

INTEGRAÇÃO DE CONTEÚDOS – UTILIZAÇÃO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICA, COMPUTACIONAL E EXPERIMENTAL EM UM EXERCÍCIO CLÁSSICO DOS CURSOS DE ENGENHARIA

Joel Lima - joellima@globo.com.br

Nilton da S. Maia - niltonmaia@des.cefetmg.br

Departamento de Engenharia de Materiais - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG - Nova Suíça, Belo Horizonte, MG, Brasil
CEP 30421-169 – Belo Horizonte – MG.

Gisele M. Silva - giselemols@uai.com.br

Walisson R. S. Guimarães - wrguimaraes@yahoo.com.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUCMINAS - Coração Eucarístico, Belo Horizonte, MG, Brasil - CEP 30535-901 – Belo Horizonte – MG.

Resumo: Na engenharia contemporânea, a utilização sistemática de modelamento matemático e principalmente de simulação computacional é a alternativa mais viável para aperfeiçoar e avaliar projetos em sua fase de concepção, com vantagens técnicas e econômicas. Em razão deste fato, é crescente no mercado de trabalho a demanda por engenheiros especialistas nesta área e, também, por engenheiros recém-formados que demonstraram interesse durante o curso de graduação pela engenharia assistida por computador. Diante desta realidade, os professores dos cursos de engenharias tentam oferecer oportunidades para que os alunos possam melhor assimilar a utilização de tais ferramentas. Observa-se, no entanto, grande dificuldade de parte dos alunos em perceber a correlação existente entre a base matemática que estrutura os principais softwares, as soluções obtidas e o quanto estas se aproximam da realidade. A ideia central deste trabalho é mostrar que esta dificuldade pode ser minimizada, por exemplo, com a integração de conteúdos e o desenvolvimento de exercícios práticos, comparando dados experimentais obtidos com resultados de simulação, podendo-se, ainda, relacionar as soluções analítica, experimental e computacional com os modelos matemáticos em que se baseia o método de elementos finitos, base dos principais softwares.

Palavras-chave: Elementos finitos, Análise de deformação, Solução Analítica, Simulação Computacional.

1. INTRODUÇÃO

O artigo apresenta, de forma resumida, um clássico exercício originalmente elaborado para melhor compreensão do estudo de tensões e deformações nas disciplinas de mecânica

aplicada e ou resistência dos materiais, que compõem a grade da maioria dos cursos de engenharia. Neste trabalho, o exercício é resolvido nas formas analítica convencional - mecânica técnica, análise experimental utilizando extensômetros elétricos - *strain gages*, analítica por elementos finitos e, também, simulação computacional com a utilização de um software comercial, permitindo ao aluno de engenharia comparar os resultados obtidos.

2. DESENVOLVIMENTO

O objetivo do exercício proposto é determinar a deformação elástica provocada por uma carga aplicada ao sistema representado na “Figura 1”.



Figura 1- Carregamento de uma viga com entalhe.

A existência de um entalhe na viga tem função didática - enfatizar a assimilação do conteúdo relacionado a concentradores de tensões em sistemas mecânicos.

No desenvolvimento do trabalho, os alunos realizam a solução do exercício de forma convencional e, posteriormente, em laboratório de análise experimental de tensões, realizam a montagem do sistema e efetuam as medições.

Na sequência, é desenvolvida a solução pelo método de elementos finitos – FEM (*Finite Elements Method*), utilizando os conceitos matemáticos adotados para modelar o sistema em estudo e que também servem de base para a concepção dos principais softwares disponíveis no mercado. Nesta etapa é necessário utilizar um programa de cálculos numéricos em razão dos inúmeros cálculos exigidos para a obtenção da solução. Finalizando, os dados do problema ou exercício, são introduzidos em um software de simulação computacional – versão educacional.

Embora a exclusão de detalhes possa comprometer a compreensão das soluções obtidas, a mesma se faz necessária em razão do extenso desenvolvimento que o trabalho exige. Contudo, a divulgação deste artigo não tem relação com os resultados das soluções e sim com o estímulo a integração de conteúdos, que aumenta o interesse dos alunos pelo curso e eleva a qualidade destes, por aproximar os alunos das demandas sinalizadas pelo mercado de trabalho.

3. SOLUÇÃO CONVENCIONAL E EXPERIMENTAL

Para a solução do exercício pelo método convencional, é necessário construir o esquema das forças atuantes e das reações sobre o sistema. Baseado nas dimensões e nas especificações do material da viga, a carga máxima que o sistema suporta e a deformação imposta por uma determinada carga, que permita a análise do comportamento elástico da viga, são calculados. A “Tabela 1” apresenta as propriedades mecânicas do material.

Tabela 1 – Dados do material da viga.

Material da Viga	E (Módulo de elasticidade)	σ_e (Limite de escoamento)
Aço Carbono baixo carbono AISI 1020	200 GPa	351 MPa

A “Figura 2” esboça o esquema das forças atuantes e das reações sobre o sistema.

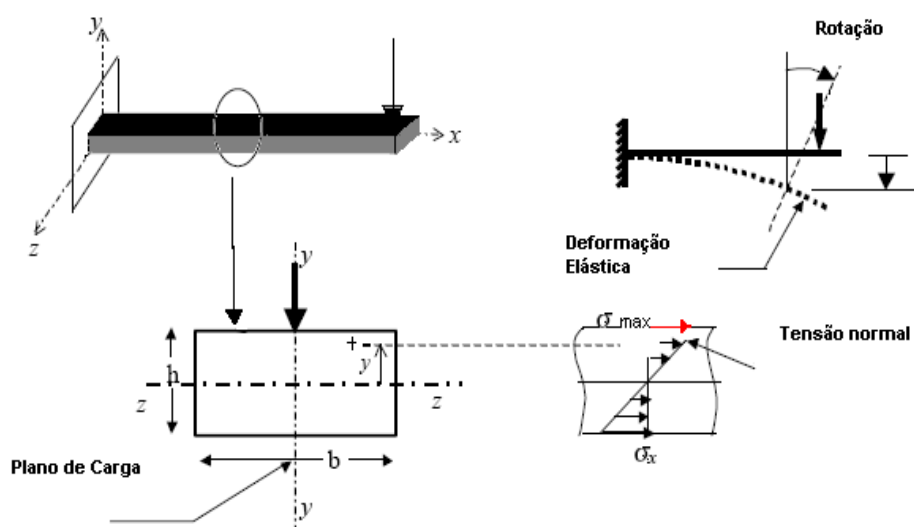


Figura 2 - Análise dos esforços e determinação do momento de inércia.

A partir das dimensões da barra e posição da carga, definidas na “Figura 3”, é calculada a deformação elástica máxima prevista para o sistema, obtendo como resultado 421N.

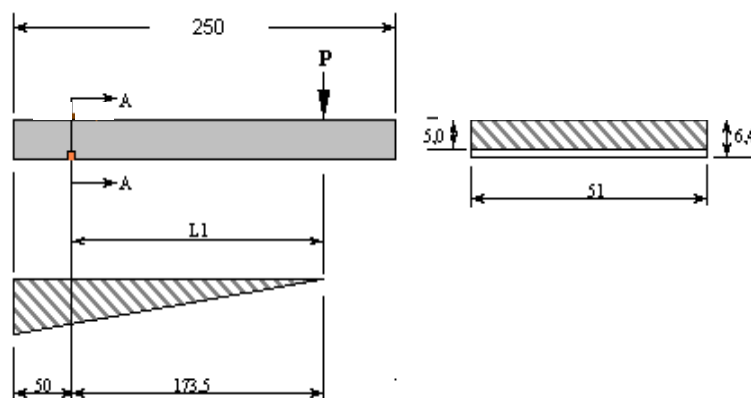


Figura 3 - Esboço da barra com posição da carga.

Considerando-se uma carga de 300N, inferior a carga máxima obtida, a deformação é calculada, obtendo-se os resultados apresentados na “Tabela 2”.

Tabela 2 - Solução utilizando os conceitos de mecânica técnica

Conceitos		Dados da viga (conforme Figura 3)			Estimado	Resultado	
σ_f (Tensão de flexão)	W_x (Momento de inércia)	b (mm)	h_1 (mm)	L_1 (mm)	P (carga) (N)	Carga Máxima prevista (N)	Deformação prevista para carga de 300N (mm)
M_f / W_x	$bh^2 / 6$	51	5	173,5	300	421	$1,223 \times 10^{-3}$

O sistema é, então, reproduzido em laboratório para medição da deformação provocada pela carga escolhida, neste caso, de 300 N. As “Figuras 4, 5 e 6” apresentam detalhes sobre o posicionamento dos *strain gages* na barra.

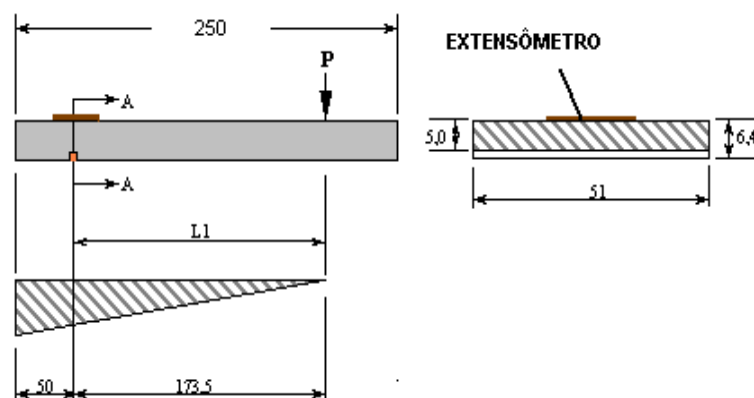


Figura 4 - Esboço da barra com a localização do *strain gages*.

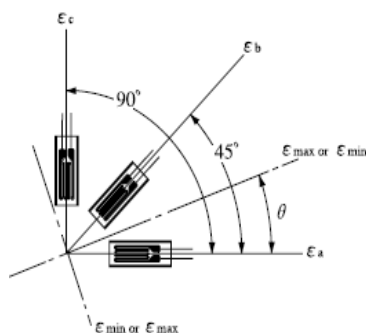


Figura 5 - Circuito Modelo de Strain Gages projetado.



Figura 6 - Circuito Modelo de Strain Gages aplicado.

Concluída a montagem do sistema, a barra é carregada com blocos de massa equivalente a múltiplos de 10 N, com o objetivo de monitorar a deformação que ocorre na mesma - “Figuras 7 e 8”.



Figura 7 - Barra carregada para medições.



Figura 8 - Deslocamento da viga.

Toda a prática é executada pelos alunos que realizam a montagem do sistema, a instalação dos *strain gages* e as medições da deformação da barra, indicadas pela ponte de *Wheatstone*.

4. SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1. Solução por elementos finitos

Pela teoria das vigas, a “Equação (1)” para feixe de deformação em duas dimensões diz respeito à flexão (curvatura):

$$EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} = M(x) \quad (1)$$

No FEM, um elemento de viga sob flexão pode ser representado pela “Figura 9”:

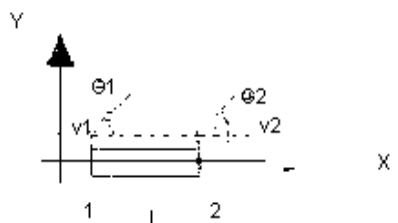


Figura 9 – Elemento de viga sob flexão com 4 graus de liberdade.

Para o elemento representado pela “Figura 9” temos 4 graus de liberdade, sendo 2 deslocamentos verticais em relação a y e 2 rotações em z. Ou seja:

$$q = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}$$

Usando o FEM, a deformação em qualquer local ao longo da viga pode ser escrita pela “Equação (2)”:

$$v(x) = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 \quad \text{ou} \quad v(x) = [N] \{q\} \quad (2)$$

O FEM utiliza funções de aproximação $[N]$ que relacionam, por exemplo, deslocamentos gerais a deslocamentos nodais.

Os programas comerciais utilizam polinômios de 1º grau para tal aproximação. Porém, pode-se observar que a solução da equação diferencial para vigas pode ser representada por um polinômio de 3º grau. Isso significa que utilizando tais polinômios encontra-se não uma aproximação para a solução, mas sim a solução exata para o elemento em questão. Baseando-se na “Equação (1)” pode-se escrever a “Equação (3)”:

$$[N] = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 2x^3 - 3x^2L + L^3 & x^3L - 2x^2L^2 + xL^3 & -2x^3 + 3x^2L & x^3L - x^2L^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Por substituição de equações, demonstra-se que a matriz de rigidez $[K]$ de um elemento de Viga é dada por:

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia e L o comprimento do elemento. Desta forma, a viga em estudo resume-se a: $[K_e] \{q_i\} = \{p_i\} \quad i=1 \rightarrow 4$ graus de liberdade ou na forma matricial:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Onde $P1/P2$ são cargas aplicadas e $M1/M2$ momentos fletores atuantes nos nós 1 e 2. Para um elemento de viga admite-se que:

- a) a seção transversal do elemento é constante ao longo de seu comprimento.
- b) a seção transversal é pequena comparada com o comprimento.
- c) a tensão e a deformação variam linearmente através da seção.

Devido à consideração b), não se pode criar um elemento que possa representar o rasgo utilizando elementos de viga, por esse motivo o mesmo será desprezado. Isso

claramente provocará diferenças entre os valores coletados experimentalmente e aqueles obtidos através do uso desses elementos. Porém, este artigo além de comparar os resultados experimentais, numéricos e aqueles obtidos através de um software comercial, também tem como objetivo mostrar, de uma forma simples, como são feitos os cálculos usando o FEM, para que dessa forma, o aluno possa ter uma visão geral de como as análises são realizadas e através disso possa questionar e tirar suas próprias conclusões.

Cálculo utilizando Elementos de Viga:

Conforme mostra a “Figura 10”, para a estrutura da viga do exercício foram utilizados dois elementos, onde a união entre os mesmos é colocada exatamente no ponto onde se encontra o rasgo na peça. Observa-se que o problema de uma peça tridimensional onde normalmente são usados elementos sólidos 3D é reduzido a uma simples aproximação no plano, onde se trabalha com apenas 6 graus de liberdade.



Figura 10 – Elemento de viga sob flexão.

Assim, é necessário encontrar uma matriz de rigidez global, ou seja, para todo o sistema. Isso é feito através da soma das matrizes de rigidez de cada elemento no qual o sistema contínuo foi discretizado e definido da seguinte forma:

$$[K_G]\{q_G\} = \{p_G\}$$

Como a discretização aqui usada se trata de 2 elementos de viga, a matriz global será a soma da matriz de rigidez dos 2 elementos.

Matriz de rigidez para o elemento I:

$$K_I = \frac{E_I I_I}{L_I^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_I & -12 & 6L_I \\ 6L_I & 4L_I^2 & -6L_I & 2L_I^2 \\ -12 & -6L_I & 12 & -6L_I \\ 6L_I & 2L_I^2 & -6L_I & 4L_I^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez para o elemento II:

$$K_{II} = \frac{E_{II} I_{II}}{L_{II}^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_{II} & -12 & 6L_{II} \\ 6L_{II} & 4L_{II}^2 & -6L_{II} & 2L_{II}^2 \\ -12 & -6L_{II} & 12 & -6L_{II} \\ 6L_{II} & 2L_{II}^2 & -6L_{II} & 4L_{II}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez global:

Para o sistema temos 2 elementos e 6 graus de liberdade, dado pela “Equação 4”.

$$[K_G]\{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2 \ v_3 \ \theta_3\}^T = \{P_1 \ M_1 \ P_2 \ M_2 \ P_3 \ M_3\}^T \quad (4)$$

Conclui-se que a matriz global deve ser uma matriz 6x6. Como os 2 elementos são do mesmo material, ou seja, $EI = EII$, e a seção transversal não varia de um elemento para o outro, $II = III$, as únicas propriedades que variam são os comprimentos L_I e L_{II} . Dessa forma temos:

$$K_G = EI \begin{bmatrix} 12/L_I^3 & 6/L_I^2 & -12/L_I^3 & 6/L_I^2 & 0 & 0 \\ 6/L_I^2 & 4/L_I & -6/L_I^2 & 2/L_I & 0 & 0 \\ -12/L_I^3 & -6/L_I^2 & 12/L_I^3 + 12/L_{II}^3 & -6/L_I^2 + 6/L_{II}^2 & -12/L_{II}^3 & 6/L_{II}^2 \\ 6/L_I^3 & 2/L_I & -6/L_I^2 + 6/L_{II}^2 & 4/L_I + 4/L_{II} & -6/L_{II}^2 & 2/L_{II} \\ 0 & 0 & -12/L_{II}^3 & -6/L_{II}^2 & 12/L_{II}^3 & -6/L_{II}^2 \\ 0 & 0 & 6/L_{II}^2 & 2/L_{II} & -6/L_{II}^2 & 4/L_{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Aplicando as condições de contorno, verifica-se o engaste no nó 1; com isso $v_1 = 0$ e $\theta_1 = 0$;

$$K_G = EI \begin{bmatrix} 12/L_I^3 + 12/L_{II}^3 & -6/L_I^2 + 6/L_{II}^2 & -12/L_{II}^3 & 6/L_{II}^2 \\ -6/L_I^2 + 6/L_{II}^2 & 4/L_I + 4/L_{II} & -6/L_{II}^2 & 2/L_{II} \\ -12/L_{II}^3 & -6/L_{II}^2 & 12/L_{II}^3 & -6/L_{II}^2 \\ 6/L_{II}^2 & 2/L_{II} & -6/L_{II}^2 & 4/L_{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

A matriz para a solução do problema é:

$$[K_G] \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Condições de carregamento:

Não existem momentos atuantes em nenhum dos nós $M_1 = M_2 = 0$, para o caso das cargas, $P_1 = 0$ e $P_2 = -300N$ (direção -y), o que equivale a uma aproximação do experimento realizado em laboratório, ou seja, considera-se que a carga está atuando ao longo da seção transversal que corta o centro do furo.

Dados: $L_I = 25,5 \text{ mm}$, $L_{II} = 173,5 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$ e $I = bh^3/12 = 51(5,0)^3/12 = 531,25\text{mm}^4$.

Resolvendo o sistema encontramos:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ mm} \\ 0 \text{ rad} \\ -0.2 \text{ mm} \\ -13.4 \text{ rad} \\ -7.4 \text{ mm} \\ -55.9 \text{ rad} \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Para o cálculo da deformação máxima, utiliza-se a “Equação 5”:

$$[B] = \frac{-y}{L^3} \begin{bmatrix} 12x - 6L & 6xL - 4L^2 & -12x + 6L & 6xL - 2L^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ou seja, para Elemento II:

$$\{\varepsilon\}_{II} = [B]_{II} \{q\}_{II} \quad \{\varepsilon\}_{II} = [B]_{II} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Para o Elemento II temos $L_{II} = 173.5 \text{ mm}$, $y = 2.5 \text{ mm}$ para $x = 0$, então:

$$\{\varepsilon\} = 1,225 \times 10^{-3}$$

4.2. Solução pelo método computacional

Para a resolução do exercício proposto foi utilizado um *software* de simulação computacional (versão educacional), em cujo programa foram lançados os dados da viga, as condições de contorno do sistema de carregamento e a carga para qual se pretende medir a deformação. Cabe salientar a necessidade de se transferir para o programa as dimensões e forma do sistema por meio de um desenho tridimensional (3D) em arquivo de extensão *.stl*, para possibilitar sua renderização (definição da malha). As “Figuras 11 a 16” apresentam as etapas do processo de simulação.

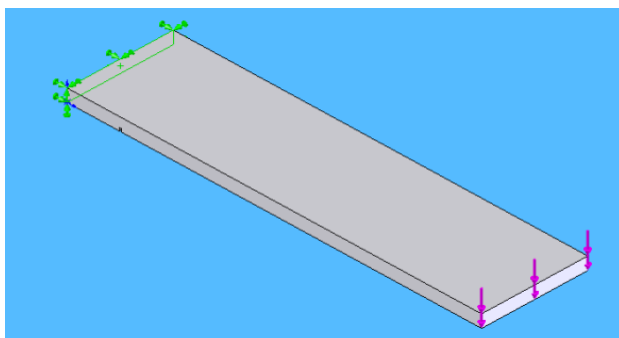


Figura 11 - Carregamento e restrições.

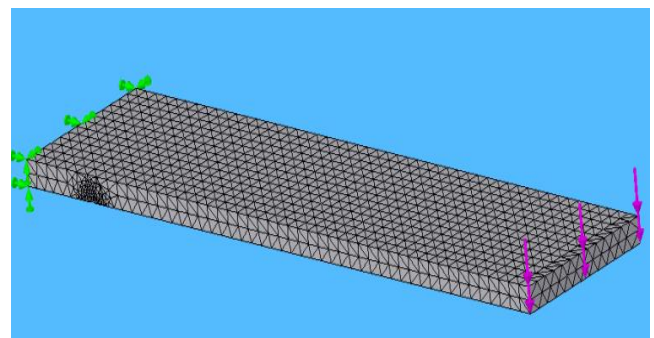


Figura 12 - Definição da malha para a simulação.

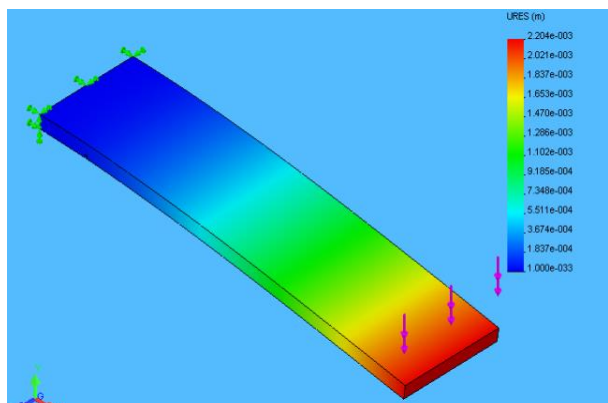


Figura 13 - Resultado da simulação para a deformação.

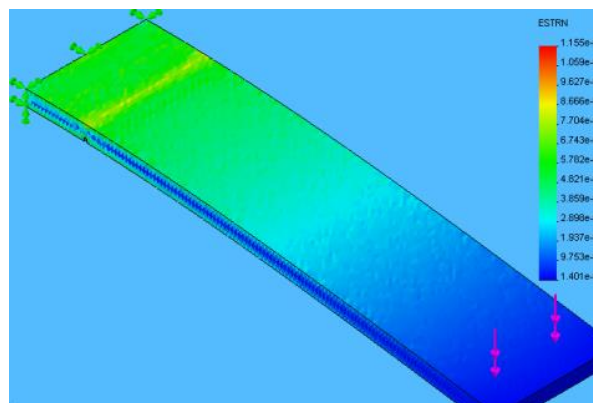


Figura 14 - Resultado da simulação para a tensão.

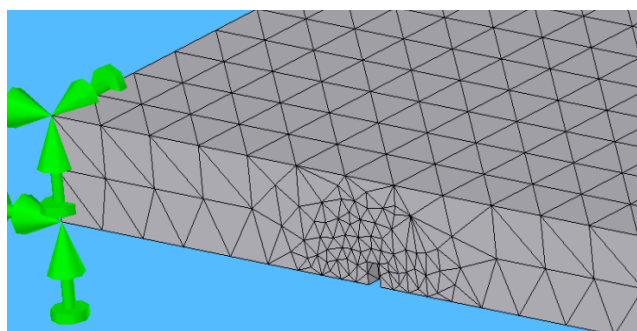


Figura 15 - Malha refinada na região do entalhe.

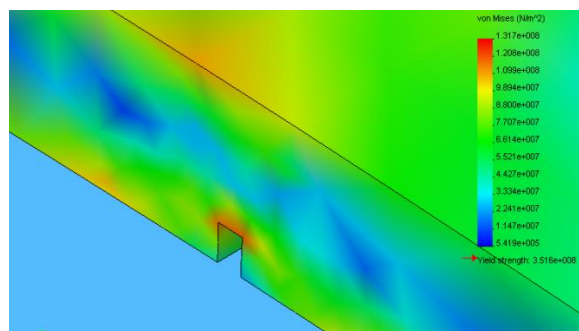


Figura 16 - Tensões na região do entalhe

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Análise dos resultados

Os resultados obtidos para a deformação imposta a barra de aço submetida à flexão por uma carga de 300 N demonstram a plena convergência das soluções para os diferentes métodos aplicados, conforme mostra a “Tabela 3”.

Tabela 3 - Resultados das solução obtidas pelos diferentes métodos.

Métodos	Convencional (Mecânica)	Extensômetros Elétricos	Elementos Finitos	Simulação Convencional
Valores (mm)	$1,223 \times 10^{-3}$	$0,949 \times 10^{-3}$	$1,225 \times 10^{-3}$	$1,155 \times 10^{-3}$

Conclusões

A prática de análise de deformação, considerando simultaneamente solução convencional, experimental, análise numérica e simulação por meio de software, propicia aos alunos do curso de engenharia um melhor entendimento das técnicas utilizadas, principalmente pela validação de resultados proporcionada pelo conhecimento da solução esperada, obtido com a aplicação sequencial dos métodos.



A aplicação de exercícios práticos durante o curso de engenharia, em que métodos analíticos e recursos computacionais se complementem, favorece uma melhor preparação do engenheiro para trabalhar com a engenharia assistida por computador no mercado de trabalho.

Observações

As análises referentes aos demais aspectos que decorrem do experimento, como metodologia da medição, variações dimensionais do corpo de prova, deslocamentos, tensões, recursos do software e propriedades dos materiais, foram desconsideradas em função das limitações necessárias a publicação.

A análise experimental utilizando os *strain gages* tem sua solução condicionada ao perfeito funcionamento destes, que devem ser cuidadosamente especificados e posicionados sobre a superfície submetida à deformação.

Diferentes simulações utilizando malhas maiores para a barra confirmaram a teoria de que a definição da malha é essencial para a qualidade da solução apresentada, ou seja, quanto maior o refinamento da malha, melhor a solução obtida na simulação.

Em análise simulada para a barra, desconsiderando a existência do entalhe, o resultado para a deformação foi de $0,820 \times 10^{-3}$ mm. Isto evidencia que o entalhe influencia fortemente o comportamento da barra submetida à flexão, tanto no aspecto das concentrações de tensões quanto na redução de sua resistência mecânica.

6. REFERÊNCIAS / CITAÇÕES

Livros:

- ALVES FILHO, A.. Elementos finitos: A base da tecnologia CAE, São Paulo: Érica. 2000
AZEVEDO, A.F.M. Barros. Método dos Elementos Finitos, Universidade do Porto. 2003.
COOK R.D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E., e WITT, R.J., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, 4th edition, October 2001.
HUGHES, 2000, T.J.R., The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications, 2000.
MELCONIAN, S. Mecânica técnica e resistência dos materiais. 18. ed. São Paulo: Érica, 2011.
TIMOSHENKO, Stephen P.. Resistência dos materiais. Rio de Janeiro: LTC, 1985.

INTEGRATION OF CONTENTS - USE OF ANALYTICAL, COMPUTER AND EXPERIMENTAL SOLUTIONS IN A CLASSIC EXERCISE OF ENGINEERING COURSES

Abstract: *In contemporary engineering, the systematic use of mathematical modeling and computer simulation is mainly the most viable alternative to improve and evaluate projects in their design, with technical and economical advantages. Due to this, it is increasing in the labor market the demand for skilled engineers in this area and also for newly graduated engineers who have showed interest during the undergraduate course for computer-aided engineering. Teachers in engineering courses try to provide opportunities for students to*



better assimilate the use of such tools. We observe, however, great difficulty by the students to realize the correlation between the mathematical basis that major software structure, the solutions obtained and how they approach the reality. The central idea of this work is to show that this difficulty can be minimized, for example, with the integration of content and the development of practical exercises, comparing experimental data with simulation results, and we can also relate the analytical solutions and experimental computing with mathematical models that underpin the finite element method, the main software base.

Keywords: *Finite elements, Analysis of deformation, Analytical solution, Computer simulation.*