COBENGE 2014
ENGENHARIA: Múltiplos saberes e atuações
16 a 19 de setembro | Juiz de Fora - MG

O ENSINO DA TEORIA DOS LIMITES NAS ENGENHARIAS COMO UMA ESTRUTURA DE CONTROLE DE ERROS

Américo A. N. Vieira - americo_vieira@yahoo.com.br.
Professor de Direito na UFPR. Professor Visitante de Ciência da Informação na UFPB (2012-2014). Mestre e Doutor pela COPPE/UFRJ. Mestre pela UNIRIO. Pós-Doutor pela UFPB. Bacharel em Direito e Matemática. Licenciado em Matemática.
Ademir Clemente - ademir@ufpr.br.
Professor de Economia e Contabilidade na UFPR. Mestre e Doutor pela COPPE/UFRJ. Pós-Doutor pela COPPE/UFRJ e Pós-Doutor pela London University (UK). Bacharel em Engenharia Química e Economia.
Marcos de M. Passini - mmpassini@gmail.com.
Professor de Matemática na UFSJ. Mestre e Doutor pela COPPE/UFRJ. Bacharel em Matemática.
Leonel T. Clemente - leonel_t_clemente@hotmail.com.
Doutorando na UFRGS. Mestre pela UFPR. Bacharel em Economia.

RESUMO: *o presente artigo objetiva apresentar, sinteticamente, uma forma moderna e pragmática da Teoria dos Limites; apresentam-se os conceitos de "limite finito de função a uma variável real quando x tende a um valor também finito" e "limite finito de função a uma variável real quando x tende a um valor infinito". O texto compreende quatro subseções: uma breve introdução, em seguida apresentam-se estratégias didático-pedagógicas para esta nova abordagem do ensino de limites como estrutura de controle de erros e, após, considerações de cunho epistemológico sobre o uso do controle de erros na ciência em geral. Ao final, conclui-se que a Teoria dos Limites inaugurou uma Matemática de cunho epistemológico que se imbrica em toda a prática científica como o modo de controlar erros em processos. A pesquisa que subsidiou o presente trabalho foi baseada em ampla bibliografia e foi desenvolvida por equipe interdisciplinar de pesquisadores de diferentes universidades brasileiras.*

***Palavras-Chave**: Engenharias, Matemática, Teoria dos Limites, Controle de erros em processos, Epistemologia.*

1. INTRODUÇÃO[1]

José Ortega Y Gasset, em sua obra *Em torno a Galileu*, referenciando-se ao período de crises e, em particular, ao período de imensas incertezas em que viveu Galileu, apontou-nos que havia uma sensação de que um pé já se apoiava no futuro, mas outro ainda estava cravado no passado (ORTEGA Y GASSET, 1989, p. 24):

> *Diz-se, porém, e talvez com não escasso fundamento, que todos esses princípios constitutivos da Idade Moderna se acham hoje em grave crise. Com efeito, existem não poucos motivos para presumir que o homem europeu levanta suas tendas desse solo moderno onde acampou durante três séculos e começa um novo êxodo para outro âmbito histórico, para outro modo de existência. O que quer dizer: a terra da Idade Moderna que começa sob os pés de Galileu termina sob os nossos pés. Que já a abandonaram.*

A este período conturbado deu-se o nome de Renascimento. A obra de Ortega Y Gasset não foi criada sem propósito nos anos 20 do século XX; com esta ele incitava a uma reflexão acerca de estarmos ou não estarmos em um período semelhante ao que Galileu viveu. Ortega Y Gasset buscou resgatar aspectos importantes dessas crises e também fazer uma profunda

[1] O presente trabalho é resultado parcial de pesquisas de caráter bibliográfico e documental ainda em curso, desenvolvidas por equipe de pesquisadores de diferentes universidades brasileiras (UFPR/UFPB, UFPR, UFSJ, UFRGS), que, em sua maioria, são ligados em sua formação de Mestrado e Doutorado ao Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (COPPE/UFRJ).

reflexão sobre a técnica em outro texto, o *Meditação da Técnica*. Nossa reflexão sobre o controle matemático de erros em processos no ensino da Teoria dos Limites, nas engenharias e na Economia, visa resgatar as raízes fundacionais deste tempo, a Idade Moderna, que para muitos já nem mais vivenciamos (vivenciaríamos já, para alguns, uma Idade Pós-Moderna), mas que acreditamos estarmos ainda em um período de transição.

Neste artigo[2] apresentaremos, sob uma perspectiva internalista da História e Filosofia das Ciências, qual é, ao nosso entendimento, a questão mais relevante que fez com que o homem ocidental fincasse em definitivo o pé no que chamamos de *modernidade* (o nó górdio do que denominamos de Revolução Científica dos Séculos XVI e XVII). Vários foram os passos necessários para chegar ao que hoje denominamos de Ciência Moderna: os experimentos (controlados) de Galileu, a visão de mundo e universo desenvolvida por Copérnico e Kepler (entre outros), a discussão da dúvida metódica e do método (assim como a contribuição na Geometria Analítica) por Descartes, etc. Entretanto, o marco mais significativo da Ciência Moderna é o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral. Sem este, a Física não teria tomado o impulso que tomou, e as múltiplas previsões obtidas a partir do surgimento da Ciência Moderna não teriam sido possíveis. Possivelmente, a luta entre "as ideologias portadoras da verdade" teria sido vencida pela religião e não pela ciência. A compreensão, a previsão, o aperfeiçoamento e a otimização da atividade técnica, que se apresentou como o acúmulo das experiências humanas, teria tido outro impacto e não haveria modernamente a tecnociência controladora da atividade produtiva material. As sucessivas rejeições das inovações técnicas ao longo dos últimos 300 anos não foram casos isolados aqui e acolá[3]; foram inúmeros casos, dado que a inércia e o estabelecimento de reinos baseados em *status quo* são comuns em sociedade; se não é possível rejeitar modernamente a inovação é porque não se conseguiram mecanismos impedidores, mesmo quando esse impedimento visa, de fato, salvar a espécie humana de aniquilamento, como é o caso da possibilidade de aniquilamento nuclear, guerras químicas e bacteriológicas ou mesmo das presentes ameaças, ainda pouco divulgadas, de desumanização do humano pela via cibernética ou pela entronização de um Estado policial através das modernas tecnologias digitais de comunicação e informação (com a derrubada das conquistas dos direitos civis e constitucionais).

Com o objetivo de apresentar mais rapidamente, e muito eficientemente, a essência do Cálculo Diferencial e Integral, não nos deteremos no escopo teórico (ou na forma) desenvolvido por seu criador, Isaac Newton[4]. Nossas considerações didáticas[5] serão sobre seu desenvolvimento posterior, ou melhor, sobre o elaborado refinamento de Weierstrass[6]. Antecipamos que, apesar de darmos tratamento formal à teoria que subsidia o Cálculo Diferencial e Integral como um todo, isto é, a Teoria dos Limites, esta é apresentada de uma forma totalmente nova e simples. Forma essa que permitirá o desvelamento do *ethos* do controle, e não de uma ciência apenas preditiva.

---

[2] O presente artigo é uma ampliação e aperfeiçoamento de outros trabalhos já desenvolvidos (seja individualmente em nível de doutoramento, seja pelo presente grupo de pesquisa já em prática colaborativa de P&D), entre os quais se destaca o artigo "Controle de Erros em Processos: uma alternativa para o ensino de Teoria dos Limites para ciências de base Matemática" publicado no periódico *InterScientia* (aposto em Referências).

[3] Veremos adiante que o próprio Cálculo também sofreu rejeições em seu início.

[4] Sabemos que Leibniz também recebe crédito pela criação/desenvolvimento do Cálculo, porém, o faz de outra forma.

[5] Entretanto, nas questões epistemológicas que serão abordadas, após a parte da estratégia didática sugerida, considerar-se-á todo o desenvolvimento do Cálculo desde sua criação/desenvolvimento por Newton e Leibniz.

[6] "Weierstrass não publicou suas idéias sobre a aritmetização da análise, mas elas foram difundidas por estudantes, como Ferdinand Lindemann e Eduard Heine, que assistiram a suas aulas." (BOYER, 1974, p. 410). "(...) as definições de limite de uma função encontradas em livros atuais são essencialmente as mesmas que Weierstrass e Heine introduziram há quase um século. As chamadas provas por épsilons e deltas são agora parte do instrumental comum dos matemáticos" (BOYER, 1974, p. 411).

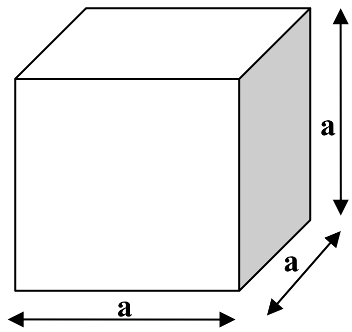
2. UMA ABORDAGEM PRAGMÁTICA DA TEORIA DOS LIMITES VISANDO O DOMÍNIO DA SINTAXE

Em nossas argumentações estaremos entronizando as categorias de conhecimento típicas da semiótica (sintaxe, semântica e pragmática). Neste sentido, o que aqui proporemos é partir de uma situação empírica (ainda que seja um experimento mental sobre uma situação de cunho prático), de forma sistemática, e avançar do experimento prático mental para o domínio da sintaxe da principal definição da Teoria dos Limites (o caso do limite de uma função a uma variável real de resultado finito quando a variável “x” tende também a um valor finito). Consideremos o seguinte exemplo a seguir:

Exemplo 1

“Quer-se construir um cubo a partir de uma matéria prima moldável, com um volume ideal de 1000 cm^3. Devido à função que esta peça exercerá, permite-se um erro máximo de 100 cm^3. Esta empreitada deverá ficar a cargo da seção de Moldes e Formas, chefiada pelo engenheiro Newton. Este deverá, ao final, descrever o processo de desenvolvimento da forma (que poderá ter sua tolerância de erro, que é incialmente ε = 100 cm^3, modificada pelos órgãos de fiscalização e/ou normatização).”

FIGURA 1: Situação Geral do Experimento



V = x^3

x = medida ou aresta efetivamente tomada na realidade.
a = medida que se deseja que x assuma no projeto.

<u>Tolerância de Erro = 100 cm^3</u>

Fonte: adaptada pelos autores (2014).

RELATÓRIO DO EXPERIMENTO

A partir do enunciado do Exemplo 1, desenvolvemos o seguinte:

$V_{máx}$ = 1100 cm^3 → $a_{máx}$ = 10,32 cm (arredondamento na 2ª casa decimal, a menor).
V_{ideal} = 1000 cm^3 → a_{ideal} = 10,00 cm (a partir de uma tolerância ε = 100 cm^3).
$V_{mín}$ = 900 cm^3 → $a_{mín}$ = 9,66 cm (arredondamento na 2ª casa decimal, a maior)

Tais arredondamentos levaram em conta os procedimentos de majoração e minoração fundando-se nos critérios de já ser o valor máximo ou de já ser o valor mínimo. A utilização de duas casas decimais deve-se, em geral, aos aparelhos de mensuração disponíveis e à natureza do material empregado para a confecção do molde. Relata-se, entretanto, que, devido a pouca qualificação dos operários empregados foi-se obrigado a modificar o acima estabelecido, respeitando, porém, as condições dadas. Face à confusão provocada pelo estabelecimento de três arestas internas para o molde (máx, mín, e ideal), procedeu-se da maneira a seguir:

$a_{máx} = 10{,}32$ cm

$\delta_1 = 0{,}32$ cm

$a_{ideal} = 10{,}00$ cm

$\delta_2 = 0{,}34$ cm

$a_{mín} = 9{,}66$ cm

Determinou-se aos operários que construíssem uma forma com aresta interna de 10,00 cm, sendo possível um erro a maior de 0,32 cm (exclusive) e a menor de 0,34 cm (exclusive). Ainda assim houve confusão. Tentou-se novo procedimento:

$a_{máx} = 10{,}32$ cm

$\delta_1 = 0{,}32$ cm

$a_{ideal} = 10{,}00$ cm $\qquad \delta = \text{mín}\ \{ \delta_1 , \delta_2\} = 0{,}32$ cm

$\delta_2 = 0{,}34$ cm

$a_{mín} = 9{,}66$ cm

Desta forma, unificando-se à menor a variação de erro permitido na aresta (de tal forma a concordar com os critérios pré-estabelecidos na ordem de serviço)[7], determinou-se que se construísse uma forma com aresta interna de 10,00 cm, sendo um erro possível a maior ou a menor de 0,32 cm (exclusive), o que veio a minimizar qualquer possibilidade de confusão na compreensão da ordem. Finalmente, cumpriu-se o solicitado. Os procedimentos anteriormente descritos permitem afirmar que os erros neste processo estão controlados para qualquer tolerância dada. Isto é, mesmo se houvesse a alteração de $\varepsilon = 100$ cm^3 para $\varepsilon = 200$ cm^3, ou para $\varepsilon = 50$ cm^3, (ou qualquer outro valor positivo, dado que erros no mundo concreto são sempre positivos) bastaria recalcular o "δ" a partir dos novos valores de "ε" e, então, fornecer o novo valor de "δ" (erro admissível na variável formadora) para os operários.

Matematicamente, pode-se escrever acerca do relatório do experimento:

$$\boxed{\lim_{x \to 10} x^3 = 1000 \quad \leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{tq} \ 0 < |x-10| < \delta \rightarrow |x^3-1000| < \varepsilon}$$

Fim do Relatório

Este primeiro exemplo permite que seja introduzida, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, a Teoria dos Limites com o seu verdadeiro enfoque de "Controle de Erros em Processos", tendo então a definição formal de "Limite Finito Quando x Tende a Um Valor Finito" (um dos casos de controle de erro) a forma geral de[8]:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{tq} \ 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon}$$

Com esta abordagem do limite como controle de erros em processos visa-se fazer com que toda a teoria do Cálculo Diferencial e Integral, que é construída com base na Teoria dos Limites, possa ser compreendida pelos estudantes como o primeiro passo visando a compreensão e o domínio de estruturas de controle. Para que esta ideia fique mais bem fixada, então apresentamos os demais itens com o mesmo enfoque e, para exemplificarmos, agora

---

[7] Se unificássemos pelo maior valor de δ (pelo δ_2), então violaríamos o valor máximo para "a" (passaríamos de 10,32).

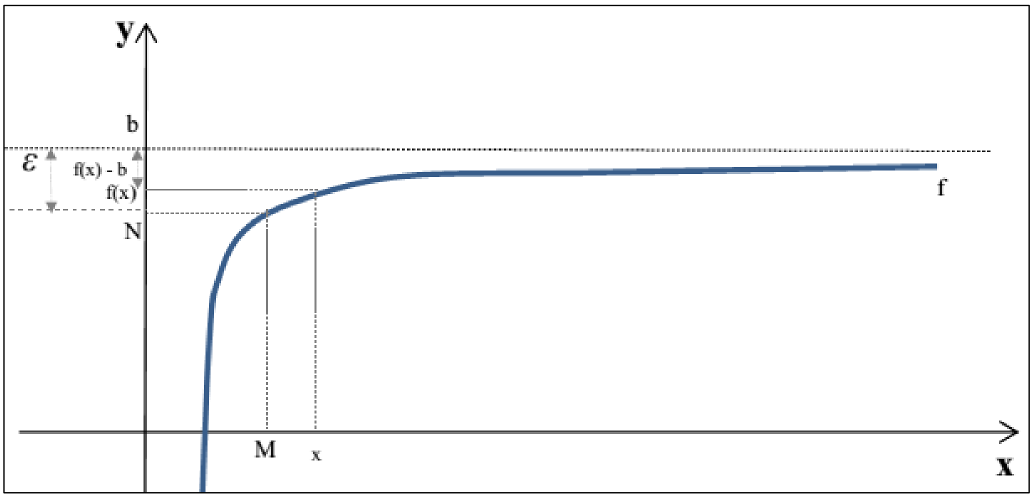
[8] Utilizam-se alguns termos funtados (relativos à funtores) por módulo devido à incerteza da natureza do erro, se a maior ou a menor.

iremos apresentar a exposição de "Limites Finitos de Funções Quando x Tende a um Valor Infinito". Considere o exemplo a seguir.

Exemplo 2

Uma determinada "máquina f" que produz uma quantidade de produto final "y" (com máximo possível em um valor "b") depende de um *único* insumo medido no eixo x. Economistas avisaram aos engenheiros de que somente com um volume de produção do produto final superior a "N" a rentabilidade do processo seria satisfatória. Assim, dado o valor "N" (o mínimo satisfatório economicamente para o desenvolvimento lucrativo da produção", os engenheiros, pelas peculiaridades da "máquina f ", determinaram a quantidade mínima de insumo a ser fornecida como o patamar "M" (valor no eixo dos x). Desta forma, quando fornecida uma quantidade de insumo "x" maior do que "M", então ficará sob controle a garantia de uma produção mínima "f(x)" que será superior ao valor "N" fornecido como o mínimo de produção aceitável. Dito em outras palavras: a distância entre o máximo de produção "b", que pode produzir a "máquina f", e o mínimo "N" aceitável pelos economistas é " ε " (b - N = ε). Vide Figura 2:

FIGURA 2: Função f e assíntota horizontal



Fonte: adaptação dos autores (2014).

Portanto, mesmo se os economistas variassem o valor de N ou ε (sendo relativo à produção, ε é sempre positivo), sempre seria possível determinar um novo valor M de tal sorte a controlar a produção pelo fornecimento de insumos em uma quantidade "x" com valor superior a M.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tq } x > M \rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon$$

Fim do Exemplo 2

Desta forma, o aluno de engenharia, estudante de Cálculo, firma o conceito de limite como *controle de erros em processos* e ainda é capaz de, por si mesmo, desenvolver as demais definições (ainda que não garantamos a criatividade de historinhas tipo nossos exemplos). Imaginem como seria a definição de limite a seguir (imagine-se preenchendo) como forma de experimentarem o fenômeno da redescoberta:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \qquad ??? \text{ (tente preencher)}$$

Tal compreensão dos estudantes de engenharia sobre haver uma estrutura matemática de controle de erros em certas situações (processos, procedimentos, etc.) é o que também ocorre, posteriormente, na Regra Geral de Derivação, na Soma de Riemann, em cálculos de volumes e de centros de massa, e o que vem facilitar o aprendizado dos vários *métodos de aproximação sucessivas* em Cálculo Numérico e nas demais aplicações do Cálculo às engenharias.

Se fizermos uma analogia de nossos exemplos didáticos com a Teoria das Ideias de Platão, então quando desejarmos construir no mundo sensível (real para nós e da cópia para Platão) certo objeto (que através de uma linguagem idealizada, denomina-se este objeto de, por exemplo, cubo) estaremos no "papel de Demiurgos" (o deus artífice). Isto é, estaremos carimbando uma forma, idealizada, no *chaos* e gerando um objeto, no caso um cubo, no mundo sensível; um cubo borrado, um cubo não cubo, uma cópia do cubo. O ponto crucial é que não sabemos ao certo se, de fato, nos elevamos ao mundo das essências e assim conseguimos a melhor forma possível no real, ou seja, a cópia (no sentido utilizado por Platão); ou se estamos a fazer a cópia da cópia, ou melhor, se estamos a construir simulacros[9]. Ainda que admitamos a *priori* nosso erro, ao empreender a cópia, tal como o novo discurso matemático também o faz: se "x" tende a "a", então: "x" é próximo de "a", porém, diferente de "a"; o novo discurso não mais afirma **o que é**, apenas diz **o que tende a ser**.

Na Geometria Euclideana, o lado é de 10 cm, enquanto, no Cálculo, o lado **tende a** 10 cm. O primeiro é um discurso do tipo ontológico: as afirmações são sobre o que "é", sobre o ser. O segundo é um discurso do tipo epistemológico: isto é, visa o que se "depreende do ser" e "o que é possível dizer dele", com o instrumental lingüístico disponível (é que ele, o "objeto": "tende a ser", "tende a ter"). A certeza **do que é** neste discurso se esvai, mas mantém-se, a partir de um ***controle de erros***, uma coesão e objetividade do discurso.

Ao realizarmos a construção/carimbada de nosso cubo, esta é realizada através de um molde (outra construção que conterá erro, por estar no mundo das cópias). Devemos perceber que nossa tarefa mental será controlar o erro no produto final, através da dissecação e controle das variáveis formadoras primitivas; devemos engendrar um processo de fabricação controlável (procedimento controlável). No primeiro exemplo didático, existe o controle (existe o limite), se e somente se, estiver ocorrendo que **para toda** tolerância de erro pré-estipulada (positiva, pois no mundo sensível só existe o positivo), pudermos exibir uma tolerância de erro na variável formadora, tal que: **se** toda vez que criarmos esta variável formadora no mundo real (x), sua diferença com o ideal (10), seja menor que sua tolerância de erro e, **então,** isto acarrete que o produto final real "x^3" esteja dentro das especificações desejadas, isto é, que sua diferença com o ideal (1000 cm^3), seja menor do que a tolerância de erro pré-estipulada.

Finalmente, na apresentação do conceito de limite finito de função quando "x" tende também a um valor finito, não utilizamos o usual gráfico cartesiano para justamente enfatizar aqui o aspecto mais pragmático do uso da Teoria dos Limites. Apesar do desenho do cubo ter estado presente, ao evitarmos o desenho do gráfico cartesiano (que poderá também ser incluído complementarmente, e o foi no segundo exemplo), procuramos dar ênfase a questão do controle de erros sem nos limitarmos a uma visão euclideana típica que se encerraria em três dimensões. Com isso visamos mais facilmente retomar as mesmas considerações acerca de "controle de erros" em Limites de Funções a Várias Variáveis Reais (geralmente no Curso de Cálculo II), olhando para "n" (geralmente com n>3) variáveis formadoras do custo de uma camisa (ou outra peça de roupa, por ser exemplo fácil). Operar com "n" variáveis é bem mais fácil sob uma

[9] Recomenda-se *Paidéia* de Werner Jaeger (1989, p. 601-623) para quem não conhece a Teoria das Ideias de Platão.

"visão econômica" do que sob uma "visão geométrica", por esse motivo (entre outros) inserem-se estes pequenos cuidados de não vício procedimental na apresentação do Cálculo I.

3. A IDEIA DE CONTROLE COMO "*ETHOS*" DA PRÁTICA CIENTÍFICA

O homem, desde os tempos mais remotos, sempre quis controlar o seu destino. O termo "previsão" ou "previsão científica", muito utilizado em ciência, é apenas a condição *sine qua non* para haver a atividade de controle. Nos primeiros tempos não havia conhecimento sistematizado, tal como já encontramos nas primeiras civilizações, muito menos havia a ciência da forma que praticamos. O que havia era a magia. Seria a magia também uma forma de controle? Para Colin Ronan (1987, p. 12, negrito nosso):

> *É impossível examinar a história ou a teoria da ciência sem se defrontar com a magia. Esta era um complexo amálgama de espiritismo e arcano. Para quem não tenda a imaginar a ciência moderna meramente como uma taumaturgia, a própria menção da magia neste contexto pode parecer estranha ou até inaceitável. Contudo, aquilo que aparentemente constitui abordagens totalmente disparatadas da natureza contém, na verdade, muitos fatores comuns. A magia foi um modo legítimo de expressar uma síntese do mundo natural e do seu relacionamento com o homem. Quando, numa sociedade primitiva, o mago, impostor ou curandeiro se propõe provocar chuva por meios artificiais, ele expressa sua compreensão de uma ligação entre a chuva e o crescimento das plantações, entre um e outro aspecto da natureza e sua estimativa de que a sobrevivência do homem depende do comportamento do mundo natural. Ele sente que há alguma conexão entre o homem e o mundo que o cerca, algum entendimento primitivo de que, conhecido o procedimento correto, o homem pode* ***controlar*** *as forças da natureza e colocá-las a seu serviço.*

Claramente, Ronan também vislumbra a idéia de controle. Tal controle de seu *habitat*, através da criação de sobrenaturezas[10], foi de tal forma trivializado e banalizado, que chamamos de "busca da natureza", ir a um lindo campo com cavalos e olhar para coqueirinhos plantados simetricamente, pescar num pegue-pague e retornar para casa numa estrada segura. Termos como "desenvolvimento sustentável", "impacto ambiental" e outros fazem parte de nossas técnicas de intervenção e controle sobre a natureza. É claro que aquilo que não domamos na natureza, furacões, tempestades etc., estão sob observação, com vistas à obtenção do maior número de informações possíveis. Assim também ocorre nos casos da Teoria dos Limites, onde não há limite, isto é, controle (Limite no Infinito que dá Infinito, Limite no Finito que dá Infinito e nos casos em que os Limites Laterais são distintos ou não existem). Ao exercer o controle sobre seus pensamentos e suas representações e, posteriormente e gradativamente, exercer controle sobre seu *habitat*, o Homem passa a constituir normas de convivência, para que seja possível controlar os interesses individuais, em prol dos interesses do grupo. Lembramos que controlar e dominar não são sinônimos; a ideia de controle pode admitir a presença de erros, neste caso estes é que são controlados. As modernas normas de convivência são controles que a sociedade exerce sobre seus partícipes. Algumas normas são consideradas tão importantes que a sociedade delega o controle exercido ao Estado. Tais normas são presididas por uma Constituição. Um dos pontos mais relevantes no Direito Constitucional é o controle da constitucionalidade. Na economia, como já mencionamos anteriormente, quer-se o controle do processo produtivo e da distribuição, para poder haver o contínuo ajustamento às demandas e flutuações do mercado.

---

[10] O termo "sobrenatureza" está no sentido que usa José Ortega Y Gasset em sua *Meditação da Técnica*.

A Lógica Crisp[11], de forma direta, controla a compatibilidade entre seus enunciados e, em no "formato século XXI" (tal como é visto em VIEIRA, 2004), controla as operações logicamente válidas, as OLVs[12], verificando se estas efetivamente se encaixam na categoria, uma forma indireta de controle sobre os enunciados. Isto é, um enunciado é verdadeiro se é compatível com a principiologia adotada, com os axiomas adotados e com os resultados anteriores já demonstrados. Nesse sentido, a demonstração lógica visa tão somente a verificar se o controle pode ou não pode ser exercido sobre o enunciado em demonstração.

Este controle sobre os enunciados, onde ainda permanece o caráter ontológico, era bem aceito pela religião Cristã. Vejamos o que nos aponta o Bispo Berkeley[13] em *O analista* quando ataca sistematicamente a nova matemática de Newton e Leibniz (Berkeley, 2010, §2, p. 637-638, grifo nosso)[14]:

> *Trata-se de uma antiga observação que **a geometria é uma excelente lógica**. E é preciso reconhecer que, quando as definições são claras, quando os postulados não podem ser recusados nem os axiomas, negados, quando, após contemplar e comparar distintamente as figuras, as propriedades delas são derivadas por meio de uma cadeia contínua e bem conectada de consequências, sem jamais perder de vista os objetos e sempre mantendo a atenção fixada sobre eles, adquire-se com isso um hábito de raciocínio minucioso, exato e metódico, hábito esse que fortalece e ilumina a mente e torna-se de uso geral na investigação da verdade ao ser transferido para outros assuntos. Mas, por ora, valeria a pena considerar até que ponto nossos geômetras analíticos se afastam disso.*

Nesse sentido, Berkeley percebe que há algo muito estranho nesta nova matemática (o Cálculo Diferencial e Integral ou Cálculo Infinitesimal). O que ora expomos aqui com um razoável grau de simplicidade não é corrente na literatura atual e muito menos o era nos séculos XVI e XVII. Note-se que, naquele contexto, seja por Newton e Leibniz não terem percebido a assunção *a priori* do erro nesta nova matemática, ou ainda que o tenham percebido não o quiseram ressaltar com temor de inserir o erro (análogo do pecado) na prática científica, onde a perfeição do círculo até bem pouco reinava (antes de Kepler), Berkeley não deixou passar despercebida a inserção sutil do erro (o que ressaltamos no trecho anteriormente negritado). E ainda (BERKELEY, 2010, §19, p. 647-648, negrito nosso):

> *No entanto, parece que, sejam quais forem os erros admitidos nas premissas, erros proporcionais aparecerão na conclusão, sejam eles finitos ou infinitesimais, e que ακρίβεια da geometria exigirá que nada seja negligenciado ou rejeitado. Em resposta a isso, direis talvez que as conclusões são rigorosamente verdadeiras e que, portanto, também devem assim ser os princípios e métodos dos quais são derivados. Mas essa maneira invertida de demonstrar vossos princípios a partir de vossas conclusões tanto vos é peculiar, cavalheiros, quanto é contrária às regras da lógica. A verdade da conclusão não provará a verdade nem da forma nem da matéria de um silogismo, na medida em que a ilação poderia estar errada ou as premissas serem falsas e, apesar de tudo, a conclusão ser verdadeira, embora não*

---

[11] Termo pelo qual os praticantes da Lógica Fuzzy passaram a designar os praticantes da Lógica e Matemática usuais (notando que há muitas outras lógicas e matemáticas, como a família das lógicas paraconsistentes, entre outras).

[12] Diz-se que uma operação é uma OLV (Operação Logicamente Válida) se nunca transforma um enunciado verdadeiro em um enunciado falso; podendo transformar um enunciado verdadeiro em outro verdadeiro, um falso em outro falso, ou até mesmo um enunciado falso em um enunciado verdadeiro (VIEIRA, 2004, p. 36-40).

[13] O texto original de George Berkeley ficou pronto em 1734. Uma tradução confiável do mesmo encontra-se em: <http://www.scielo.br/pdf/ss/v8n4/07.pdf> (último acesso em: 10 jun. 2014).

[14] Antes do surgimento de Boole e Frege, a melhor fonte para o estudo da Lógica Crisp na forma que modernamente a entendemos era o texto *Os Elementos* de Euclides, que já continha as principais ideias e mecanismos do Método Hipotético-Dedutivo. É nesse sentido que Berkeley tece elogios à Geometria (idem para a admiração de Espinosa, Descartes e muitos outros à Geometria).

> *em virtude de tal ilação ou de tais premissas. Digo que em qualquer outra ciência os homens provam suas conclusões por meio de seus princípios, e não os princípios por meio das conclusões. Mas, se na vossa ciência permitis essa maneira antinatural de proceder, a consequência* ***será que devereis adotar a indução e dizer adeus à demonstração. Se aceitardes isso, vossa autoridade para guiar-nos em questões que envolvem a razão e a ciência não perdurará por muito mais tempo****.*

Um leitor desavisado poderia ter se surpreendido quando imediatamente após nossos exemplos trouxemos também a lume a Teoria das Ideias de Platão. Notem que fazer ciência para Berkeley é operar no "mundo das ideias", onde há unicidade e perfeição na concepção dos objetos e fenômenos. Por outro lado, no "mundo da cópia" ou no "mundo dos simulacros", as observações sobre estes mundos são permeadas pelo **caráter indutivo** (as ciências empíricas utilizam fartamente o método indutivo)[15], e é isso que Berkeley percebe (ou pelo menos intui) que está sendo inserido sub-repticiamente nesta nova matemática. A nova matemática não mede o que está no "mundo das ideias" como, por exemplo, um cubo idealizado cujo lado **é** de 10 cm; o que ela mede é a cópia ou o simulacro, que apenas **tende a ser** de 10 cm. No que denominamos "mundo sensível", ou "mundo concreto", ou "mundo real", e que aqui analogizamos com o "mundo da cópia" ou "mundo do simulacro" (da Teoria das Ideias de Platão), as mensurações realizadas **sempre estarão sujeitas a erros** e, como cientistas, devemos prever[16] e, se possível, **controlar os erros**. Esta dicotomia entre uma lógica ontológica (Lógica Crisp, obtidas suas características gerais por Berkeley nos Elementos de Euclides - Geometria) e a nova matemática epistemológica (Cálculo Infinitesimal) ainda permeia nossa prática científica (ainda que tentativas para novas lógicas estejam sendo realizadas)[17]. Berkeley percebeu claramente que a ciência, tal como ele a entendia, não perduraria por muito tempo; e ele tinha razão, pois, o que se inaugurava com esta nova matemática, o ***Cálculo***, era o que denominamos de Ciência Moderna.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que a expressão "haver limite" significa para a engenharia o "haver controle de erros em processos"[18]. Nesse sentido, todo o restante do aprendizado do Cálculo, tal como ocorre também no aprendizado das Integrais, são *mecanismos matemáticos de controle de erros em processos* **(**tal como nos defrontamos ao apresentarmos a "Soma de Riemann": visando o cálculo de áreas). Assim, quando apresentamos a Teoria dos Limites para estudantes de graduação de engenharia (e de Economia), devemos enfatizar o caráter pragmático do aprendizado do Cálculo pelo controle de erros em processos. O que pode parecer inicialmente paradoxal é inverter a atual sistemática do ensino: aprofundar o aprendizado da teoria, principalmente na parte relativa ao domínio da sintaxe, para podermos ver o que é no sentido prático (ou pragmático). As aulas de Cálculo sem o domínio sintático de épsilons e deltas, que é o mais usual, não permite a perfeita compreensão do significado do que se está a aprender ao se deparar com a Matemática que "inaugura a Ciência Moderna". Se pensarmos nas exigências das novas frentes de desafios abertas pelas novas áreas de engenharia e/ou mesmo pelos novos vieses das engenharias mais tradicionais, veremos que o problema não está na formação dos alunos: está no compromisso (ou do não compromisso)

[15] Vide, por exemplo, Karl Popper em *A lógica da pesquisa científica*.
[16] Condição *sine qua non* para um próximo passo.
[17] Nosso entendimento não é de oposição ao surgimento e uso na prática científica de lógicas como a Fuzzy e as paraconsistentes.
[18] Quando não há o limite, então não há o controle do erro no processo (podendo ainda assim haver alguma informação se o descontrole vai para o lado positivo ou para o negativo – mais ou menos infinito - etc.).

dos docentes de Matemática com o desenvolvimento e formação das novas gerações de engenheiros. Há uma "janela de oportunidades" formativas e "recuperativas" durante o ensino da Teoria dos Limites. O que usualmente vemos são professores pouco preparados e até mesmo despreparados para o magistério superior de Matemática para o ensino na Engenharia pensando que: pelo fato de ficarem de dois a oito anos (durante o mestrado e doutorado) estudando uma nova forma de demonstrar o "Teorema X" ou o "Teorema Y", ou uma nova abordagem para um assunto somente dominado por três ou quatro autores, estes estariam minimamente preparados para assumir cátedras de Matemática que visem à preparação do futuro engenheiro. Essa *fé* na tese de que haveria *sempre* preparação para o exercício do magistério superior em Matemática para as engenharias, meramente por haverem docentes realizado mestrados e doutorados em Matemática, não possui qualquer defensabilidade em termos pedagógicos.

Um perfeito domínio conceitual de limites favorece também o aprendizado de derivadas (principalmente da parte relativa à Regra Geral de Derivação), das integrais (inclusive de seus teoremas), de uma melhor compreensão do Cálculo a Funções de Várias Variáveis, do Cálculo Numérico (onde a questão do controle de erros em processos computacionais é apresentada, em geral, logo no início da disciplina) e de várias aplicações do Cálculo Diferencial e Integral às ciências empíricas.

Pode-se dizer, *grosso modo*, que o Cálculo e seus desdobramentos[19] são a principal base linguística representacional da Ciência Moderna. Esta Matemática epistemológica é direcionada a *controlar os erros em processos* acerca dos vários objetos e dos fenômenos que são estudados pelas engenharias. Isto é, os mecanismos construídos com esta matemática estão a controlar (ou a tentar controlar) as diversas variáveis envolvidas nos diversos fenômenos ou objetos pesquisados. Ou ainda, nas ciências, seja pela Lógica (controle de compatibilidade de enunciados), seja pelo Cálculo (controle de erros em processos), a ideia de controle (e não somente de previsão) é essencial para a maioria das ciências, sendo que, para as engenharias um de seus pressupostos é a existência e/ou possibilidade de construção de **sistemas de controle**.

No controle de enunciados pela Lógica Crisp (que é largamente utilizada na Matemática tradicional) ainda permanece o caráter ontológico (dado que os enunciados somente podem ser verdadeiros ou falsos)[20], já as mensurações aferidas pelo Cálculo possuem um caráter epistemológico (apenas tendem a ser). Sabemos que tais considerações de cunho epistemológico não são correntes em institutos de Matemática. Entretanto, a Lógica Fuzzy (na qual os valores dos enunciados não são exatos ou fixos) e suas aplicações já são uma realidade em várias áreas do conhecimento.

Apresentamos aqui como criar novas possibilidades de ensino-aprendizagem em Matemática no ensino de engenharia e, ao mesmo tempo, buscamos, por meio de uma análise histórica da ciência, incitar os pares da *Academia*, e em particular aos membros da (ABENGE), a içarem velas e deixarem os novos ventos do conhecimento possibilitarem a visada de um novo mundo e com isso, transformarmos juntos à realidade do ensino de engenharia em nosso país.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, Gaston. *A Nova Ciência*. 1 Ed. Trad. Joaquim de Carvalho. São Paulo: Abril Cultural, 1973. (Coleção Os Pensadores).

BARTLE, Robert G.. *Elementos de Análise Real*. Trad. Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro: Campus, 1983.

[19] Juntamente com a Lógica Moderna (que aqui denominamos de Lógica Crisp).
[20] Um enunciado **é** verdadeiro (ou um enunciado **é** falso), portanto, de caráter ontológico (se epistemológico, então, apenas **tenderia a ser**).

BARTHOLO, Roberto S.. *Os Labirintos do Silêncio*: cosmovisão e tecnologia na modernidade. 1 Ed. São Paulo: Editora Marco Zero/ COPPE/UFRJ, 1986.

BERKELEY, George. O analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel. In: *scientiæzudia,* São Paulo, v.8, n.4, p.633-76, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ss/v8n4/07.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2014.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARNAP**,** Rudolf. *Empirismo, semântica e Ontologia*. 1 Ed. Trad. Pablo Rubén Mariconda. São Paulo: Abril Cultural, 1975. (Coleção Os Pensadores).

CERQUEIRA, Luiz A.; OLIVA, Alberto. *Introdução à Lógica*. 1 Ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1979.

CHURCH, A. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Pres, 1956.

COSTA, Newton Carneiro Afonso da. *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica*. 1 Ed. São Paulo: HUCITEC, 1994.

DAVIS, Philip J. & HERSH, Reuben. *A Experiência Matemática*. Trad. João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DESCARTES, René. *Discurso do Método*. Trad. J Guinsburg e Bento Prado Júnior. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Os Pensadores).

__________________. *Meditações*. Trad. J Guinsburg e Bento Prado Júnior. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Os Pensadores).

DIEUDONNÉ, Jean. *A Formação da Matemática Contemporânea*. 1 Ed. Trad. J.H. von Hafez Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

DIJKSTERHUIS, E. J. & FORBES, R. J.. *História da Ciência e da Técnica*: da antigüidade ao século dezessete. Trad. H. Silva Horta. Lisboa: Ulisseia, 1963. 2v, V.1.

ECO, Umberto. *Tratado Geral de Semiótica*. São Paulo: Editora Perspectiva, 1976.

EUCLID. *The Thirteen. Books of Euclid's Elements*. Trad. Sir Thomas L. Hesth. Chicago: University of Chicago Press, 1952. (Coleção Great Books of The Western World, 54v, V.11).

FREGE, J. Gottlob. *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix/EDUSP, 1978.

________________. *Sobre a Justificação Científica de Uma Conceitografia*. Trad. Luis Henrique dos Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Os Pensadores).

HAVELOCK, Erick A.. *A Revolução da Escrita na Grécia e Suas Conseqüências Culturais*. 1 Ed. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, Rio de Janeiro: Ed. Paz e Terra, 1996.

__________________. *Prefácio a Platão*. 1 Ed. Trad. Enid Abreu Dobránzsky. Campinas: Papirus Editora, 1996.

JAEGER, Werner Wilhelm. *Paidéia*. 2 Ed. Trad. Artur M. Parreira. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

KEYNES, Jonh Maynard. *A Treatise on Probability*. London: Cambridge University Press,1992.

LAKATOS, Imre. *A Lógica do Descobrimento Matemático*. Trad. Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Trad. Antonio Paques et alii. São Paulo, Harper & Row do Brasil, vol 1, 1982.

MASON, Stephen F.. *História da Ciência*. Trad. Flávio e José Vellinho de Lacerda. Porto Alegre: Editora Globo, 1962.

MARTINS, Roberto Cintra. Sobre a Natureza da Engenharia de Produção e o Diálogo Interdisciplinar. In: *Anais do XII Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, São Paulo, 1992.

MUNEM, Mustafa A. & FOULIS, David J.. *Cálculo*. Trad. André Lima Cordeiro et alii. 2v, V.1. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

ORTEGA Y GASSET, José. *Meditação da Técnica*. Trad. Luís Washington Vita. Rio de Janeiro: Livro Ibero Americano Ltda., 1963.

________________________. *Em Torno a Galileu*. Trad. Luis Felipe Alves Esteves. Petrópolis: Vozes, 1989.

PETROZZO, Daniel P.; STEPPER, John C. *Reengenharia na Prática*: como implementa um programa efetivo de reengenharia e como evitar erros no processo. Trad. Eliane Kanner. São Paulo: Makron Books, 1996.

RONAN, Colin A. *História Ilustrada da Ciência da Universidade de Cambridge*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1987. 4v.

ROSA, Luiz Pinguelli. *Tecnociências e Humanidades*: novos paradigmas, velhas questões. São Paulo: Paz e Terra, 3v, V.1, 2005.

SPIVAK, Michael. *Cálculo Infinitesimal*. 2v, V.1. Barcelona: Editorial Reverté,1972.

VIEIRA, Américo A. N.. *Prolegômenos a Uma Epistemologia do Controle*: rumo à Engenharia do Conhecimento. Rio de Janeiro, 2005. Tese (Doutorado em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia) - COPPE / UFRJ, 2005.

____________________. Lógica: método semiótico-estruturado. 1 Ed., 3ª reimp. Rio de Janeiro: Sarau Cultural, 2004.

___________________. Controle de erros em processos: uma alternativa para o ensino de Teoria dos Limites para ciências de base Matemática. *InterSicentia*. João Pessoa, v.2, n.1, p. 89-107, jan./abr. 2014.

THE TEACHING OF THE THEORY OF LIMITS ON ENGINEERING AS A CONTROL ERRORS

ABSTRACT: *This article intends to synthetically present a modern and pragmatic form of the Theory of Limits; focusing on the concept of "finite limit of a real variable function when x also tends to a finite value" and "finite limit of a real variable function when x also tends to a infinite value". The text includes four subsections. After a brief introduction, it presents a didactic-pedagogical strategy to this new approach. Then, some epistemological considerations on the use of error control in general science are presented. Finally, it comes to the conclusion that the Theory of Limits inaugurated a Mathematics of epistemological nature which is enmeshed across all the scientific practice as the way of controlling errors in processes. The research that supported the present article was based on extensive bibliography and was developed by an interdisciplinary group of researchers from distinct Brazilian universities.*

Keywords*: Engineerings, Mathematics, Theory of Limits, Error control processes, Epistemology.*