COBENGE 2014
ENGENHARIA: Múltiplos saberes e atuações
16 a 19 de setembro | Juiz de Fora - MG

O ENSINO DO CÁLCULO NA ENGENHARIA CIVIL COM O AUXÍLIO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O SOFTWARE GEOGEBRA: O CASO DA DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Lara de Andrade Kunhen dos Santos - larakandrade@hotmail.com
Unichristus
Rua Tibúrcio Cavalcante
60120045 – Fortaleza - Ceará

Daniel Brandão Menezes - brandaomenezes@hotmail.com
Unichristus
Rua Tibúrcio Cavalcante
60120045 – Fortaleza - Ceará

Resumo: *A recente estruturação do curso de Engenharia Civil da Unichristus motivou estudos relacionados à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, os quais apresentaram ferramentas de aprendizagem no contexto da história da matemática, em que o docente pode aplicar com os conteúdos apresentados em sala de aula. O objetivo deste artigo é apresentar como a história da matemática e uma ferramenta computacional para interpretação geométrica das derivadas de funções implícitas, podem constituir um mecanismo prático ao docente para atingir um melhor aprendizado por parte dos alunos. A metodologia utilizada foi a realização de levantamentos bibliográficos e de pesquisas utilizando o software Geogebra. Os resultados observados foram o fácil manuseio que o programa pode proporcionar aos alunos, a construção e análise de curvas que poderão ser úteis aos estudos dos discentes e a abertura para futuros trabalhos na área, possibilitando o enriquecimento das disciplinas ministradas na faculdade.*

Palavras-chave: *Derivação implícita; Software Geogebra; História da matemática.*

1. INTRODUÇÃO

A matemática possui uma grande aplicação às ciências, o que inclui várias áreas da Engenharia Civil, um exemplo que se pode citar é a estrutural. Com observações e experiências, os cientistas e matemáticos procuram e determinam a fórmula ou a função que relaciona as variáveis em estudo. Desse modo, a matemática é uma ferramenta indispensável para estudar o movimento e, em geral, a ciência, o que mostra sua grande importância para a Engenharia, devido a grande utilização da física no estudo de mecanismos de sustentações de estruturas.

> "Filosofia [ciência e natureza] está escrita naquele grande livro o qual está diante de nossos olhos – quero dizer o universo – mas não

> podemos entendê-lo se não aprendermos primeiro a linguagem... O livro está escrito em linguagem matemática...” Galileu Galilei (1564-1642).

Na matemática clássica e antiga, o movimento foi estudado geometricamente, usando as proporções de Euclides e propriedades cônicas de Apolônio para estabelecer relações entre distância, velocidade e aceleração. Hoje, estas quantidades variáveis são aplicações básicas das derivadas e são elas que nos ajudam a determinar o estudo do movimento, ferramenta imprescindível ao engenheiro, que utiliza estas técnicas para criar e elaborar projetos com base nesse conhecimento científico matemático.

2. A HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL

O cálculo surgiu como uma grande ferramenta da matemática e sua construção foi possível devido ao resultado de diversas contribuições de muitos personagens como Isaac Newton, Leibniz, René Descartes, Fermat, entre outros. O cálculo pode ser dividido em duas partes, onde uma é relacionada às derivadas ou Cálculo Diferencial e outra parte relacionada às integrais ou Cálculo Integral. O aparecimento do Cálculo Diferencial está muito ligado à questão das tangentes.

De acordo com (STEWART, 2006, p. 164), a primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que “Se vejo mais longe do que outros homens é porque estou sobre os ombros de gigantes”. Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e seu professor em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenham papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

Desde a época dos gregos antigos, já se conhecia a reta tangente como sendo uma reta que intercepta uma curva em um único ponto, generalizando a situação observada no caso da circunferência. Mas, para as questões matemáticas atuais, esta ideia é muito imprecisa, sendo preciso um tratamento mais rigoroso para a questão da tangente à uma curva. Vários outros métodos para resolver o problema de encontrar a tangente a uma curva em um ponto foram desenvolvidos ao longo da história, como o de Arquimedes e de Apolônio, que utilizavam métodos geométricos, que diferiam entre si, para a determinação de tangentes a parábolas, a elipses e a hipérboles.

A matemática moderna está fundada em dois avanços fundamentais, a introdução de cálculo por Newton e o método para a integração da álgebra com a prova geométrica por Descartes, que levou a geometria analítica.

A ideia geral para o desenvolvimento do conceito de geometria analítica veio a René Descartes (1596-1650) em 10 de novembro de 1619. Descartes era um cético perene e questionou a base para a epistemologia, especialmente, como relacionado a lógica aristotélica. De acordo com Descartes, só a matemática era certa e ela seria o método mais satisfatório de aquisição de conhecimento, assim, esta filosofia proposta por ele é creditada como o surgimento do método científico.

De acordo com (BOYER, 2003, p. 191), René Descartes e Pierre Fermat foram as principais figuras para o desenvolvimento da matemática. No séc. XVII, ambos os matemáticos, Descartes e Fermat, introduziram as coordenadas cartesianas, tornando-se possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente as funções. Descartes teve o discernimento de prever a importância da tangente em sua obra Le Geometrie, inventando um procedimento de dupla raiz para encontrar a normal e a tangente a uma curva.

> "E eu ouso dizer isto [encontrar a normal, ou perpendicular a uma curva, a partir da qual podemos facilmente identificar a tangente] não é apenas o problema mais útil e geral da geometria que conheço, mas até aquele que sempre desejei conhecer." René Descartes, (1596-1650).

A ideia de uma família inteira de curvas de uma só vez foi introduzida por Pierre Fermat (1601-1665), sendo o primeiro a considerar esta ideia, chamando-as de parábolas superiores, curvas da forma $y = kx^n$, onde k é constante e n = 2, 3, 4,… Assim, a

introdução de símbolos algébricos para estudar a geometria de curvas contribuiu significativamente para o desenvolvimento da derivada, da integral e do cálculo.

Fermat tinha noção das limitações do conceito clássico de reta tangente a uma curva, como sendo aquela que encontrava a curva num único ponto, assim, pode perceber a importância da reformulação deste conceito, encontrando um processo para traçar uma tangente a um gráfico num dado ponto e esse problema ficou conhecido como o "Problema da Tangente". Todas estas ideias constituíram para o aparecimento do conceito de derivada, mas, Fermat não dispunha de notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido. Foi então, no séc. XVII, que o matemático Leibniz algebrizou o Cálculo Infinitesimal, introduzindo os conceitos de variável, constante e parâmetro. Leibniz introduziu também a notação dx e dy para designar a menor possível das diferenças em x e em y. Assim, desta notação, surge o nome do ramo da matemática conhecido hoje como Cálculo Diferencial.

3. REFERENCIAL TEORICO

3.1. A derivação implícita

A derivada de uma função pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente ao seu gráfico. As aplicações da derivada em problemas típicos têm aplicações práticas nos mais diversos campos, como geometria, engenharia, física, biologia e economia. A derivada constitui uma ferramenta poderosa do cálculo para o estudo e a análise de funções.

George B. Thomas (2012, p. 202) diz que a maioria das funções trabalhadas, antes do aprendizado de cálculo, são de forma y = f(x), em que y é dado diretamente ou explicitamente, por meio de uma expressão definida em termos de x. No entanto, na resolução de problemas práticos, frequentemente a relação entre y e x é determinada por uma equação da forma F(x, y) = 0, que não esta resolvida para y. Pode ser que não exista nenhum ponto (x, y) do plano que satisfaça a equação F(x, y) = 0. Neste caso, esta equação representa um conjunto vazio. Caso contrário, uma equação do tipo acima representa uma curva no plano que pode ser o gráfico de uma ou de varias funções da forma y = f(x). Isto acontece porque uma equação em duas variáveis x e y pode ter uma ou mais soluções para y em termos de x ou para x em termos de y. Dizemos, então, que estas soluções são funções definidas implicitamente pela equação F(x, y) = 0.

A técnica conhecida que permite calcular a derivada de equações implícitas é a derivação implícita. As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra, em geral, y = f(x). Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y. Em alguns casos é possível resolver uma equação para y como uma função explícita (ou várias funções) de x. “Felizmente não precisamos resolver uma equação para y em termos de x para de encontrar a derivada de y. Em vez disso, poderemos usar o método da diferenciação implícita, que consiste em diferenciar ambos os lados da equação em relação a x e então resolver a equação resultante y’. Nos exemplos e exercícios desta seção presuma sempre que a equação dada determine y implicitamente como uma função diferenciável de x de forma que o método da diferenciação implícita possa ser aplicado.” (STEWART, 2006, p. 227).

A definição de derivação implícita é posta por (FLEMMING e GONÇALVES, 2002, p. 165) considerando a equação

$$F(x,y) \tag{1}$$

E dizendo que a função y = f(x) é definida implicitamente pela equação (1) se, ao substituirmos y por f(x) em (1), esta equação se transforma em uma identidade. Também é discutido que nem sempre é possível encontrar a forma explícita de uma função definida implicitamente, assim, o método da derivação implícita permite encontrar a derivada de uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la. De acordo com as autoras, podemos supor que F(x,y) = 0 define implicitamente uma função derivável y = f(x), e que, então, podemos usar a regra da cadeia e determinar y’ sem explicitar y.

Flemming e Gonçalves (2002, p. 166) propõem alguns exemplos de derivação implícita, sendo tais exemplos de fácil entendimento, devido aos passos simples e detalhados da técnica utilizada na derivação de funções implícitas. Alguns dos exemplos dados por (FLEMMING e GONÇALVES, 2002, p. 166) estão representados abaixo:

Exemplo 1. Sabendo que y = f(x) é uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, determinar y’. Como essa equação define y = f(x) implicitamente, podemos considerá-la uma identidade válida para todo x no domínio de f. Derivando ambos os membros desta identidade em relação a x, temos:

$$(x^2 + y^2)' = (4) \text{ ou, } (x^2)' + (y^2)' = 0$$

Como y = f(x), usando a regra da cadeia, vem:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Isolando y’, temos:

$$y' = -x/y.$$

Observamos que, neste exemplo, foi usado o fato de que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente. Esse resultado não é válido para a função $h(x)$, representada graficamente na Figura 4.1. De fato, embora esta função também seja definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, ela não é contínua no ponto $x = c$ e, portanto, não é derivável neste ponto.

Exemplo 2. Sabendo que $y = f(x)$ é definida pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determinar y'. Sabemos essa equação é uma identidade quando substituímos y por f(x). Portanto, em todos os pontos $y = f(x)$ é derivável, temos as seguintes igualdades:

$$(xy^2 + 2y^3)' = (x - 2y)'$$
$$(xy^2)' + (2y^3)' = (x)' - (2y)'$$
$$x \,.\, 2yy' + y^2 + 6y^2y' = 1 - 2y'$$

Isolando y' na última igualdade temos:

$$y' = 1-y^2 / (2xy + 6y^2 + 2)$$

Exemplo 3. Se $y = f(x)$ é definida por $x^2y^2 + x \text{ sen } y = 0$, determinar y'. Lembrando que $y = f(x)$ e derivando em relação a x com o auxílio da regra da cadeia, temos:

$$x^2 \,.\, 2y \,.\, y' + 2xy^2 + x \cos y\, y' + \text{sen } y = 0$$

Isolando y', vem:

$$y' = - 2xy^2 + \text{sen } y / (2x^2y + x \cos y)$$

A interpretação de dy/dx como um quociente diferencial. Até aqui, dy/dx tem sido visto como uma simples notação para a derivada de $y = f(x)$. “O que faremos a seguir é interpretar dy/dx como um quociente entre dois acréscimos. Inicialmente, vamos olhar para dx como um acréscimo de x e, em seguida, procuraremos uma interpretação para o acréscimo dy.” (GUIDORIZZI, 2001, p. 192)

De acordo com (STEWART, 2006, p. 230), o matemático norueguês Niels Abel provou em 1824 que não existe uma fórmula geral dada para as raízes de uma equação de quinto grau em termos de radicais, e que, mais tarde, o matemático francês Evariste Galois provou que é impossível encontrar uma fórmula geral para as raízes de uma equação de n-ésimo grau (em termos de operações algébricas sobre os coeficientes) se n for qualquer inteiro maior que quatro. Assim, podemos perceber a importância da derivação implícita em equações de n-ésimo grau, devido à impossibilidade de encontrar suas raízes explicitamente.

3.2. Gráficos de curvas implícitas com o auxílio do Geogebra

O software Geogebra pode criar dois tipos de curvas, as paramétricas e as implícitas, mas como nosso estudo está ligado às curvas implícitas, estudaremos apenas elas neste software.

As curvas implícitas são polinômios em variáveis x e y. A equação de determinada curva pode ser inserida diretamente usando a “Barra de Entrada” que fica logo abaixo à tela do programa. Este é um exemplo de equação de uma curva para se inserir no programa: x^4 + y^3 = 2xy.

Usando a ferramenta “Novo Ponto” pode-se localizar um ponto em uma curva e obter suas coordenadas. No entanto, em alguns casos, o ponto não pode ser determinado como dependente da curva.

3.2.1. Exemplos de curvas implícitas

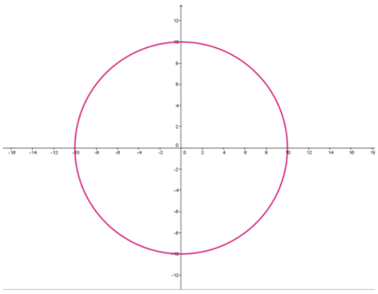

Figura 1: Lemniscata de Bernoulli

$x^4 + 2x^2y^2 - 100x^2 + y^4 - 100y^2 = 0$

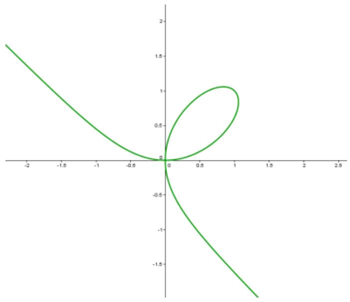

Figura 2: Fólio de Descartes

$x^3 - 2xy + y^3 = 0$

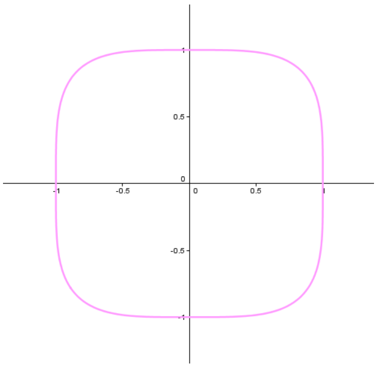

Figura 3: Quadrado

$x^4 + y^4 = 1$ (Equação geral: $x^{2n} + y^{2n} = 1$)

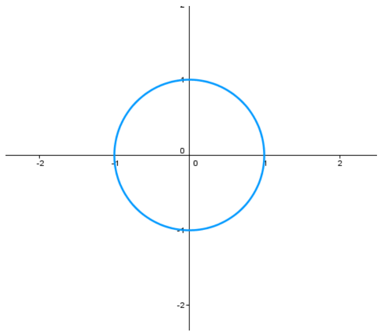

Figura 4: Círculo

$x^2 + y^2 = 1$

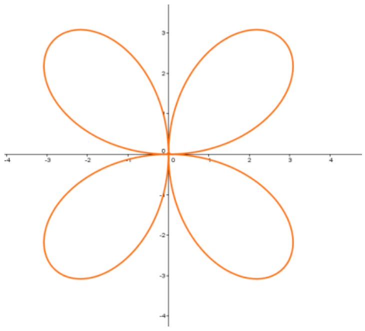

Figura 5: Rosa de Grandi

$x^6 + 3x^4 y^2 + 3x^2y^4 - 64x^2y^2 + y^6 = 0$

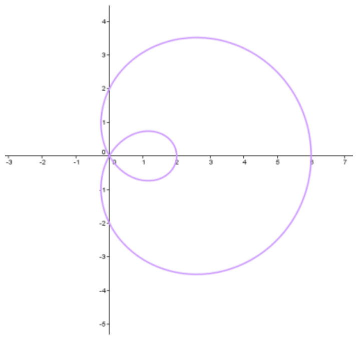

Figura 6: Limaçon de Pascal

$x^4 - 8x^3 + 2x^2y^2 + 12x^2 - 8xy^2 + y^4 - 4y^2 = 0$

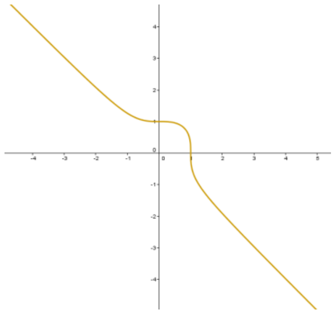

Figura 7: $x^3 + y^3 = 1$

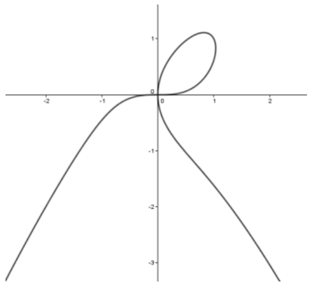

Figura 8: $x^4 - 2xy + y^3 = 0$

3.3. O fólio de Descartes

O matemático René Descartes foi o primeiro a discutir o fólio, que descobriu em uma tentativa de desafiar as técnicas de determinação de extremo de Pierre Fermat, em 1638. O fólio apareceu pela primeira vez nos escritos de Descartes em uma seção de sua obra La Géométrie.

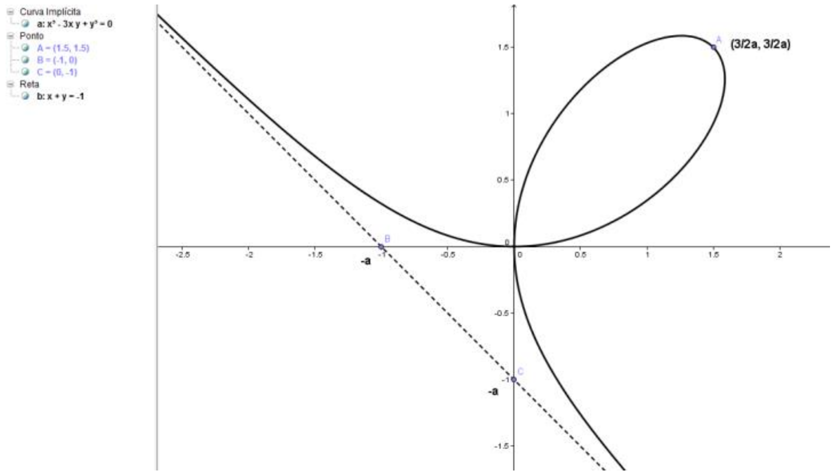

Figura 10: Representação gráfica feita no software Geogebra do fólio mostrando a relação da constante a com a curva e sua assíntota.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, baseado em pesquisas bibliográficas, apresentou a derivação implícita de tal forma que abrangesse desde sua história até a sua aplicabilidade para auxiliar no ensino do Cálculo no curso de Engenharia Civil. O ensino de tal assunto foi abordado com o auxílio do software Geogebra e como resultado deste uso, foi observado que houve fácil visualização e criação de gráficos. O uso do software desempenha um papel que melhora a relação entre o aluno e a construção do seu conhecimento, pois ele pode aumentar a compressão sobre as derivadas implícitas através de construções e manipulações simples, havendo assim, maior interesse e atenção por parte de quem está estudando tal conteúdo. O uso dessa ferramenta pode ser visto, de certa maneira, de maneira lúdica pelo estudante, o que contribui significativamente para o seu aprendizado.

Além do estudo feito com o software, para auxiliar no entendimento de como nasceu o Cálculo, foram apresentados grandes matemáticos e suas contribuições históricas, principalmente René Descartes e Pierre Fermat, que incentivaram um grande progresso matemático na época e contribuíram de forma significativa para a construção do Cálculo. As obras deixadas por esses matemáticos incentivaram a continuação de resolução de problemas matemáticos posteriores, até que Newton e Leibniz propusessem teorias mais sólidas para, assim, surgir o Cálculo Moderno. Desse modo, a abordagem da história da matemática pode contribuir com resultados significativos na aprendizagem do Cálculo para o aluno de Engenharia Civil e os dos demais cursos que abordam o Cálculo.

Agradecimentos

Agradeço a instituição de ensino Unichristus por abrir uma oportunidade de inserção no mundo acadêmico através da participação em eventos científicos, aos professores Alessandro Nasserala e Daniel Brandão e aos demais colegas que auxiliaram neste trabalho.

5. REFERÊNCIAS / CITAÇÕES

BOYER, Carl B. História da Matemática – Ed. Edgard Blucher, São Paulo, 2ª edição, 2003.

FLEMMING, Diva Marília e GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: Funções, Limites, Derivação e Integração - 6ª Edição, São Paulo, Editora Pearson, 2002.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo – Vol. 1, 5ª edição, Rio de Janeiro, Editora LTC, 2001.

HODGKIN, Luke. A History of Mathematics – Ed. Oxford University Press, 2005.

STEWART, James. Curso de Cálculo – Vol. 1, 5ª edição, São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2006.

THOMAS, George B. Cálculo – Vol. 1, 12ª edição, São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

WEISSTEIN, Eric W. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics – Florida, Ed. LTC, 2ª edição, 2003.

TEACHING OF CALCULUS IN CIVIL ENGINEERING USING THE HISTORY OF MATHEMATICS AND THE SOFTWARE GEOGEBRA: THE CASE OF IMPLICIT DERIVATIONS

Abstract: *The recent structuring of Civil Engineering course of Unichristus motivated research related to the discipline of Differential and Integral Calculus, which showed learning tools in the context of the history of mathematics, in which the teacher can apply* *to the content presented in the classroom. The objective of this work is to present how the history of mathematics and computational tools for geometric interpretation of the derivatives of implicit functions, can be a practical mechanism to teaching to achieve better learning by students. The methodology was used to conduct literature surveys and research using Geogebra software. The results were easy handling that the program can provide to the students with the construction and analysis of curves that may be useful for studies of learners and openness for future work in this area, enabling the enrichment of the subjects taught in college.*

Key-words: *Implict derivations; Software Geogebra; History of mathematics.*