



RESGATANDO O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS DA ENGENHARIA ESTRUTURAL

Caroline Rainha Bubach – caroline.rainha@hotmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Engenharia Civil
Avenida Fernando Ferrari, 514
29075-910 – Vitória – Espírito Santo

Walnório Graça Ferreira – walnorio@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Engenharia Civil
Avenida Fernando Ferrari, 514
29075-910 – Vitória – Espírito Santo

Macksuel Soares de Azevedo – macksuel.azevedo@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Engenharia Civil
Avenida Fernando Ferrari, 514
29075-910 – Vitória – Espírito Santo

Ricardo Azoubel da Mota Silveira – ricardo@em.ufop.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Departamento de Engenharia Civil
Morro do Cruzeiro, s/n°
35400-000 – Ouro Preto – Minas Gerais

Rodrigo Silveira Camargo – rodrigo_camargo2000@yahoo.com

Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Engenharia Civil
Avenida Fernando Ferrari, 514
29075-910 – Vitória – Espírito Santo

***Resumo:** De um modo geral quase todos os problemas em engenharia e ciências físicas podem ser governados por uma equação diferencial. Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. Além das equações diferenciais ordinárias sujeitas à condição inicial há as equações ordinárias e parciais submetidas a condições de contorno. Nem sempre é possível encontrar soluções analíticas dessas equações diferenciais e diversos são os métodos aproximados para suas soluções, entre os quais se destacam o método dos elementos finitos, o método dos elementos de contorno e o método dos volumes finitos. O método dos elementos finitos é sem dúvida o mais popular entre esses métodos. Todos esses métodos são baseados em processo de discretização, reduzindo o domínio contínuo em um domínio discreto, onde procuram-se as soluções em número finito de pontos nodais. Os métodos citados apresentam desenvolvimentos sofisticados para suas formulações. O presente artigo apresenta o mais simples e antigo método para soluções aproximadas das equações diferenciais. Trata-se do método das diferenças finitas, no qual se*



substitui as derivadas parciais do meio contínuo em fórmulas discretas de diferenças e sua aplicação em um número finito de pontos no domínio de validade do problema. Este trabalho se propõe resgatar o uso do método das diferenças finitas na engenharia estrutural em uma abordagem pedagógica, muito importante para encorajar seu uso no ensino das soluções numéricas dos problemas de engenharia. São mostradas suas aplicações em vigas, problemas regidos pela equação de Laplace e em placas.

Palavras-chave: *Métodos numéricos, Método das diferenças finitas, Engenharia estrutural*

1. INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos são baseados no processo de discretização, reduzindo o problema físico, contínuo com infinitas incógnitas, a um problema discreto com número finito de incógnitas (WROBEL *et al.*, 1989). No método das diferenças finitas (MDF), a discretização é, usualmente, feita com o auxílio de uma malha com espaçamento constante, representando a região de interesse por uma série de pontos ou nós. A relação entre os valores nestes pontos é geralmente obtida através da expansão truncada em série de Taylor.

Assim, o método consiste apenas na substituição das derivadas parciais da equação contínua por meio de fórmulas discretas de diferenças, e na aplicação da equação resultante em um número finito de pontos da região. Este procedimento origina um sistema de equações algébricas cuja solução fornece os valores desejados. Malhas irregulares também podem ser empregadas, porém este procedimento envolve complicações adicionais que ofuscam a simplicidade matemática e computacional do método.

É notável a preferência do meio acadêmico pela utilização do método dos elementos finitos (MEF) na solução dos problemas de engenharia. Porém, aplicações do método das diferenças finitas nas engenharias estrutural e geotécnica sempre foram alvos de pesquisas, com o recente crescente interesse da comunidade científica (SZILARD, 2004 e MICKENS, 2005 apud MACHADO, 2013). Esse interesse pode ser constatado pela evolução do MDF, e mais precisamente no desenvolvimento de suas variantes. Dentre essas variações destaca-se o método das diferenças finitas energéticas (MDFE), que se apresenta como um “meio termo” entre o MDF tradicional e o MEF. Dentre as pesquisas na área, citam-se os trabalhos de Mittlelbach (2002, 2007) e Vieira (2007), que avaliaram o comportamento de silos através desse método.

Outras pesquisas usando o MDF comprovam a sua viabilidade na solução de vários problemas de engenharia. Debs (1976), por exemplo, tratou, de forma simplificada, as cascas de revolução; e Ibanesco *et al.* (2009), que analisaram placas apoiadas em estacas.

Outra aplicação muito recente e altamente sofisticada do MDF é o trabalho de Machado (2013), que desenvolveu uma ferramenta para o estudo e análise de problemas envolvendo cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato impostas por bases elásticas empregando o método da diferenças finitas.

2. PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS



2.1. Derivadas de primeira ordem

A idéia básica do método consiste na aproximação das derivadas parciais de uma equação diferencial através de fórmulas de diferenças, e satisfação dessa equação aproximada de diferenças em determinados pontos da região.

A expansão em série de Taylor do valor da função u em $x_i + h$, em torno do valor de u em $x = x_i$, é dada pela equação (1).

$$u(x_i + h) = u(x_i) + h \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (1)$$

onde h é um incremento pequeno, porém finito.

Reescrevendo a equação (1), tem-se:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} - \dots \quad (2)$$

Tomando-se:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \quad (3)$$

A equação (3) representa a aproximação de diferença progressiva. Nota-se que foram desprezados os termos relativos à derivada segunda e de ordens superiores, assim, como h é um valor pequeno, o maior termo desprezado é igual a uma constante vezes h , ou seja, é da ordem de h (utiliza-se a notação $O(h)$).

Para a obtenção da aproximação de diferença regressiva, utiliza-se analogamente a equação (1).

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (4)$$

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \quad (5)$$

Essa aproximação também possui erro $O(h)$.

A aproximação de diferença central é obtida subtraindo a equação (4) da equação (1).

$$u(x_i + h) - u(x_i - h) = -2h \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{h^3}{3} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (6)$$

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} \quad (7)$$



O erro cometido pela aproximação de diferença central é $O(h^2)$. Pode-se notar que o esquema de diferença central possui menor erro quando comparado ao esquema de diferença progressiva ou regressiva.

As equações (3), (5) e (7) podem ser interpretadas geometricamente como mostra a figura 1.

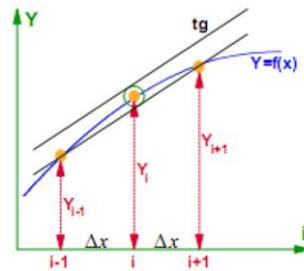


Figura 1 - Interpretação geométrica para a derivada

Fonte: (SOARES, 2010)

2.2. Derivadas de ordem superior

Para a obtenção de aproximações de diferenças para derivadas de ordem superior pode-se empregar também séries de Taylor. Tomando-se, por exemplo, a derivada de segunda ordem, pode-se obter a aproximação de diferença central somando as equações (1) e (4).

$$u(x_i + h) + u(x_i - h) = 2u(x_i) + h^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \frac{h^4}{12} \left(\frac{d^4u}{dx^4} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (8)$$

Desprezando as derivadas de ordem superior, é possível reescrever a equação (8) em função da derivada de segunda ordem, como descrito na equação (9), com erro $O(h^2)$.

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} \quad (9)$$

Substituindo u por $\left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)$ na equação (5), é possível obter a aproximação de diferença central de terceira ordem, como mostrado na equação (10) (SILVA apud SOARES, 2010).

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} = \frac{u(x_i + 2h) - 2u(x_i + h) - 2u(x_i - h) - u(x_i - 2h)}{2h^3} \quad (10)$$

2.3. O método das diferenças finitas aplicado à equação da viga

Para o comportamento estático, a equação diferencial governante de uma viga submetida a um carregamento distribuído $q(x)$ é definida pela equação (11).

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (11)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia da seção transversal e w é a deflexão vertical da viga.

Aplicando o método das diferenças finitas na equação (11) determina-se a equação governante da viga por diferenças finitas.

$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{h^4} = \frac{q(x)}{EI}$$

$$w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2} = \frac{q(x)h^4}{EI} \quad (12)$$

2.4. Condições de contorno

A resolução do sistema de equações obtido no método das diferenças finitas pode depender das condições de contorno, que são valores conhecidos da função em determinado nó da malha.

Assim, seu objetivo é diminuir o número de variáveis no sistema de equações e/ou relacionar nós fora da malha de diferenças finitas a nós no seu interior de acordo com (SILVA e PEDROSO *apud* SOARES,2010).

As condições de contorno usuais para equações diferenciais são:

- Condição de contorno de Dirichlet, ou condição de contorno essencial: especifica o valor das variáveis principais no contorno;
- Condição de contorno de Neumann, ou condição de contorno natural: especifica o valor das variáveis secundárias no contorno.

3. PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

O método das diferenças finitas ampliado para problemas bidimensionais não apresenta grandes complicações. A aproximação central de diferenças finitas de cada derivada parcial com espaçamento constante nas duas direções é apresentada a seguir.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=x_i, y=y_i} = \frac{u(x_i + h, y_i) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i - h, y_i)}{h^2} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{x=x_i, y=y_i} = \frac{u(x_i, y_i + h) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i, y_i - h)}{h^2} \quad (14)$$

3.1. O método das diferenças finitas aplicado à equação de Laplace

A equação de Laplace é representada pela equação (15).

$$\nabla^2 T(x, y) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

onde T é a temperatura e a equação (15) rege o problema de calor. Com o uso das equações (13) e (14), com T no lugar de u , na equação (15), é possível obter a equação de Laplace pelo método das diferenças finitas.

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(x, y) &= \frac{[T(x_i + h, y_i) + T(x_i, y_i + h) + T(x_i - h, y_i) + T(x_i, y_i - h) - 4T(x_i, y_i)]}{h^2} \quad (16) \\ &= 0 \end{aligned}$$

A equação (16) mostra que o valor da temperatura T em cada ponto da região discretizada deve ser igual à média dos valores de T nos pontos vizinhos da malha.

3.2. O método das diferenças finitas aplicado à flexão de placas

A equação diferencial da flexão de placas sob cargas transversais é dada segundo a equação (17) (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1970).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (17)$$

onde q representa uma carga distribuída e D é a rigidez à flexão da placa $D = Et^3/12(1-\nu^2)$, sendo t a espessura da placa e ν o coeficiente de Poisson.

Apresentam-se casos em que é mais fácil substituir a equação diferencial de quarta ordem deduzida para uma placa por duas equações de segunda ordem que representam as flechas de uma membrana, conforme apresentado na equação (18).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (18)$$

Sabendo que as equações do momento fletor são dadas pelas equações (19) e (20), somando as duas expressões, se obtém a equação (21), introduzindo uma nova notação M .

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (20)$$

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (21)$$

Substituindo a equação (21) na equação (18), é possível reescrever a equação diferencial da flexão de placas (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1970).

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q \quad (22)$$

Aplicando o método de diferenças finitas na equação (22), a equação será representada pela equação (23).

$$M(x_i + h, y_i) + M(x_i, y_i + h) + M(x_i - h, y_i) + M(x_i, y_i - h) - 4M(x_i, y_i) = -qh^2 \quad (23)$$

4. APLICAÇÃO UNIDIMENSIONAL EM VIGAS

Para demonstrar uma aplicação do método das diferenças finitas em um problema unidimensional, será utilizada uma viga engastada livre do tipo isostática com um carregamento distribuído, conforme a Figura 2.

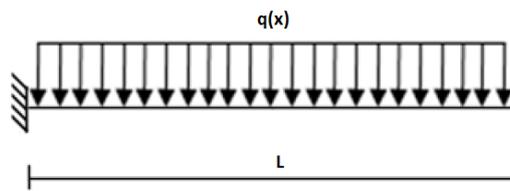


Figura 2 – Viga engastada –livre

O objetivo é comparar os resultados obtidos para o cálculo da flecha ao longo da viga pelo método das diferenças finitas e pelo método analítico para o cálculo da flecha.

4.1. Condições de contorno

No engaste, a flecha é igual a zero (Condição de Dirichlet), então ficará representada conforme a equação (24).

$$w_i = 0 \quad (24)$$

A rotação é determinada segundo a equação (25).

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \quad (25)$$

No engaste, a rotação é igual a zero (condição de Dirichlet), resultando na equação (26).

$$w_{i+1} = w_{i-1} \quad (26)$$

O cortante e o momento são determinados segundos as equações (27) e (28) respectivamente.



$$\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_i = \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2h^3} \quad (27)$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_i = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} \quad (28)$$

Na extremidade livre, os valores do cortante e do momento são iguais a zero, gerando assim as equações (29) e (30).

$$w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2} = 0 \quad (29)$$

$$w_{i+1} = 2w_i - w_{i-1} \quad (30)$$

4.2. Discretização da viga com 5 nós

A viga de estudo é mostrada na figura 3 e tem módulo de elasticidade E , momento de inércia I , comprimento L e está submetida a um carregamento distribuído q .

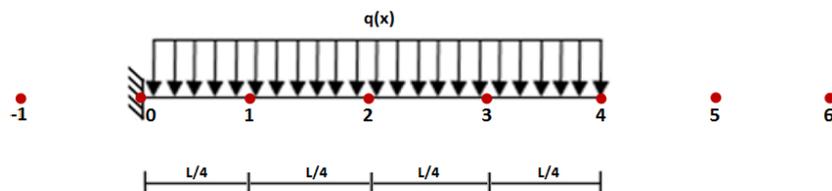


Figura 3 - Viga engastada livre discretizada com 5 nós em diferenças finitas

Deseja-se calcular o valor da flecha em cada nó da viga. Assim, deve-se aplicar a equação (12) nos 5 nós considerados. Aplicando inicialmente nos nós 1, 2, 3 e 4, se obtém:

$$w_3 - 4w_2 + 6w_1 - 4w_0 + w_{-1} = \frac{qh^4}{EI} \quad (31)$$

$$w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0 = \frac{qh^4}{EI} \quad (32)$$

$$w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2 + w_1 = \frac{qh^4}{EI} \quad (33)$$

$$w_6 - 4w_5 + 6w_4 - 4w_3 + w_2 = \frac{qh^4}{EI} \quad (34)$$

De acordo com as condições de contorno vistas anteriormente, são obtidas novas equações para auxiliar na solução do sistema de equações obtido.

No engaste ($i=0$), os valores da flecha e da rotação são iguais a zero. Logo, substituindo $i=0$ nas equações (24) e (26), obtém-se:

$$w_0 = 0 \quad (35)$$

$$w_1 = w_{-1} \quad (36)$$

Na extremidade livre ($i=4$), os valores do cortante e do momento fletor são iguais a zero. Dessa forma, substituindo $i=4$ nas equações (29) e (30), obtém-se:

$$w_5 = 2w_4 - w_3 \quad (37)$$

$$w_6 = 4w_4 - 4w_3 + w_2 \quad (38)$$

Substituindo as equações 35, 36, 37 e 38 nas equações 31, 32, 33 e 34, se obtém o sistema de equações descrito a seguir.

$$\begin{aligned} 7w_1 - 4w_2 + w_3 &= \frac{qh^4}{EI} \\ -4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4 &= \frac{qh^4}{EI} \\ w_1 - 4w_2 + 5w_3 - 2w_4 &= \frac{qh^4}{EI} \\ 2w_2 - 4w_3 + 2w_4 &= \frac{qh^4}{EI} \end{aligned}$$

A representação matricial do sistema de equações está disposta a seguir.

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \frac{qh^4}{EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações, encontram-se os valores da flecha em cada nó considerado. Os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas e pelo método analítico estão dispostos na tabela 1.

Tabela 1 - Comparação dos resultados obtidos

X	y_{Exato}	$y_{\text{Aprox.}}$	Erro
0	0,0000	0,0000	0,0000
0,25	-0,0132 λ	-0,0156 λ	0,0024
0,5	-0,0443 λ	-0,0488 λ	0,0046
0,75	-0,0835 λ	-0,0898 λ	0,0063
1	-0,1250 λ	-0,1328 λ	0,0078

onde $\lambda = \frac{q(x)L^4}{EI}$.

O valor exato da flecha foi calculado segundo a equação (39).

$$EIw(x) = \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3}{6}x + \frac{qL^4}{8} \quad (39)$$

O erro obtido entre os métodos exato e aproximado diminui à medida em que se aumenta o número de nós.

A simplicidade de aplicação do método das diferenças para esta viga, é a mesma para vigas onde o método analítico de cálculo da flecha não é usualmente apresentado nas bibliografias, como, por exemplo, vigas que possuem simultaneamente carregamento e inércia variáveis.

5. APLICAÇÃO BIDIMENSIONAL NA EQUAÇÃO DE POISSON

No item 3.1, apresentou-se a equação de diferenças de finitas para equação de Laplace, neste exemplo apresenta-se uma aplicação bidimensional de um problema descrito pela equação de Poisson $\nabla^2 T = -2$ numa região retangular, $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, com condições de contorno homogêneas, de Dirichlet ($T = 0$) nas faces $x = 3$ e $y = 2$ e de Neumann ($\frac{\partial T}{\partial n} = 0$) em $x = 0$ e $y = 0$. A formulação para a equação de Laplace apresentada em nada se altera para a aplicação formulada pela equação de Poisson.

Considerando o incremento h igual a 1, a região discretizada apresenta-se segundo a Figura 4.

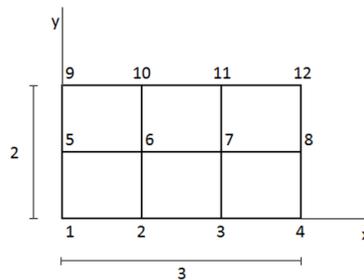


Figura 4 - Região retangular discretizada com 6 elementos

A equação de Poisson aproximada por método das diferenças finitas está apresentada na equação (40).

$$4T(x_i, y_i) - T(x_i + h, y_i) - T(x_i, y_i + h) - T(x_i - h, y_i) - T(x_i, y_i - h) = 2h^2 \quad (40)$$

O problema apresenta seis incógnitas ($T_1, T_2, T_3, T_5, T_6, T_7$). A aplicação desses seis pontos na equação (40), fornece a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

As condições de contorno de Neumann foram calculadas através de uma aproximação de diferença central.

A comparação da solução do sistema com a solução exata é apresentada na Tabela 2.

Tabela 2- Solução de diferenças finitas para problema bidimensional

Ponto	T _{Exato}	T _{Aprox.}	Erro
1	3,225	3,137	0,088
2	2,974	2,887	0,087
3	2,068	1,997	0,071
5	2,451	2,387	0,064
6	2,273	2,206	0,067
7	1,614	1,551	0,063

A solução exata do problema foi calculada segundo a equação (41).

$$T(x, y) = 9 - x^2 - \frac{288}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\cosh(k_n y)}{\cosh(2k_n)} \cos(k_n x) \quad (41)$$

onde $k_n = \frac{(2n+1)\pi}{6}$.

6. APLICAÇÃO BIDIMENSIONAL EM PLACAS SIMPLEMENTE APOIADA

Considerando uma placa quadrada simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída e com incremento igual a ¼ do comprimento da placa nas duas direções ($h=a/4$), nota-se na Figura 5 que, por razões de simetria, é necessário calcular apenas os valores do momento nos pontos 0, 1 e 2 (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1970).

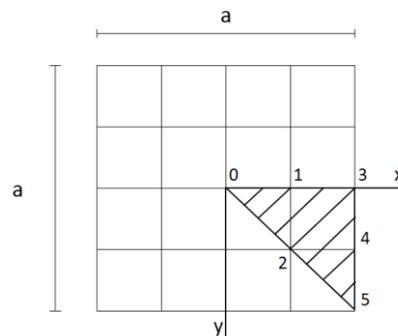


Figura 5 - Discretização da placa

Isso ocorre porque o valor do momento nos pontos 3, 4 e 5 é igual a zero, devido às condições de contorno.

Aplicando a equação (23) nos pontos 0, 1 e 2, se obtém as seguintes equações:

$$\begin{aligned} 4M_1 - 4M_0 &= -qh^2 \\ 2M_2 - 4M_1 + M_0 &= -qh^2 \end{aligned}$$

$$-4M_2 + 2M_1 = -qh^2$$

Resolvendo o sistema e lembrando que $h^2=(a/4)^2$, o valor do momento nos pontos 1, 2 e 3 são obtidos segundo as equações 42, 43 e 44.

$$M_0 = \frac{9}{2} \frac{qa^2}{64} \quad (42)$$

$$M_1 = \frac{7}{2} \frac{qa^2}{64} \quad (43)$$

$$M_2 = \frac{11}{4} \frac{qa^2}{64} \quad (44)$$

onde $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}$.

Para o momento fletor no centro, encontra-se:

$$M = \frac{M_0(1 + \nu)}{2} = \frac{1,39}{2} \frac{qa^2}{64} = 0,0457qa^2 \quad (45)$$

inferior em 4,5% ao valor exato $0,0479qa^2$. Adotou-se $\nu = 0,3$ na equação (45).

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo faz um resgate do uso do método das diferenças finitas como solução numérica dos problemas de engenharia. Diferentemente dos métodos de elementos finitos e métodos de elementos de contorno que precisam de desenvolvimento mais elaborado em suas formulações, o método das diferenças finitas simplesmente aproxima derivadas por diferenças. Este artigo visa encorajar professores dos cursos de engenharia civil e mecânica no uso do método das diferenças finitas na busca de soluções aproximadas de problemas de engenharia. Foram apresentadas aplicações em vigas, problemas regidos pela equação de calor e no importante campo da teoria das placas.

As atuais normas de engenharia exigem a consideração do efeito de incêndio (calor) nas estruturas. O método das diferenças finitas, por não trazer no seu desenvolvimento uma formulação sofisticada, oferece uma excelente alternativa a outros métodos, como o método dos elementos finitos ou o método dos elementos de contorno.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Espírito Santo (FAPES).



8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DEBS, M. H. (1976) – Contribuição ao Cálculo das Cascas de Revolução Mediante Diferenças Finitas, Dissertação de Mestrado, USP-São Carlos, SP.
- IBANESCU, M., VRABIE, M. e SOTROPA, D. D- (2009) – Model for flexible plates supported on piles, Buletinul Institutului Politehnic Din Iasi, Tomus LV (LIX), Fasc. 1., Servia.
- MACHADO, F. C. (2013). Análise Computacional via MDF de Cascas Cilíndricas com Restrições Bilaterais e Unilaterais de Contato. Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.
- MICKENS, R. E. (2005) – Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes, World Scientific Publishing Co., USA.
- MITTELBAACH, F. R. (2002) – Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Reservatórios Cilíndricos, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- MITTELBAACH, F. R. (2007) – Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Dinâmica de Problemas Axissimétricos de Placas Delgadas e Espessas, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- SOARES, Alexandre Andrade Brandão; UNIVERSIDADE DA AMAZÔNIA. O Método das Diferenças Finitas aplicado à Teoria das Vigas, 2010. Monografia (Graduação)
- SZILARD, R. (2004) – Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.
- TIMOSHENKO, Stephen; WOINOWSKY-KRIEGER, S. 'Teoría de Placas y Láminas'. Bilbao: Urmo, 1970
- VIEIRA, A. P. G. (2007) – “Método das Diferenças Finitas Energéticas Versus Método dos Elementos Finitos na Análise dos Efeitos de Perturbação de Bordo em Cascas Cilíndricas Axissimétricas”, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- WROBEL, L. C; IEGER, S; ROSMAN, P. C; TUCCI, C, E. Métodos Numéricos em Recursos Hídricos. Rio de Janeiro: ABRH. 380p. 1989.

RESCUING THE FINITE DIFFERENCE METHOD IN NUMERICAL SOLUTIONS OF STRUCTURAL ENGINEERING

Abstract: *In general almost all problems in engineering and physical sciences may be governed by a differential equation. A differential equation is an equation involving an unknown function and its derivatives. Beyond the ordinary differential equations there are*



ordinary and partial equations subject to boundary conditions. It is not always possible to find analytical solutions of these differential equations and several are the approximate methods to their solutions, among which stand out the finite element method, the boundary element method and finite volume method. The finite element method is undoubtedly the most popular among these methods. All these methods are based on the discretization process, reducing the continuous domain into a discrete domain, where they seek the solutions in finite number of nodal points. These methods have sophisticated developments to their formulations. This article presents the simplest and most ancient method to approximate solutions of differential equations. This is the finite difference method, which replaces the partial derivatives of the continuum into discrete differences formulas and their application in a finite number of points in the domain of validity of the problem. This work proposes to rescue the use of finite difference method in structural engineering in a pedagogical approach way, very important to encourage its use in the teaching of numerical solutions of engineering problems. Their applications in beams, problems governed by the Laplace equation and plates are shown.

Key-words: *numerical methods, Finite difference method, Structural engineerin*