OBJETO DE APRENDIZAGEM EM SISTEMAS LINEARES

Raul Matheus Martins – raulgildons@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Curso de Engenharia de Automação
Av. Sete de Setembro, 3165
80230-901 – Curitiba – Paraná

Paulo Roberto Brero de Campos – brero@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Departamento de Eletrônica
Av. Sete de Setembro, 3165
80230-901 – Curitiba – Paraná

Miguel Antonio Sovierzoski – miguelaso@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Departamento de Eletrônica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Biomédica - PPGEB
Av. Sete de Setembro, 3165
80230-901 – Curitiba – Paraná

Resumo: *A disciplina de Sistemas Lineares nos cursos de graduação em Engenharia posiciona-se entre as disciplinas da Matemática (Cálculo I a IV e Equações Diferenciais) e as disciplinas profissionalizantes de Controle. O objetivo da disciplina é apresentar os sistemas lineares e familiarizar o aluno com as ferramentas matemáticas pertinentes. O comportamento do sistema linear é representado através da equação diferencial linear de coeficientes constantes. A solução deste tipo de equação diferencial ordinária é necessária para o aluno entender o comportamento do sistema linear. O uso de um objeto de aprendizagem dedicado à solução da equação diferencial linear de coeficientes constantes vem a facilitar e agilizar o processo ensino-aprendizagem da disciplina. Os conhecimentos e as ferramentas matemáticas apresentadas na disciplina serão necessários nas disciplinas subsequentes da matriz curricular. Este trabalho apresenta os tópicos pertinentes ao sistema linear representado pela equação diferencial linear de coeficientes constantes, seguido pelo objeto de aprendizagem desenvolvido para auxiliar nas atividades didático-pedagógicas da disciplina.*

Palavras-chave: *Sistemas Lineares, Equação Diferencial Linear de Coeficientes Constantes, Objeto de Aprendizagem.*

1. INTRODUÇÃO

O entendimento de conceitos básicos de sistemas lineares é fundamental para um bom desempenho acadêmico na graduação em engenharia. Na disciplina de sistemas lineares observa-se a dificuldade dos alunos em trabalhar com desenvoltura os conceitos, a aplicação, os modelos matemáticos e a compreensão do que está ocorrendo. Este trabalho desenvolveu um objeto de aprendizagem para auxiliar especificamente na solução de equações diferencias lineares de coeficientes constantes, amplamente utilizada em sistemas lineares. Inicialmente são apresentados os conceitos e propriedades de sistemas lineares, seguido pelo modelo de equação diferencial linear e o procedimento clássico de solução. Uma situação didática real é apresentada através de um circuito RLC série. É detalhado o objeto de aprendizagem desenvolvido e são apresentadas situações exemplo, finalizando com comentários finais.

2. SISTEMA LINEAR

Os sistemas lineares invariantes no tempo são uma importante classe de sistemas, que embasam grande parte dos estudos de Engenharia.

Abordando a área elétrica, os estudos de sistemas lineares iniciam com as disciplinas de Física III, Circuitos Elétricos, Sinais e Sistemas de tempo contínuo e de tempo discreto e continuam com as disciplinas de Controle Contínuo e Controle Discreto.

2.1. Sistema Linear Invariante no Tempo

O diagrama do sistema linear invariante no tempo (*Linear Time Invariant System*) com uma entrada e uma saída (*single input – single output* – SISO) é apresentado pela figura 1.

Figura 1 – Diagrama de um sistema LIT SISO de tempo contínuo.

A importância do estudo de sistemas lineares invariantes no tempo é devido às suas propriedades de linearidade e invariância no tempo.

2.2. Propriedade de Linearidade

A propriedade de linearidade permite que diversas análises sejam superpostas, pois o princípio da superposição é válido para estes sistemas.

Na figura 2, se for aplicado um sinal $x1(t)$, o sistema responderá com um sinal $y1(t)$. Se este sinal for ponderado por um valor a, a resposta do sistema também será ponderada por este valor. Se for realizada uma combinação linear de sinais de entrada, a saída será a combinação linear dos correspondentes sinais de saída.

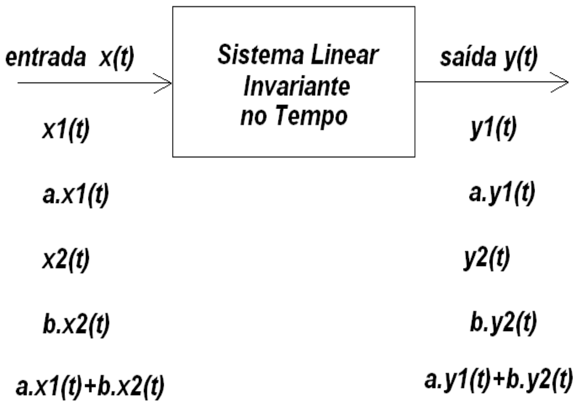

Figura 2 – Propriedade de Linearidade de um sistema LIT SISO de tempo contínuo.

2.3. Propriedade de Invariância no Tempo

A propriedade de invariância no tempo é detalhada pela figura 3. Se um sinal $x(t)$ for aplicado no sistema no instante de tempo $t1$, o sistema responderá neste instante $t1$ com a resposta $y(t1)$. Se este mesmo sinal for aplicado em outro instante de tempo, o sistema responderá da mesma forma no tempo correspondente.

A propriedade de invariância no tempo determina que o sistema sempre apresentará a mesma resposta para um determinado sinal de entrada, independente do tempo em que será aplicado o sinal na entrada do sistema.

Este comportamento invariante de resposta do sistema é uma propriedade importante, que junto com a a propriedade da linearidade caracterizam esta classe de sistemas..

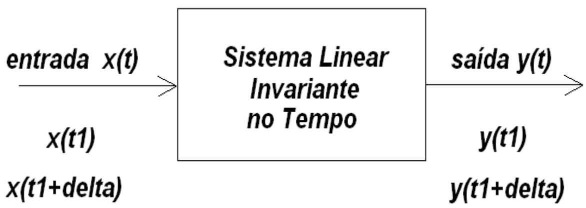

Figura 3 – Propriedade de Invariância no tempo de um sistema LIT SISO de tempo contínuo.

2.4. Representações no tempo de Sistemas LIT

Os sistemas LIT podem ser representados de quatro formas (Haykin e Veen, 2001). Cada forma de representação possui suas particularidades e facilidades.

As formas de representação de sistemas LIT são:

- resposta ao impulso;
- equações diferenciais;
- diagramas de blocos;
- espaço de estados.

Todas estas formas de representação de comportamento de sistemas estão diretamente ligadas à equação diferencial linear de coeficientes constantes, pois são formas diferentes de representar o mesmo sistema LIT.

Resposta ao Impulso

Ao aplicar um impulso unitário (delta de Dirac) como entrada do sistema LIT, este apresentará na saída o correspondente a esta entrada, sendo denominada de resposta do sistema ao impulso unitário.

O sinal impulso unitário não pode ser aplicado a equação diferencial do sistema pois o impulso unitário não é função matemática, é uma distribuição, e não pode ser derivada.

Equação Diferencial

A equação diferencial é a principal forma de representação do sistema linear invariante no tempo. Devido à propriedade de linearidade, a equação diferencial será do tipo linear, e devido à invariância no tempo, os coeficientes da equação diferencial serão constantes e reais.

O sistema LIT será representado através de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes e reais.

Diagrama de Blocos

O sistema LIT pode ser representado por diagrama de blocos.

Partindo da equação diferencial linear de coeficientes constantes, isola-se a variável de saída e representa-se uma combinação de sinais de entrada e uma combinação de sinais de saída. Prefere-se primeiro transformar a equação diferencial em equação integral e implementar o diagrama com blocos integradores, ao invés de blocos diferenciadores. Os blocos diferenciadores apresentam a característica de “amplificar” os ruídos. A implementação do sistema com blocos integradores é uma topologia que apresenta menos ruídos na saída.

A representação do diagrama de blocos como um bloco de combinações de entradas seguido por um bloco de combinações de saída é denominado de Forma Direta I.

Espaço de Estados

A representação do sistema LIT em espaço de estados consiste na transformação da equação diferencial linear de coeficientes constantes de ordem N em um sistema de equações com N equações diferenciais lineares de coeficientes constantes de ordem 1. Este sistema de equações com N equações diferenciais de ordem um é representado na forma matricial.

De forma geral, esta representação é utilizada em disciplinas avançadas de Controle, e além de representar sistemas SISO permite representar sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*multiple input – multiple output* – MIMO).

3. SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR DE COEFICIENTES CONSTANTES

A equação diferencial linear de coeficientes constantes, apresentada pela equação 1, é uma equação diferencial ordinária (EDO) tendo solução analítica pelo método clássico e pela transformada de Laplace (Zill e Cullen (2009), Simmons e Krantz (2008)). Este artigo está restrito a solução clássica da EDO.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} a_k . \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{1}$$

Onde $y(t)$ é a variável de saída do sistema, a variável $x(t)$ é a variável de entrada do sistema, os coeficientes a_k e b_k são coeficientes constantes e reais.

Como a equação diferencial é de um sistema que apresenta a propriedade de linearidade, esta equação também pode ser resolvida por superposição, facilitando o processo de resolução, e depois combinando-se os resultados. Desta forma, separa-se a equação diferencial em equação homogênea e equação não homogênea, resolve-se as equações em separado, e depois de resolvidas, adicionam-se as respostas.

3.1. Solução da Equação Homogênea

A equação homogênea é calculada para a entrada nula, contendo apenas termos no lado esquerdo da equação diferencial, conforme apresenta a equação 2.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k.\frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \tag{2}$$

No sistema LIT da figura 3, esta forma corresponde a resolver o sistema com as condições iniciais do sistema e com entrada nula. As condições iniciais representam a energia armazenada no sistema. A solução da equação não homogênea representa a forma como o sistema dissipa esta energia, sendo uma forma transitória assintótica a zero.

Equação Característica e Forma Característica de Resposta do Sistema LIT

Da equação homogênea representa-se a equação característica, sendo representada pela equação 3, de forma reduzida e de forma expandida.Observa-se que a equação característica é um polinômio de ordem N, possuindo N raízes. Para cada tipo de raiz o sistema responde de forma peculiar, como apresenta a tabela 1.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k.r^k = 0$$

$$a_N.r^N + a_{N-1}.r^{N-1} + \cdots + a_2.r^2 + a_1.r + a_0 = 0 \tag{3}$$

Tabela 1 – Comportamento característico de resposta do sistema em função das raízes da equação característica (autovalores do sistema).

Raízes da equação característica	Forma característica de resposta do sistema
Raízes reais distintas ($r1 \neq r2$)	$C_1 e^{r1t} + C_2 e^{r2t}$
Raízes reais múltiplas ($r1 = r2$)	$C_1(t^0)\, e^{r1t} + C_2(t^1)\, e^{r2t}$
Raízes complexas conjugadas ($r1,2 = a \pm jb$)	$e^{at}.(C_1.\cos(bt) + C_2.sen(bt))$

A componente real das raízes da equação característica deve ser negativa, para que as exponenciais sejam decrescentes, e o sistema seja estável.

Para raízes reais distintas a forma característica de resposta do sistema são exponenciais, para raízes reais múltiplas tem-se o termo t^n multiplicando as exponenciais, e para raízes complexas conjugadas a exponencial é oscilatória, ou a oscilação é amortecida.

A resposta característica do sistema é uma combinação dos comportamentos apresentados na tabela 1, de acordo com os tipos de raízes da equação característica (autovalores do sistema).

Qualquer comportamento transitório do sistema LIT é representado pela forma característica de resposta. A forma característica de resposta do sistema LIT será utilizada duas vezes durante a solução da equação diferencial: na solução da equação homogênea e na solução da equação não homogênea.

Resposta Natural do Sistema LIT

A resposta natural do sistema ($y_n(t)$) é a forma como o sistema LIT dissipa a energia armazenada. Desta forma, a resposta natural do sistema é a resposta característica do sistema resolvida para as condições iniciais de saída. E essa resposta natural, em sistemas estáveis, é uma resposta transitória assintótica a zero.

3.2. Solução da Equação Não Homogênea

A equação não homogênea é apresentada pela equação 4.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} a_k . \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{4}$$

A solução da equação não homogênea representa o comportamento do sistema LIT para um sinal de entrada, considerando-se o sistema sem energia (condições iniciais nulas). Desta forma, a solução representa uma resposta em regime permanente e uma resposta em regime transitório. Esta solução denomina-se resposta forçada.

Resposta Forçada

A resposta forçada é a resposta do sistema LIT para um sinal de entrada, considerando-se que o sistema não possui energia armazenada (condições iniciais de energia nulas). A resposta forçada possui duas componentes, a componente de regime permanente e a componente de regime transitório, como apresenta a equação 5.

$$y_f(t) = y_p(t) + y_t(t) \tag{5}$$

Resposta Particular ($y_p(t)$)

A componente de regime permanente do sistema LIT possui a mesma forma do sinal de entrada e das suas derivadas que se façam necessárias na solução. A tabela 2 apresenta os principais sinais utilizados na análise de sistemas LIT e a forma da resposta particular do sistema.

Os sinais mais utilizados como sinais de entrada de um sistema LIT são: o degrau unitário ($u(t)$), gerando a denominada resposta ao degrau unitário; a exponencial decrescente, e os sinais seno ou co-seno ou combinação deles.

O sinal degrau unitário possui a sua importância por permitir medir os tempos de resposta do sistema, e porque a resposta ao impulso pode ser obtida da derivada da resposta ao degrau.

Os sinais exponencial, seno, co-seno e as combinações entre eles são muito utilizados por pertencerem a classe C^{∞}.

Tabela 2 – Comportamento da resposta particular do sistema LIT em função do sinal de entrada.

Sinal de entrada	Comportamento particular de resposta do sistema.
$u(t)$	$k.u(t)$
$e^{at}.u(t)$	$k.\,e^{at}u(t)$
$\cos(t).u(t)$, ou $sen(t).u(t)$ ou $[A.\cos(t).+B.sen(t)]\,u(t)$	$[k1.\cos(t).+k2.sen(t)]\,u(t)$
$t^{n}.u(t), \quad n \geq 0$	$\left(\sum_{k=n}^{o} a_k \dfrac{d^k t^n}{dt^k}\right).u(t), \quad n \geq 0$

Resposta Transitória $\boldsymbol{(y_t(t))}$

A componente de regime transitório é o segundo uso da forma característica de resposta do sistema LIT. A componente transitória aparece como uma perturbação transitória no sistema devido a mudança do sinal de entrada. Qualquer alteração do comportamento do sinal de entrada gera esta componente transitória.

A resposta transitória é a segunda aparição da forma natural de resposta do sistema, resolvida as constantes para este contexto.

Após resolvida a resposta particular, inclui-se a forma natural de resposta do sistema na resposta forçada e resolve-se os coeficientes restantes, como apresentado pela equação 4.

3.3. Solução Completa da Equação Diferencial

A solução completa da equação diferencial do sistema LIT é a superposição da resposta da equação homogênea e da resposta da equação não homogênea, como representada pela figura 2. A equação 6 apresenta a resposta completa do sistema LIT.

$$y_c(t) = y_n(t) + y_f(t) \qquad (6)$$

4. EXEMPLO DE SISTEMA LINEAR INVARIANTE NO TEMPO

Esta seção exemplifica um sistema LIT a ser utilizado no objeto de aprendizagem de sistemas lineares.

A figura 4 apresenta um exemplo didático clássico de sistema linear representado por um circuito elétrico com componentes eletrônicos passivos (resistor, indutor e capacitor). (Dorf e Svoboda (2003), Haykin e Veen (2001), Dorf e Bishop (2012)).

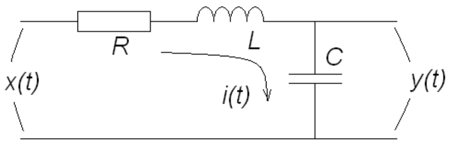

Figura 4 – Circuito elétrico passivo com resistor, indutor e capacitor para exemplificar um SLIT de tempo contínuo.

4.1. Determinando a Equação Diferencial Linear

A equação 7 representa a equação de tensão de malha em função da corrente $i(t)$ e a equação 8 representa a tensão de saída em função da corrente.

$$x(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + y(t) \tag{7}$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt \tag{8}$$

Realizando operações matemáticas entre as equações 7 e 8 obtém-se a equação diferencial do sistema apresentada pela equação 9. Observa-se que a equação é diferencial linear de coeficientes constantes. A equação diferencial envolve apenas as variáveis de entrada e de saída e as derivadas da variável de saída. Os coeficientes da equação diferencial são produtos dos valores dos componentes do sistema: resistor (*R* em Ohms), indutor (*L* em Henrys) e capacitor (*C* em Farads).

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \tag{9}$$

A equação diferencial deste sistema exemplo é de ordem 2 (N = 2).

Os componentes do sistema (*R*, *L* e *C*) possuem valores positivos não nulos, resultando em uma equação diferencial linear de coeficientes constantes reais e positivos.

4.2. Analisando a Forma Característica de Resposta do Sistema

Dependendo dos valores dos componentes do sistema determinam-se os tipos de raízes da equação característica. Analisando a equação 9 escreve-se a seguinte equação característica, representada pela equação 10.

$$LC.r^2 + RC.r + 1 = 0 \tag{10}$$

Analisando as raízes da equação 10:

Se $R^2C > 4L$ a equação característica terá raízes reais distintas ($r1 \neq r2$);
Se $R^2C = 4L$ a equação característica terá raízes reais iguais ($r1 = r2$);
Se $R^2C < 4L$ a equação característica terá raízes complexas conjugadas.

O tipo de raiz da equação característica determina a forma característica de resposta do sistema, de acordo com a tabela 1.

E seguem os passos para a solução completa da equação diferencial.

5. OBJETO DE APRENDIZAGEM

O requisito inicial para a elaboração do objeto de aprendizagem foi tornar o uso do objeto pelo aluno o mais intuito e iterativo possível, para que não sejam despendidos esforços no entendimento do funcionamento e na sua utilização.

Foi tomado o cuidado de apresentar o relatório com as etapas de resolução da equação diferencial linear o mais detalhado possível, para facilitar o entendimento dos resultados e a compreensão do comportamento do sistema linear para este contexto.

O objeto de aprendizagem para sistemas lineares foi desenvolvido para resolver a equação diferencial linear de coeficientes constantes, considerando as condições iniciais de energia do sistema e o sinal de entrada. A tela do objeto é apresentada pela figura 5.

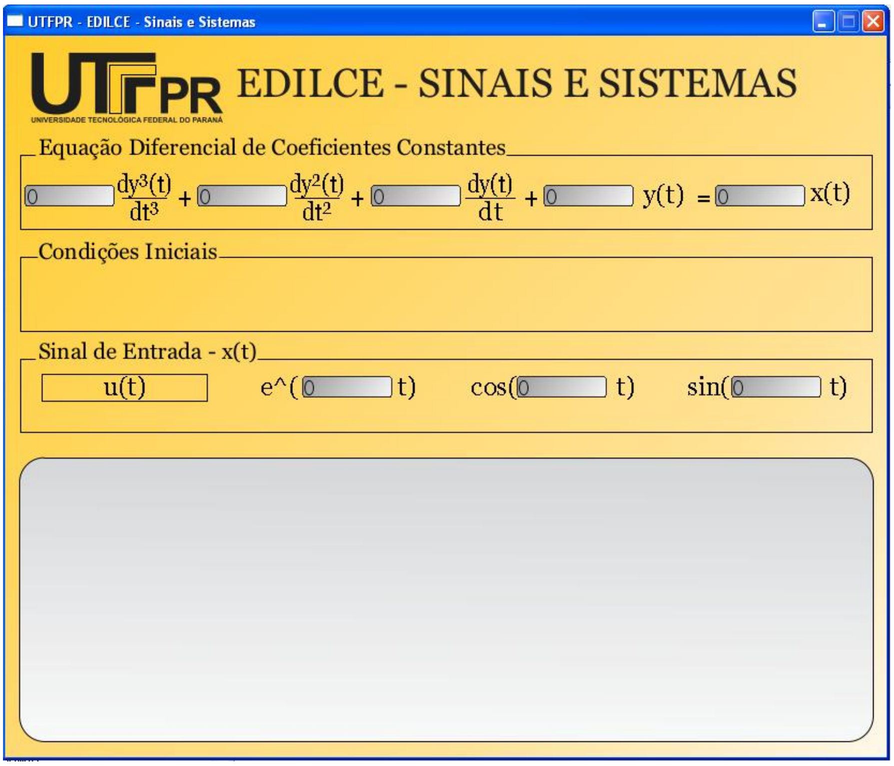

Figura 5 – Objeto de aprendizagem para sistemas lineares com a solução de equação diferencial linear de coeficientes constantes.

Em uma única tela, de forma intuitiva, o usuário vai entrando com os coeficientes da equação diferencial linear. Ao validar os dados (os valores dos coeficientes da equação diferencial), o objeto verifica a ordem da equação e apresenta a entrada para as condições iniciais em número igual a ordem do sistema. Em seguida o usuário seleciona o sinal de entrada, e é então apresentado o relatório com as etapas de solução da equação diferencial.

O objeto de aprendizagem foi elaborado para atender as seguintes necessidades de sistemas lineares:

- O aluno poder verificar rapidamente as suas soluções de equações diferenciais após realizar o estudo da forma clássica de solução da equação diferencial linear aplicada a sistemas reais;
- Agilizar os estudos dos alunos de sistemas lineares onde seja necessário uma maior compreensão e o entendimento mais aprofundado do comportamento do sistema, levando em consideração as raízes da equação característica (autovalores do sistema), as condições iniciais de energia do sistema e o sinal de entrada aplicado ao sistema linear.

6. EXEMPLOS DE USO DO OBJETO DE APRENDIZAGEM

São apresentados exemplos de uso do objeto de aprendizagem, para sistemas de ordem dois em duas situações de raízes da equação característica: duas raízes reais distintas e raízes complexas conjugadas.

A figura 6 apresenta a situação de uso do objeto de aprendizagem com duas raízes reais distintas e a parte inicial do relatório detalhado de solução da equação diferencial.

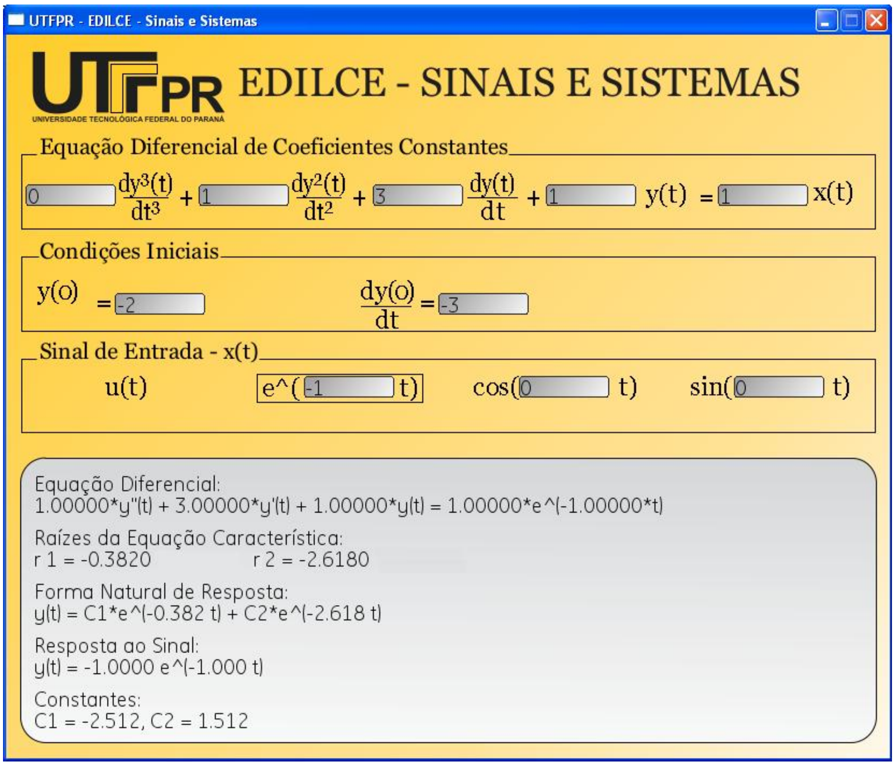

Figura 6 – Objeto de aprendizagem com dados do sistema e relatório detalhado da solução da equação diferencial para as condições iniciais e de sinal de entrada especificadas.

A figura 7 apresenta a situação de uso do objeto de aprendizagem com raízes complexas conjugadas e a parte inicial do relatório de solução da equação diferencial.

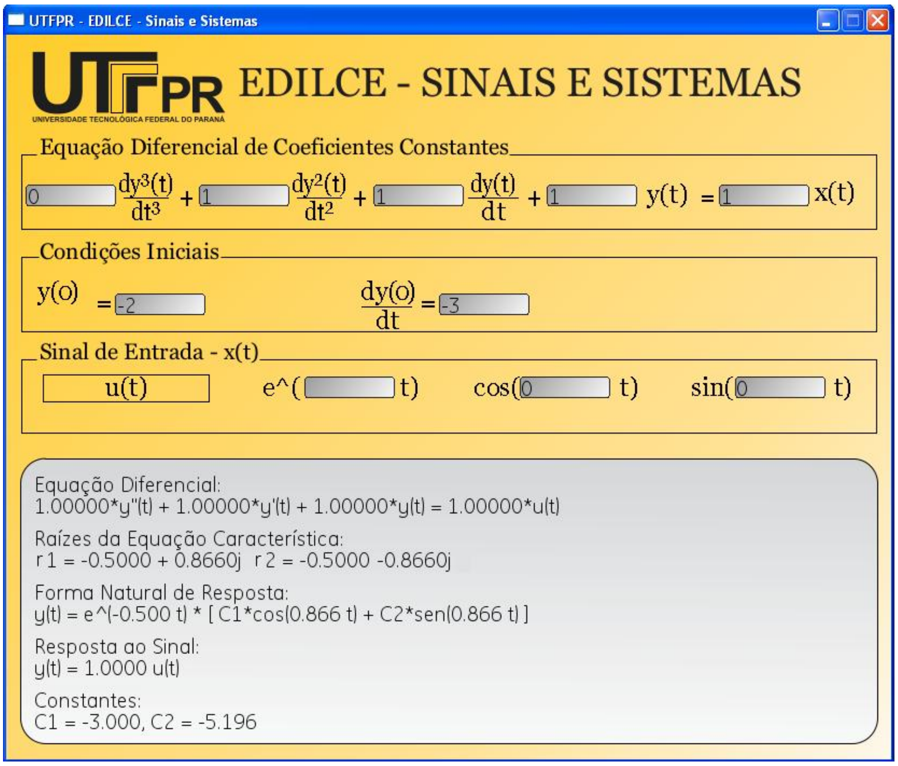

Figura 7 – Objeto de aprendizagem com dados do sistema e relatório detalhado da solução da equação diferencial para as condições iniciais e de sinal de entrada especificadas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A versão atual do objeto de aprendizagem limita-se a sistemas até terceira ordem, mas atende as premissas iniciais de uso intuitivo e iterativo para a compreensão do comportamento de sistemas lineares. Espera-se que com o uso intensivo por parte dos alunos o objeto de aprendizagem gere os seguintes resultados:

- Servir como ferramenta tecnológica para auxiliar nos estudos de sistemas lineares;
- Acelerar o aprendizado de sistemas lineares;
- Aumentar a compreensão do comportamento de sistemas lineares;
- Aumentar o nível de abstração das aulas.

O uso do objeto de aprendizagem na disciplina de sistemas lineares permitirá identificar os pontos positivos e negativos, e atuar nas novas versões de modo a melhorar os resultados. Com o uso intercalado e bem dosado de tecnologias e recursos didáticos espera-se manter um nível elevado de motivação e interesse pelos estudos na disciplina de sistemas lineares.

Agradecimentos

Este projeto recebeu apoio do Edital UTFPR-PROGRAD 21/2013 - Recursos Educacionais Digitais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DORF, Richard C., BISHOP, Robert H.. Sistemas de Controle Modernos, 12ª. Edição, 2012, Editora LTC.

DORF, Richard C., SVOBODA, James A.. Introdução aos Circuitos Elétricos, 5ª. Edição, 2003, Editora LTC.

HAYKIN, Simon, VEEN, Barry Van. Sinais e Sistemas, 2001, Editora Bookman.

SIMMONS, George F., KRANTZ, Steven G.. Equações Diferenciais, teoria, técnica e prática, 1ª. Edição, 2008, McGraw-Hill.

ZILL, Dennis G., CULLEN, Michael R.. Matemática Avançada para Engenharia, volume 1, 3ª. edição, 2009, Editora Bookman.

LEARNING OBJECT IN LINEAR SYSTEMS

Abstract: *The course of Linear Systems in Engineering undergraduate is between the courses of Mathematics (Calculus I to IV and Differential Equations) and the courses of Control. The purpose of this course is to introduce the linear systems and familiarize the student with the main mathematical tools. The behavior of linear systems is described by a linear differential equation with constant coefficients. The solution of this kind of ordinary differential equation is required for the student to understand the behavior of the linear system. The use of a learning object for the solution of linear differential equation with constant coefficients is meant to facilitate and streamline the teaching-learning process. The knowledge and mathematical tools presented in the course will be required in subsequent courses of the curriculum. This paper presents the topics of linear system represented by the linear differential equation with constant coefficients, followed by learning object developed to assist in the teaching activities of the course.*

Key-words: *Linear Systems, Linear Differential Equation with Constant Coefficients, Learning Object.*