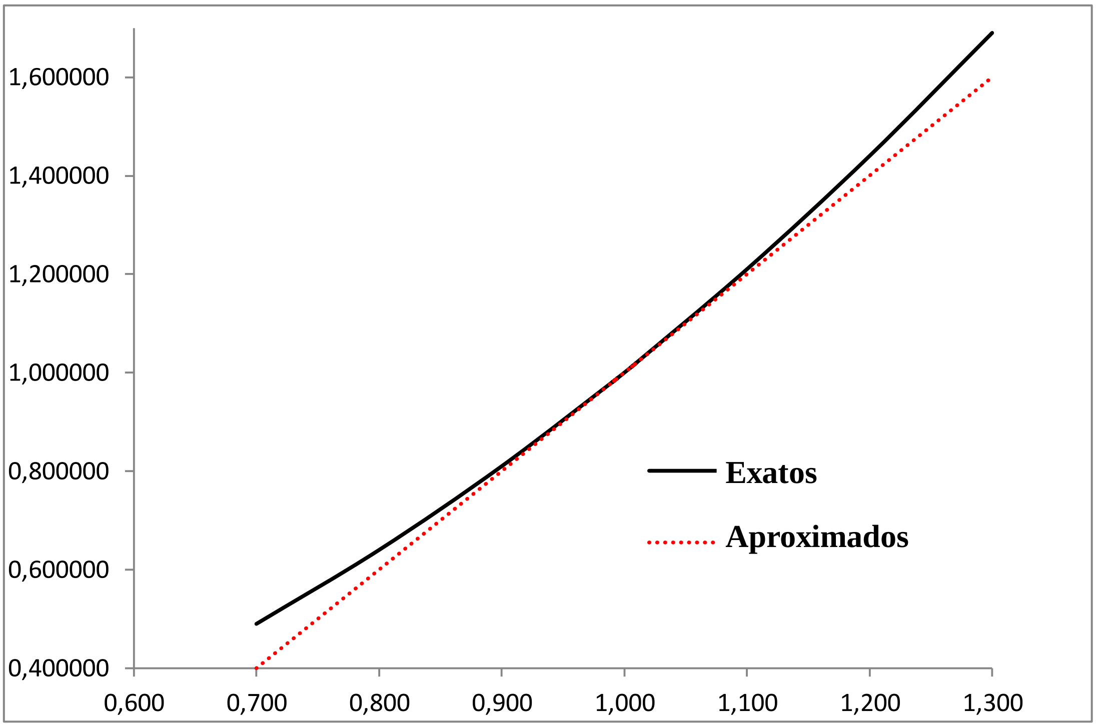

Gráfico 1. Gráfico de $f(x)=x^2$ e valores aproximados por $f(x_0+h)\approx f(x_0)+h\dot{f}(x_0)$ em $x_0=2$, para vários valores de h.

Deve ficar claro para o aluno que o termo $o(h)$ pode ser desconsiderado, já que mesmo continua pequeno mesmo quando dividido pelo termo pequeno h. No exemplo acima, deve ser ressaltado o valor do erro $o(h)$ em cada aproximação apresentada na Tabela 2.

Observação 2: da aproximação $f(x_0+h)\approx f(x_0)+h\dot{f}(x_0)$ convém ainda observar que ao se fixar $h>0$ o sinal da derivada determina se a função é crescente $(\dot{f}(x_0)>0)$ ou decrescente $(\dot{f}(x_0)<0)$, donde se pode deduzir a condição necessária de ponto crítico.

Observação 3: deve-se destacar que a definição assintótica equivale a introduzir o conceito de derivada através da Série de Taylor e que nesta abordagem, as derivadas de ordem superiores são extensões naturais do conceito de derivada, para as funções suficientemente regulares, como é o caso, por exemplo, das funções elementares, tão empregadas nos cursos de Cálculo Diferencial.

Observação 4: Lagrange (LAGRANGE, 1797) afirmava que toda função poderia ser expandida em uma série de potências como

$$f(x+h)=f(x)+hp(x)+h^2q(x)+h^3r(x)+\dots\ , \tag{4}$$

exceto talvez em alguns valores isolados de *x*. Sendo a derivada definida pelo termo *p(x)*.

Com a noção atual do conceito de funções, sabe-se hoje que esta definição é válida apenas para uma certa classe de funções. No entanto, além da semelhança com a definição assintótica, pode-se perceber no título da obra (*Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantities finies*), a motivação para livrar-se de justificativas para o conceito de derivada baseado nos conceitos de infinitamente pequenos, evanescentes, limites e fluxões, presentes na obra de Newton (ROQUE, 2012).

Lema 1: As definições clássica e assintótica são equivalentes.

Demonstração: dada a expansão $f(x_0+h)=f(x_0)+h\dot{f}(x_0)+o(h)$, podemos rearranjar os termos, tal que $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dot{f}(x_0)+\dfrac{o(h)}{h}$. Tomando-se o limite $h\to 0$, segue-se que $\dot{f}(x)=f'(x)$. Logo, a definição alternativa implica na definição clássica. Por outro lado, considerando-se a definição clássica, temos que

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, donde se segue que $f'(x)+\dfrac{o(h)}{h}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,

desde que *h* seja suficientemente pequeno. Multiplicando-se por *h*, e rearranjando os termos, tem-se que $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x)+o(h)$. E, portanto, $f'(x)=\dot{f}(x)$, ou seja, a definição clássica também implica na definição alternativa o que conclui a demonstração.

Uma função $f:\Omega\subset\Re\to\Re$ é dita diferenciável em Ω se as definições acima se aplicam para todo ponto $x\in\Omega$.

Abaixo, daremos alguns exemplos para ilustrar algumas propriedades da derivada obtidas da definição alternativa. Um excelente exercício é comparar estes mesmos resultados, obtidos através da definição clássica.

Exemplos:

3) A função $f(x)=x^n$, onde n é inteiro positivo, é diferenciável em toda a reta $\Re$.

Pela definição alternativa e utilizando-se o binômio de Newton, obtemos:

$$f(x_0+h) \;=\; (x_0+h)^n=\binom{n}{0}x_0^{\,n}+\binom{n}{1}hx_0^{\,n-1}+\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}h^j x_0^{\,n-j},$$

donde, $f(x_0+h)=(x_0+h)^n=f(x_0)+hnx_0^{\,n-1}+h^2\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}h^{j-2}x_0^{\,n-j}$, $\forall x_0\in\Omega$. Observamos que o último termo acima é $o(h)$, tem-se que $\dot{f}(x_0)=nx_0^{\,n-1}$, $\forall x_0\in\Omega$.

4) A função $f(x)=|x|$ não é diferenciável no ponto $x_0=0$.

Pela definição alternativa, segue-se que se $h > 0$, temos $f(0+h) = |0+h| = 0+h.$ Por outro lado, se $h < 0$, temos $f(0+h) = |0+h| = 0-h,$ logo, dependendo do lado pelo qual h se aproxima de zero, têm-se diferentes expansões e a derivada não existe na origem.

Sublinha-se ainda que a ideia de continuidade, intrinsecamente relacionada com o conceito de limite, deve ser abordada através de exemplos, até a construção da sua definição:

Definição: Uma função $f : \Omega \subset \Re \to \Re$ é dita contínua em $x_0 \in \Omega$ se $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$

Neste ponto, deve-se destacar que o exemplo 4) é um exemplo clássico de que continuidade não implica em diferenciabilidade. No entanto, a recíproca é verdadeira, como se observa do seguinte resultado:

Proposição: Uma função $f : \Omega \subset \Re \to \Re$ diferenciável em $x_0 \in \Omega$ é contínua em $x_0 \in \Omega.$

Demonstração: (definição alternativa) Se f é diferenciável em $x_0 \in \Omega,$ temos que $f(x_0 + h) = f(x_0) + h\dot{f}(x_0) + o(h).$ Logo,

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + \lim_{h \to 0}(h\dot{f}(x_0) + o(h)) = f(x_0).$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram confrontadas duas abordagens para a construção do conceito de derivada: a primeira, denominada de definição clássica, dada pelo limite do quociente de Newton é largamente encontrada nos textos didáticos de Cálculo e a segunda, denominada de definição alternativa, dada pelo segundo termo da expansão de uma função. Embora as duas definições sejam equivalentes, observa-se que a definição alternativa perpassa algumas dificuldades técnicas sobre o conceito e o cálculo de limites indeterminados, que devem ser enfrentadas quando se opta pela definição clássica de derivada. Estas dificuldades acerca do conceito de limites, em geral, constituem uma dificuldade adicional para a apropriação do conceito de derivada. Além do mais, as regras de derivação podem ser obtidas de maneira mais simples e direta através da definição alternativa. Como observado previamente, o conceito de derivada proposto por Newton e Leibniz no século XVIII antecipou-se aos conceitos atuais de limite e função, que foram formalizados apenas no século XIX, por Cauchy. Em geral, a História da Matemática aponta na direção da construção dos conceitos da forma mais natural e intuitiva. Assim, alterar a sequência histórica em benefício da estética da apresentação e do formalismo matemático é uma sistematização precoce, que além de colocar o estudante em uma atitude passiva em relação à aprendizagem, afasta-o das motivações iniciais. De fato, muitos conceitos do Cálculo advêm de problemas da Física e da Engenharia, que poderiam despertar um maior interesse do aluno, bem como enriquecer sua formação interdisciplinar.

Cabe ainda ressaltar que a definição alternativa herda de forma muito natural todas as consequências da série de Taylor e suas conveniências para o desenvolvimento de métodos numéricos, sendo, portanto, bastante adequada para o ensino moderno, já que com a popularização dos computadores nas últimas décadas, a Matemática Computacional é uma forte tendência para o ensino e para a pesquisa. A presente metodologia, portanto, tem forte potencial para ser utilizada tanto em cursos introdutórios como em cursos focados nas aplicações, tanto do ponto de vista da modelagem, quanto do ponto de vista dos métodos numéricos, sobretudo em cursos de engenharia.

Finalmente, como um trabalho futuro será feito um levantamento com estudantes e professores de cursos introdutórios de Cálculo, com a finalidade de analisar suas percepções sobre a complexidade de cada proposta do ensino da derivada.

5. REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo e da Análise. Revista Matemática Universitária, São Paulo, n.33, p. 83-95, dezembro de 2002.

BARON, M. E. **The origins of the infinitesimal calculus.** Mineola: Dover Publications, 2004.

BOURBAKI, N. **Élements d'histoire des mathématiques.** Paris, Hermann, 1960.

BOYER, C. **História da Matemática**. 2a edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

CARVALHO, T. F. & D'OTTAVIANO, I. M. L. **Calculus infinitesimalis: uma teoria entre a razão e o mito?** Ciênc. educ. (Bauru), Bauru, v. 18, n. 4, 2012.

CAUCHY, A.L. **Cours d'analyse algébrique**. Paris, De Bure, 1821; reimpressão Bologna, Clueb, 1992.

CORNU, B. Limits. In D. Tall (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking** (pp. 153–166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

EUCLIDES. **Os "Elementos" de Euclides.** São Paulo, Unesp, 2009.

GRABINER, J. V. **The origins of Cauchy's rigorous calculus.** Cambridge, Mass.: MIT, 1981.

GRIFFEL, D. H. **Applied Functional Analysis.** Dover. New York, 2002.

HAIRER, E. & WANNER, G. **Analysis by Its History**. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York 1996.

KLEINER, I. **Evolution of the Function Concept: A Brief Survey**. The College Mathematics Journal, v.20, n°4, 1989, p. 282-300. 1989.

LAGRANGE, J-L, **Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantities finies.** Paris: Impr. de la République, prairal an V [1797]. (Pre-1801 Imprint Collection (Library of Congress)). 1787.

LEITHOLD, L. O **Cálculo com Geometria Analítica.** 3rd. São Paulo:Ed.Harbra, V1, 1994.

MELI. D. B. **Equivalence and Priority**. Oxford University Press, 1996.

NEWTON, I. The **Method of Fluxions and Infinite Series: With Its Application to the Geometry of Curve-lines.** Henry Woodfall, 1736.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUPERT HALL, A. **Philosophers at War** 2002. London and New York: Cambridge University Press, 1980.

VILLARREAL, M. E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - IGCE, Rio Claro: UNESP, 1999.

Abstract: This work proposes an alternative construction for the concept of derivative of a function, the basic concepts of Differential Calculus, approaching the Method of Fluxions Newton, presented in the XVIII century through strong intuitive appeal. As a consequence of this approach, it avoids overly technical construction concept derived by an undetermined limit, as observed in most of the textbooks adopted in Brazil. Indeed, the perception that the abstraction and formalism inherent in the concept of limit are additional difficulties for students who begin the study of Calculus using the classical definition was the main motivation for this work. Still supported by the historical development of the concept of derivative, which preceded the concepts of limit and function, we believe that the proposed approach constitutes a very natural alternative to the significance of the concept of derivative, and for the development of some technical aspects of the Calculus, like how to obtain the derived rules, for example. The main objective of this work is, therefore, provide evidences corroborating this statement.

Keywords: Asymptotic Expansion. Derivatives. Differential Calculus. Limits. Mathematics Education.