INTERDISCIPLINARIDADE: MECÂNICA DOS SÓLIDOS E MÉTODOS NUMÉRICOS ENTRELAÇADOS

Maris Stela Carmo Silveira – mstela@unifei.edu.br
Instituto de Engenharia Mecânica - IEM

Jair Cunha Filho – jair@unifei.edu.br
Instituto de Matemática e Computação – IMC

Universidade Federal de Itajubá
Av BPS, 1303 - Pinheirinho
37500-903 – Itajubá – MG

Resumo: *Este artigo apresenta entrelaço das disciplinas Mecânica dos Sólidos, Cálculo e Métodos Numéricos como instrumento integrador do conhecimento aplicado à turma do 3º período do curso de Engenharia Elétrica. Conduzir o aluno na construção do saber sistematizando conhecimentos é papel do professor atento ao crescimento do educando resultando em parceria positiva e motivadora. O discente experimenta na interdisciplinaridade o desenvolvimento gradual das competências inerentes à realização das atividades. Relatos são descritos convergindo positivamente como ganho de experiência e aprendizado bem como para solicitação de mais atividades interdisciplinares. Os alunos devem ser preparados para atuar nas diversas áreas da engenharia de forma dinâmica, ativa e destemida.*

Palavras-chave: *Interdisciplinaridade, Mecânica sólidos, Método Simpson*

1. INTRODUÇÃO

A interdisciplinaridade, em contraposição ao currículo tradicional, deve fornecer ao aluno os instrumentos necessários para compreender e fazer uso das informações complexas que recebe do mundo e tornar-se capaz e plenamente ciente de suas atitudes, direitos e deveres. (KLEIMAN & MORAES,1999). No contexto escolar, muitas vezes observa-se uma dificuldade na harmonia do processo pedagógico, onde embates são travados entre o sistema, o educando e educador. A interdisciplinaridade vem ao encontro desta necessidade, estabelecendo o sentido de unidade mediante uma visão de conjunto tornando significativas as informações recebidas. Na escola, na universidade e, por que não dizer nos cursos de engenharia, não são raros os alunos que não conseguem estabelecer uma relação entre a teoria ensinada na sala de aula e a sua prática cotidiana. (GARRUTTI & SANTOS, 2004). A pedagogia de projetos é utilizada para romper as barreiras que separam as disciplinas. O professor deve ser um permanente aprendiz na busca de caminhos onde impere a criatividade em processos interativos em que o aluno se torne agente ativo em seu próprio aprendizado. Este processo deve estar baseado num dinamismo de ações em função da velocidade de transmissão das informações. É urgente a criação de práticas de ensino que visem o estabelecimento da dinamicidade nas relações entre as diversas disciplinas. Conforme mostram os estudos de Piaget (1970), a restrição ao limite disciplinar, raramente, contribui para a compreensão das informações em seu contexto. Para Demo (1998), a interdisciplinaridade é a arte do aprofundamento com sentido de abrangência, para dar conta, ao mesmo tempo, da particularidade e da complexidade do real. O fruto desta interatividade facilitará o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias ao futuro profissional.

2. A PROPOSTA

> *"As disciplinas básicas do Curso de Engenharia precisam capacitar os aprendizes a relacionar os conceitos matemáticos com situações reais e desenvolver o raciocínio dedutivo, habilitando-os a lerem os textos matemáticos e a interpretarem fenômenos. Esta ligação entre o universo da Matemática e o mundo das relações dos objetos físicos entre si talvez capture o que seria a competência técnica de mais alto nível para qualquer engenheiro" (SOARES & SAUER, 2004, p. 265).*

É comum alunos evidenciarem que disciplinas de cálculo, além de apresentarem um conteúdo extenso, não contemplam situações aplicáveis em suas atividades laborais. É nesse processo que idéias inspiram projetos e os professores elaboram avaliações coletivas. Visando a interatividade, uma atividade interdisciplinar foi proposta dentro da disciplina de Mecânica dos Sólidos ofertada aos alunos do 3º período do curso de Engenharia Elétrica no primeiro semestre de 2014. Entrelaçar disciplinas de cálculo (já cursada) e métodos numéricos (ainda a ser cursada) propondo a obtenção do momento de inércia e o raio de giração, analítica e numericamente, bem como o cálculo do erro, propiciou tal interação alcançando o aprendizado esperado. Apesar da quantidade de alunos em sala de aula (110) o professor negando-se a olhar a quantidade, vê além: "o potencial da turma". A atividade foi proposta em um período curto, uma semana, testando o espírito de organização de cada equipe: estudar, aprender a ferramenta numérica, distribuir tarefas, escolher programas adequados para a plotagem das curvas, bem como realizar tarefas de outras disciplinas paralelas, levou a turma a aprender a administrar o tempo, que é "precioso". Divididos em equipes, os alunos contaram com o apoio do co-autor deste artigo, o professor do Instituto de Matemática e Computação executando a tarefa de forma prazerosa e obtendo excelentes resultados.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1 Momento de inércia de área

O momento de inércia de área representa o momento de segunda ordem e é calculado com o objetivo de analisar situações de resistência e estabilidade de elementos mecânicos e estruturais. Alguns momentos de inércia são tabelados, enquanto outros são calculados pelo auxílio de integrais (partindo-se de elementos infinitesimais de área) e quando complexos, através de métodos numéricos. Pode-se também, através do Teorema dos eixos paralelos, calcular o momento de inércia em relação a outros eixos. Caso a seção transversal seja composta por várias figuras conhecidas, o momento de inércia total é obtido somando os momentos individuais de cada figura em particular.

A "Figura 1" apresenta a área A apoiada no plano xy.

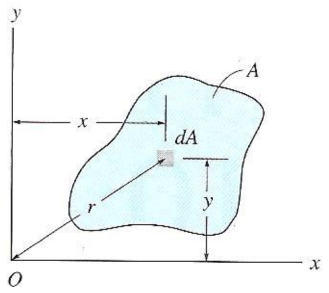

Figura 1 – Área A no plano xy

Por definição os momentos de inércia de área plana infinitesimal dA em relação aos eixos x e y são dados pela "Equação (1)":

$$dI_x = y^2 dA \ \text{ e } \ dI_y = x^2 dA \tag{1}$$

Por integração, os momentos de inércia são dados pela "Equação (2)":

$$I_x = \int_A y^2 dA \ \text{ e } \ I_y = \int_A x^2 dA \tag{2}$$

Se o momento de inércia de uma área em relação aos eixos centroidais (centro geométrico) é conhecido, então a inércia é obtida aplicando o teorema dos eixos paralelos. A "Figura 2" ilustra esta teoria.

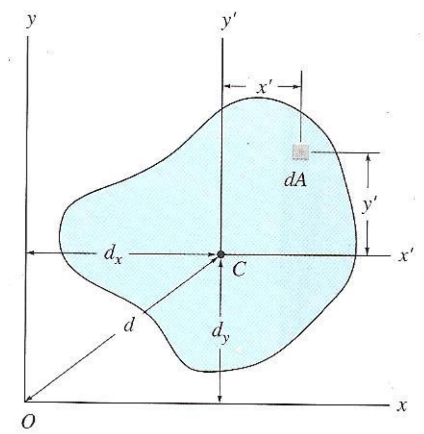

Figura 2 – Teorema dos eixos paralelos.

O elemento de área dA está localizado a uma distância y' do eixo x' que passa por C e d_y denota a distância fixa entre os eixos paralelos x e x'. Como a segunda integral é nula e a primeira é o momento de inércia da área em relação aos eixos que passam pelo centróide ($I'_{x'}$), obtém-se a "Equação (3)" a seguir

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2 dA$$
$$= \int_A (y')^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA$$

$$I_x = I'_{x'} + A d_y^2 \qquad (3)$$

De modo análogo, obstemos a "Equação (4)"

$$I_y = I'_{y'} + A d_x^2 \qquad (4)$$

3.2 Raio de giração

O raio de giração de uma área é a distância que a área da superfície deve se concentrar de modo que seu momento de inércia em relação a ambos os eixos x e y não se altere. É uma quantidade frequentemente utilizada pela mecânica estrutural no projeto de colunas e é apresentada conforme "Equação (5)"

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{e} \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (5)$$

3.3 Método Numérico

A regra $1/3$ de Simpson repetida foi utilizada pelos alunos para a obtenção de uma aproximação para as integrais propostas e comparar com o valor obtido analiticamente. A regra é baseada no uso de repetidas vezes a regra de Simpson, que consiste em interpolar a função em 3 pontos, através de um polinômio interpolador na forma de Lagrange.

A Interpolação Polinomial

Seja f uma função tabelada em $n + 1$ pontos, conforme "Tabela 1".

Tabela 1 – Função tabelada

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

A interpolação polinomial consiste em obter um polinômio, "Equação (6)", de grau menor ou igual a n tal que

$$f(x_k) = p(x_k), k = 0,1, \dots, n. \qquad (6)$$

Sendo

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

a "Equação (7)" apresenta o sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases} \quad (7)$$

A matriz dos coeficientes é de Vandermonde e, como os $n+1$ pontos são distintos, seu determinante é diferente de zero e, portanto, a solução do sistema é única. Desta forma existe um único polinômio $p_n(x)$ de grau menor do que ou igual a n, apresentado conforme "Equação (8)" tal que:

$$p_n(x_k) = f(x_k), \; k = 0,1,2, \dots, n, \quad (8)$$

desde que $x_k \neq x_i, \; k \neq i$.

A Forma de Lagrange

A forma de Lagrange para o polinômio interpolante é aquela que consiste em representar $p_n(x)$ conforme "Equação (9)"

$$p_n(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + \cdots + L_n f(x_n).$$

Para se ter $p_n(x_k) = f(x_k)$, deve ocorrer

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \quad (9)$$

Pela "Equação (10)" define-se:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (10)$$

onde $L_k(x)$ e, portanto, $p_n(x)$, é polinômio de grau menor do que ou igual a n, com as condições (10) satisfeitas.

A regra 1/3 de Simpson

Seja f uma função integrável em $[a, b]$. O objetivo é obter uma aproximação para $\int_a^b f(x)dx$. A regra 1/3 de Simpson consiste em tabelar f em 3 pontos x_0, x_1 e x_2 (com $x_0 = a$ e $x_2 = b$) igualmente espaçados e aproximar f pelo polinômio $p_2(x)$, na forma de Lagrange, "Equação (11)"

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \quad (11)$$

Sendo $x_0 = a, x_1 = a + h$ e $x_2 = a + 2h$, obtemos a "Equação (12)"

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx \quad (12)$$

Indicando por I_S a última integral, obtemos a "Equação (13)"

$$I_S = \frac{f(x_0)}{2h^2} \times \int_{x_0}^{x^2} (x - x_1)(x - x_2)dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \times \int_{x_0}^{x^2} (x - 0)(x - x_2)dx + \frac{f(x_2)}{2h^2} \times \int_{x_0}^{x^2} (x - x_0)(x - x_1)dx \quad (13)$$

Calculando as integrais, obtém-se a "Equação (14)"

$$I_S = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (14)$$

A regra 1/3 de Simpson repetida

A regra 1/3 de Simpson repetida consiste em aplicar a regra 1/3 de Simpson repetidas vezes. Como cada parábola usará 3 pontos consecutivos, devemos tabelar f em $m + 1$ pontos consecutivos $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n$, com $m \geq 4$ par, e igualmente espaçados com espaçamento h, apresentado conforme "Equação (15)"

Isto é

$$I_{SR} = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x) + f(x_3) + \cdots + f(x_{m-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{m-2})) + f(m)] \quad (15)$$

O erro

Pode-se mostrar que se a quarta derivada de $f,\ f^{(4)}(x)$, é contínua em $[x_0, x_m]$, então o módulo do erro cometido pela regra 1/3 de Simpson $(|E_{SR}|)$ é apresentado conforme "Equação (16)"

$$|E_{SR}| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4, \quad (16)$$

onde $a = x_0$, $b = m$ e M_4 é o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ em $[x_0, x_m]$.

3.4 Etapas desenvolvidas pelos alunos

Cada equipe recebeu uma função distinta. Para ilustrar o passo a passo da atividade proposta apresenta-se o trabalho desenvolvido pela Equipe 1, dispondo figuras que variam desde a “Figura 3” até a “Figura 5” na sequência.

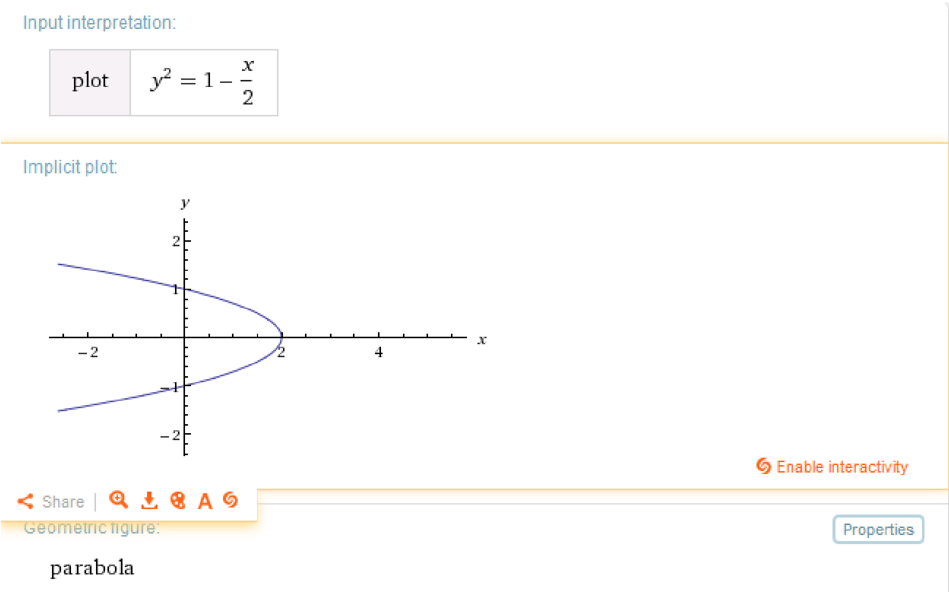

Figura 3 - Gráfico da função proposta

O software Wolfram Alpha (livre para cada equipe) foi o escolhido para a plotagem das curvas.

Embora a equipe tenha considerado também a parte imaginária, o interesse é apenas em funções reais a valores reais. Na sequência, “Figura 4” e “Figura 5”.

A “Tabela 2” apresenta a comparação entre os resultados obtidos.

Tabela 2 – Comparação dos resultados obtidos pela equipe 1

Valores Obtidos			
	Método Analítico	Método Numérico	Erro%
I_y [m4]	2,438	2,394	1,4
A [m2]	2,666	2,632	3,7
K_y [m]	0,956	0,953	2,5

Onde: $I_{y:}$ momento de inércia de área em relação ao eixo y
A: área
$K_{y:}$ raio de giração

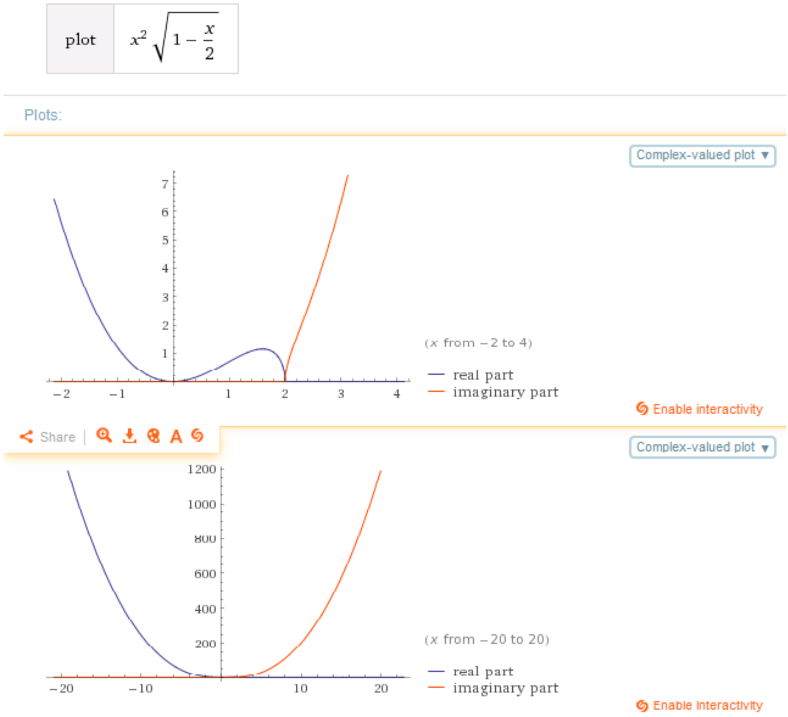

Figura 4 - Gráfico de I_y – Inércia em relação ao eixo y

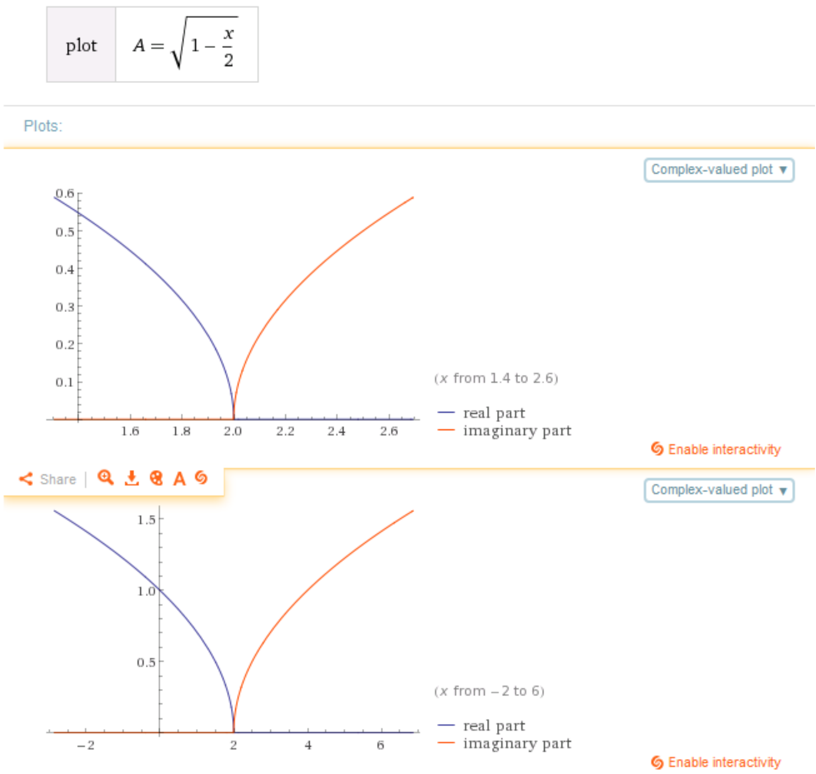

Figura 5 - Gráfico da Área

4. COMENTÁRIO DOS ALUNOS

São registrados alguns comentários a respeito da atividade proposta.

> *"O grupo achou interessante o trabalho multidisciplinar, com conceitos que os integrantes do grupo já tinham visto em outras matérias e percebeu o esforço da professora de sempre trazer atividades desafiadoras e novas."*

> *"Em relação à inciativa da multidisciplinaridade com o professor Jair, fora um grande passo para a extensão dos limites entre um assunto e outro. A aula sobre o método numérico utilizado, ministrada competentemente pelo professor, agregou um conhecimento valioso para compreender novos métodos para o cálculo de integrais e aplicá-los nos assuntos abordados nesta disciplina."*

> *"O trabalho em equipe é de extrema importância para vida de um engenheiro, mas cabe ressaltar que existem pontos positivos e negativos, já que alguns ajudam menos que os outros, as vezes não por falta de vontade, mas por não ter tempo ou algum outro motivo coerente. Mas é relevante comentar que a discussão em grupo para se chegar ao resultado é o ponto mais importante, pois assim se cria um debate e consequentemente uma dinâmica no grupo."*

> *"No mercado de trabalho hoje, vemos a necessidade de um bom desempenho no trabalho em equipe. Com esse relatório multidisciplinar em grupo praticamos tal habilidade."*

> *"O projeto foi oportuno para promover discussão entre os integrantes da equipe. Os conhecimentos adquiridos serão úteis não apenas em Mecânica dos Sólidos, mas também em outras disciplinas."*

A "Figura 6" ilustra a turma da Engenharia Elétrica no ambiente de aprendizagem "sala de aula".

Figura 6 – Alunos da turma de Engenharia Elétrica

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento interdisciplinar neste trabalho ocorreu quando se propôs a utilização de ferramentas do cálculo numérico e de cálculo simples entrelaçando com a disciplina Mecânica dos Sólidos. Nem sempre pode-se obter, de forma analítica, o valor exato de uma integral já que, na grande maioria das vezes, a dificuldade de estabelecer a função original de um sistema é um trabalho hercúleo. O que se tem, em geral, é a resposta do sistema para determinada função, ou seja, tem-se somente o gráfico correspondente sem necessariamente a lei desta função. Dessa forma, a utilização de um método numérico de rápida e eficiente solução se mostra necessário na resolução de problemas paralelamente ao conhecimento teórico estudado. O objetivo da interdisciplinaridade veio ao encontro dos anseios dos alunos ainda no ciclo básico. Sentir a importância do trabalho em equipe, a cooperação mútua e os momentos de discussão coletiva proporcionou a importância desta vivência alertando-os a atitudes no mercado de trabalho. Houve motivação e pela análise dos resultados e comentários descritos o objetivo foi alcançado. A proposta fortaleceu o trabalho em equipe, indispensável ao profissional de engenharia, o trabalho interdisciplinar bem como a aquisição de conhecimentos extras.

O papel do professor é gerenciar o processo de aprendizagem, coordenar o andamento e gerir as diferenças e convergências. A competência e autoridade não estão em demonstrar o controle sobre a classe, mas fundamentalmente na interação de caráter intelectual e afetivo numa co-aprendizagem. A disponibilização de dados, imagens e resumos de forma rápida e atraente possibilitam ao aluno interpretar, relacionar e contextualizar, com argumentação dos resultados, desenvolvimento do espírito crítico, compreensão e criatividade. Aluno ativo e motivado avança mais: somos todos aprendizes permanentes. O desafio passa por criar e permitir uma nova ação na qual professor e aluno participam de um processo conjunto de forma criativa, dinâmica, encorajadora e que tenha como essência o diálogo e a descoberta.

Agradecimentos

Aos alunos do 3º período do curso de Engenharia Elétrica da UNIFEI, por aceitarem o desafio do “aprender juntos” bem como valorizarem o trabalho em equipe, fundamental em qualquer setor profissional.

REFERÊNCIAS / CITAÇÕES

DEMO, P. Conhecimento moderno: sobre ética e intervenção do conhecimento. Petrópolis: Vozes, 1998.

GARRUTTI, E A; SANTOS, S R. A interdisciplinaridade como forma de superar a fragmentação do conhecimento. Revista de Iniciação Científica da FFC, v. 4, n. 2, 2004. Disponível: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/view/92/93>. Acessado em: 10 de Maio de 2014.

HIBBELER, R.C. Mecânica para Engenharia. Vol. Estática. São Paulo. Ed. Pearson Prentice Hall, 12ª edição, 2011

KLEIMAN, A.B.; MORAES, S.E. Leitura e Interdisciplinaridade: Tecendo Redes nos Projetos da Escola. Campinas: Mercado das Letras, 1999.

PIAGET, J. Problemas gerais da investigação interdisciplinar e mecanismos comuns. Tradução Maria Barros. Paris: Bertrand, 1970.

PRADO, R. Misturar matérias, essa receita pode dar certo. Nova Escola, São Paulo, ano 14, n. 122, p. 22- 25, maio 1999.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2ª Edição. Pearson Makron Books, 2006

SHIGA, A.A. Coluna Linha Direta, Jornal da Universidade São Judas Tadeu, Ano V, No 36,pp. 7, Editora da USJT, São Paulo, SP, 1999.

SOARES, Eliana M S. SAUER, Laurete Z. Um novo olhar sobre a aprendizagem de matemática para a engenharia. In: CURY, H. N. Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004, p. 245–270.

INTERDISCIPLINARITY: MECHANICS OF SOLIDS AND NUMERICAL METHODS INTERCONNECTED

***Abstract**: This paper presents the interactivity of the disciplines of Solid Mechanics, Calculus and Numerical Methods as an integrating instrument of knowledge, applied to the class of the 3rd period of the Electrical Engineering course. To guide the student in development of knowledge is a role of the professor who is engaged with the student's growing, resulting in a positive and motivating partnership. In the interdisciplinary field, the student experiments gradual development of skills that are necessary for carrying out the activities. Reports are described positively as a gain of experience and knowledge, as well as to request more interdisciplinary activities. Students should be prepared to work in many engineering areas, in a dynamic, active and fearless way.*

***Keywords**: Interdisciplinarity, Solid Mechanics, Simpson method.*