# MODELAGEM DOS MODOS NORMAIS DE OSCILAÇÃO EM VIGAS COM TRINCAS USANDO O MODELLUS

**Eduardo H. Olivo** – eduardoheisolivo@gmail.com
**Mauro J. V. Junior** – mauro_valcanaia@hotmail.com
**Emerson M. Boldo** – emerson.boldo@unioeste.br
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
Departamento de Engenharia Civil – CCET
Rua Universitária, 1.619 - Caixa Postal 701
85819-110 – Cascavel – Paraná

***Resumo:*** *Vigas são um tipo de estrutura que rotineiramente são encontradas em obras de engenharia. Em muitos projetos só existe a preocupação com o comportamento dessas estruturas submetidas a cargas estáticas, assumindo que as mesmas sejam aplicadas lentamente e a estrutura permaneça em equilíbrio após certo instante. No entanto, em muitas situações as vigas podem estar sujeitas às mais variadas formas de carregamentos dinâmicos impondo às vigas um estado vibratório. Portanto é fundamental entender o comportamento dessas estruturas quando submetidas a esse tipo de esforço. Este trabalho apresenta um estudo teórico dos modos normais de vibração de vigas bi-engastadas com fissuras, que levam à depreciação das suas características mecânicas. O problema foi abordado através da formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica com aplicação de coordenadas generalizadas. Verificou-se que a presença e a posição da trinca ao longo da viga são fatores que afetam as frequências de oscilação naturais da estrutura. Através da modelagem computacional auxiliada pelo programa Modellus, foi construída uma simulação com o objetivo de apresentar o conteúdo estudado de uma forma interativa, lúdica e mais didática aos alunos de engenharia.*

***Palavras-chave:*** *Fissuras, Mecânica Lagrangiana, Modellus, Vigas.*

## 1. INTRODUÇÃO

Elementos estruturais do tipo viga são muito encontrados em obras de engenharia devido à sua facilidade de construção e suas características mecânicas particulares, sempre respeitando a relação viga-laje-pilar. Segundo BEER (1994), vigas são barras longas prismáticas e retas, projetadas para suportar cargas aplicadas em vários pontos ao longo de seu comprimento. Elas podem ainda ser classificadas em referência ao modo pelo qual estão vinculadas, existindo tipos como: simplesmente apoiada, em balanço ou bi-engastada. Cada um desses tipos oferece diferentes valores de contorno, quando da resolução de problemas onde esforços estão atuando sobre as vigas, deixando livre para engenheiros e arquitetos o projeto de uma gama de formas estruturais.

Por apresentar formas simples estando no estado “são” (material homogêneo, isotrópico e contínuo), a viga possui uma predisposição linear na propagação de suas tensões internas. Qualquer desconformidade desse estado acarreta um diferente propagamento dessas tensões (NAYFEH & PAI, 2004).

Fissuras são pequenas falhas estruturais que interrompem a continuidade da viga, afetando principalmente sua resistência a carregamentos e em alguns casos, também depreciando as formas arquitetônicas.

Em nosso dia-a-dia é raro nos depararmos com residências, edifícios, pontes, ou qualquer tipo de construção que não apresentem nenhum tipo de fissura (BENTO *et a*l., 2002). O Brasil, devido ao seu vasto território, apresenta condições climáticas bastante diferenciadas com regiões onde a temperatura varia bruscamente durante vários meses do ano. Esse fator por si só faz com que todas as obras, sejam elas de pequeno, médio ou grande porte, apresentem fissuras no decorrer de sua vida útil. Somado a isso as trincas podem advir também de: erros de projeto, execução, agressividade do meio ambiente, interação solo-estrutura (recalque), má escolha de materiais e carregamentos aperiódicos que acarretam fadiga na estrutura.

Uma viga quando carregada tem um determinado arranjo das suas tensões internas, porém se ela apresentar fissuras, esse arranjo interno se altera para o mesmo carregamento devido à diminuição de sua área resistente. Isso desloca a linha neutra, criando um novo quadro de tensões desconhecido, que pode ultrapassar seus limites de resistência e levar a estrutura à ruptura.

Este trabalho tem como objetivo realizar uma modelagem teórica de uma viga bi-engastada apresentando fissuras e analisar como estas configurações afetam os modos normais de vibração da estrutura. A importância dessa investigação se destaca fundamentalmente para o entendimento de como as frequências naturais de oscilação podem ser afetadas por carregamentos dinâmicos aplicados nas vigas que apresentam fissuras. O modelo será construído utilizando-se a formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica e aplicação de coordenadas generalizadas (BARCELOS NETO, 2004). Após o modelo pronto, foi realizada uma simulação computacional do fenômeno analisado, objetivando que o aprendizado do modelo estudado e do formalismo utilizado se torne bastante intuitivo.

O uso de recursos multimídia como ferramenta didática, em especial no ensino de Engenharia, já vem sendo empregado com certo êxito no Brasil (ASSIS *et a*l., 2003; NORONHA *et a*l., 2000; VENTRI & LINDENBERG NETO, 2002). A modelagem computacional possui um grande potencial para permitir que os estudantes entendam os princípios teóricos das ciências exatas. Esta ferramenta pedagógica é de grande valia para o aumento da percepção do aluno e para auxiliar a construção do conhecimento, pois pode incorporar em um só momento diversas formas de representação do sistema em estudo. Desse modo, a modelagem contribui para o desenvolvimento cognitivo em geral, facilita a construção de relações e significados, potencializando as possibilidades pedagógicas da interação professor-aluno (GRECA & MOREIRA, 2002).

Dentre as ferramentas que possuem potencial para o apoio às atividades de modelagem matemática pode-se citar o Modellus (TEODORO, 2002). Este programa foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e tem distribuição gratuita para fins educacionais (UNL, 2013). A opção pelo Modellus reside no fato de que este aplicativo dispensa o uso de qualquer linguagem ou metáfora computacional e, adicionalmente, o simbolismo matemático utilizado é idêntico ao de um manuscrito, inclusive quando se formula um problema com equações diferenciais. Com isso, esperamos que a utilização dessa ferramenta seja útil para proporcionar uma abordagem mais interativa do modelo que descreve o comportamento dinâmico de vigas contendo fissuras, facilitando a absorção do conhecimento científico pelos estudantes.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

### 2.1. O modelo da viga bi-engastada com fissura

Para a modelagem dos modos normais de vibração de uma viga bi-engastada de massa *M* apresentando uma fissura na parte central de sua estrutura (Figura 1), utilizou-se um modelo analítico simplificado formado por duas massas *M/2* fixadas à parede por molas ideais com constante de elasticidade $K_1$. O vínculo entre as duas massas é feito por uma mola ideal com constante elástica $K_2$ representando a fissura, porque nesta parte da viga a vibração se propagará de modo diferente (Figura 2). Este modelo constitui um sistema de dois graus de liberdade, não-amortecido. A dinâmica desse tipo de sistema é descrita por duas equações de movimento acopladas, cada uma associada à respectiva coordenada de posição $x_1$ e $x_2$ de cada massa *M/2*.

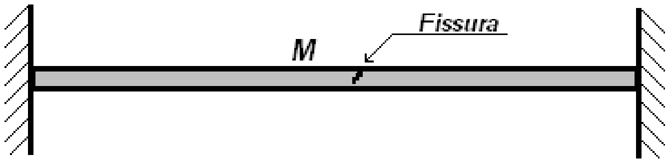


Figura 1 – Viga bi-engastada de massa M com fissura na parte central.

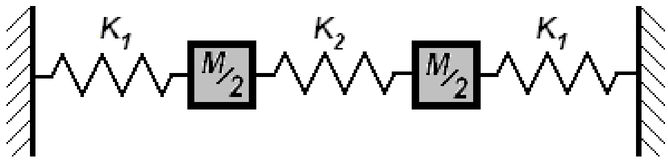


Figura 2 – Modelo analítico do sistema massa mola com dois graus de liberdade.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Encontrando a energia cinética total do sistema ($K_{Total}$), associada ao movimento das massas *M/2* e a energia potencial elástica ($U_{el}$), associada à energia elástica armazenada nas molas ideais $K_1$ e $K_2$ quando o sistema oscila, obtemos a Lagrangiana *L* do sistema:

$$L = K_{Total} - U_{el} \qquad (1)$$

Substituindo temos:

$$L = \frac{1}{4}\left(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}K_1 x_1^2 - \frac{1}{2}K_2\left(x_2 - x_1\right)^2 - \frac{1}{2}K_1 x_2^2 \qquad (2)$$

onde: $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $x_1$ e $x_2$ são as velocidades e posições das massas 1 e 2 respectivamente.

Resolvendo a equação de Lagrange para um sistema conservativo, determinou-se as equações diferenciais do movimento escritas na notação matricial como segue:

$$\{\ddot{x}\} + [C]\{x\} = \{0\} \qquad (3)$$

Na equação 3, $[C]$ representa a matriz dinâmica. Substituindo temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 \\ -K_2 & (K_2 + K_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

onde: $\ddot{x}_1$ e $\ddot{x}_2$ são as acelerações das partículas 1 e 2 respectivamente.

Multiplicando-se pelo inverso da matriz de massa obtêm-se a equação característica da qual podemos obter as frequências naturais de oscilação $\omega_1$ e $\omega_2$. Estas por sua vez, apresentaram dependência de $K_1$, $K_2$ e $M$ (respectivamente, constante elástica das molas e massa da viga) como era esperado.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2K_1 + 4K_2}{m}} \qquad (5)$$

As frequências $\omega_1$ e $\omega_2$ representam os modos normais de vibração para o movimento desse sistema oscilante. Qualquer outro movimento pode ser descrito como uma combinação linear desses modos.

A frequência $\omega_1$ corresponde à situação em que as duas massas deslocam-se no mesmo sentido com deslocamentos iniciais iguais. As duas massas não apenas oscilam com a mesma frequência $\omega_1$ e a mesma fase, mas também possuem a mesma amplitude. Neste caso a mola $K_2$ não "participa" do movimento, ou seja, não adiciona nenhuma energia potencial ao sistema.

Já a frequência $\omega_2$ representa o modo normal antissimétrico, no qual as massas de deslocam em oposição de fase mas com amplitudes iguais. O movimento continua oscilatório e harmônico, porém agora a frequência $\omega_2$ é maior visto que neste caso a mola central é distendida e comprimida, o que contribui para aumentar a constante elástica de cada oscilador. As duas massas passam, simultaneamente, pelas respectivas posições de equilíbrio e alcançam, também simultaneamente, os respectivos deslocamentos máximos.

Estas conclusões são melhor exemplificadas e incorporam um apelo didático maior quando visualizadas através de simulação computacional.

Para implementar as equações do modelo no Modellus, precisamos somente daquelas que descrevem o movimento das massas, visto que o próprio programa se encarrega de resolver de forma numérica as equações diferenciais. Isso é importante porque a maioria dos alunos dos períodos iniciais dos cursos de Engenharia ainda não está familiarizado com problemas envolvendo esse tipo de equação. Isso permite que o programa possa ser utilizado já no início do curso sendo requerido, no caso do nosso trabalho, somente o conhecimento de derivadas que são estudadas já nas disciplinas introdutórias de Cálculo.

As equações de movimento para as duas massas vinculadas à parede e entre si por molas ideais são dadas por:

$$\frac{m}{2}a_1 = -(K_1 + K_2)x_1 + K_2 x_2 \qquad (6)$$

$$\frac{m}{2}a_2 = -(K_2 + K_1)x_2 + K_2 x_1 \qquad (7)$$

onde: $a_1$, $a_2$, $x_1$ e $x_2$ são as acelerações e deslocamentos das massas 1 e 2 respectivamente.

O Modellus também exige que cada derivada em relação as variáveis velocidade e posição sejam definidas como segue:

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1 \qquad (8)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = a_2 \qquad (9)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \qquad (10)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 \qquad (11)$$

onde: $v_1$ e $v_2$ são as velocidades das massas 1 e 2 respectivamente.

Na figura 3 está representada a área de trabalho do Modellus já com as equações implementadas e a simulação ativa. O caso estudado corresponde à situação em que as duas massas deslocam-se no mesmo sentido com deslocamentos iniciais iguais o qual corresponde a um dos modos normais.

Pelo gráfico que representa a posição $x_1$ e $x_2$ das massas e a tabela que mostra o valor da força elástica de cada mola em função do tempo, fica claro a condição periódica do movimento. Além disso, o gráfico da posição mostra de forma clara que a amplitude de movimento das duas massas é igual, reforçando a ideia que nesse modo normal de vibração a mola $K_2$ não exerce sua influência no movimento do sistema. Esse tipo de visualização permite ao aluno desenvolver melhor sua cognição sobre o problema abordado, somado ao fato que no Modellus o usuário participa ativamente da implementação do modelo físico que descreve o fenômeno em estudo. A entrada desses dados na janela do modelo matemático no ambiente de trabalho do Modellus é feita de maneira direta da mesma forma da escrita normal, sem a necessidade do uso de uma sintaxe específica o que diminui drasticamente o tempo da curva de aprendizagem do programa.

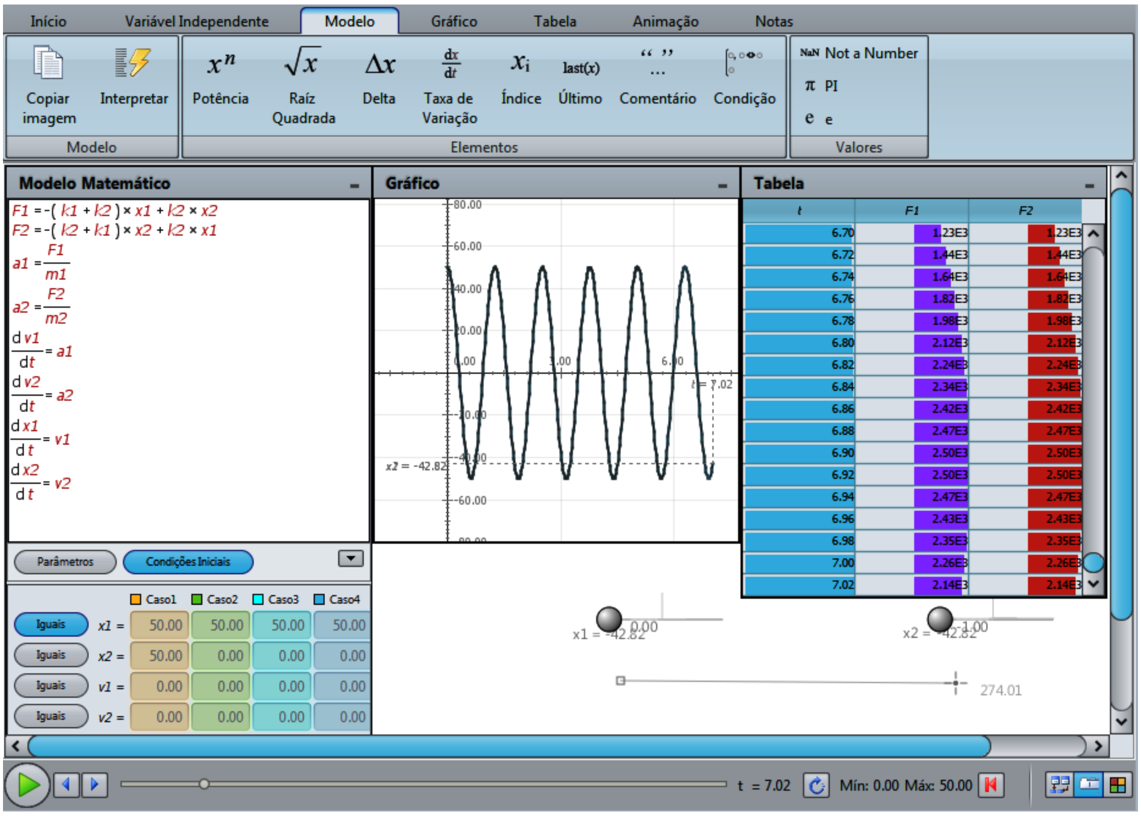


Figura 3 – Modelo do sistema massa mola com dois graus de liberdade mostrando o caso do modo normal de vibração acoplada com frequência $\omega_1$.

A figura 4 mostra o caso em que as massas de deslocam em oposição de fase mas com amplitudes iguais. O movimento continua harmônico, mas agora a frequência $\omega_2$ é maior, visto que a mola $K_2$ participa do movimento por meio da contribuição da sua energia potencial elástica à medida que ela é comprimida e distendida. Pelo gráfico da posição, notamos que as amplitudes das duas partículas permanecem iguais, com as duas massas alcançando máximos e mínimos simultaneamente.

Desconsiderando parâmetros envolvendo a rigidez da viga e comparando a frequência $\omega_2$ da viga com fissura, para o mesmo caso do deslocamento antissimétrico, com uma viga sem fissura (GRANDINETTI & FILHO, 2004), percebe-se que a frequência da estrutura com fissura é maior. Isso sugere que a falha realmente perturba a vibração da viga sujeita a um carregamento dinâmico, no seu modo normal de oscilação.

A simulação computacional construída no software Modellus se mostrou simples e visualmente interessante, permitindo a interação com facilidade para realizar de uma maneira intuitiva os experimentos conceituais com o modelo matemático proposto. O programa ainda permite que valores de parâmetros e variáveis sejam facilmente alterados para o estudo e comparação de diferentes casos de condições de contorno iniciais. Fica evidente que esse tipo de ferramenta pode auxiliar na construção de conhecimento contribuindo positivamente na relação ensino/aprendizagem.

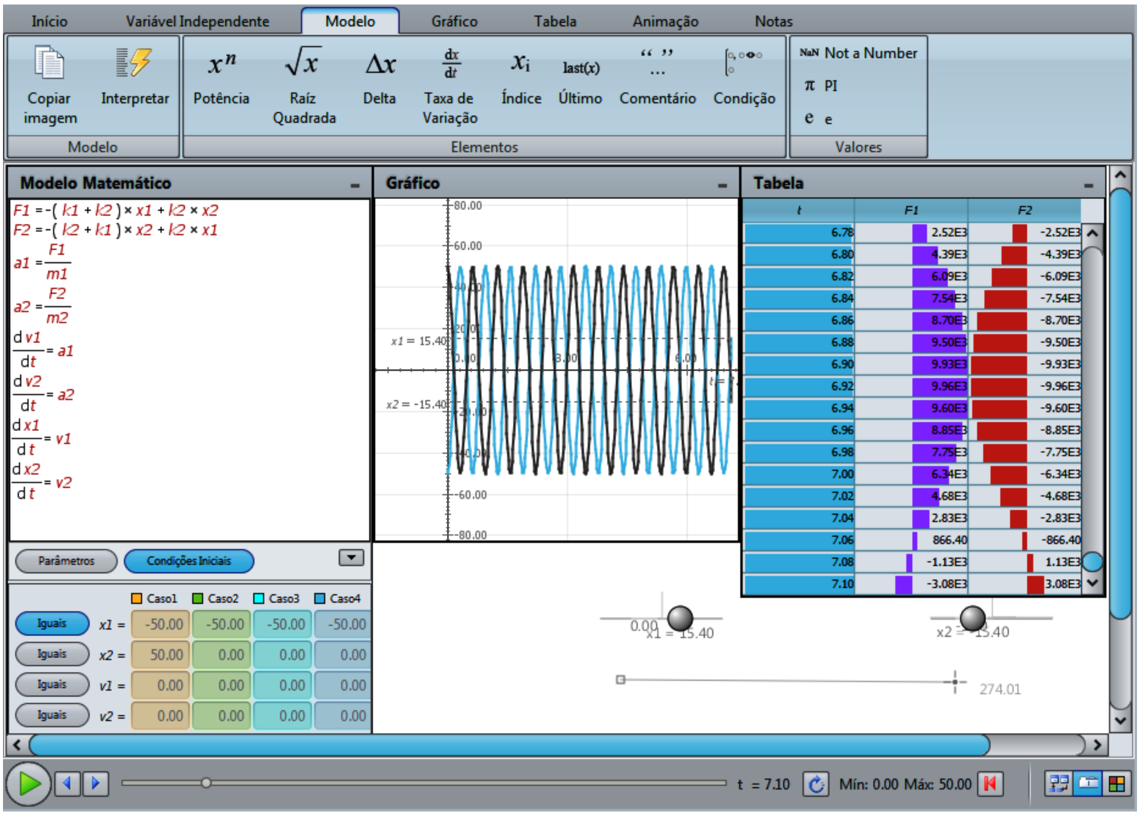


Figura 4 – Modelo do sistema massa mola com dois graus de liberdade mostrando o caso do modo normal de vibração acoplada com frequência $\omega_2$.

## 4. CONCLUSÕES

Utilizando um modelo teórico simplificado de dois graus de liberdade e com o auxílio do formalismo Lagrangiano, no presente trabalho foram determinadas as frequências naturais de oscilação de uma viga bi-engastada com fissura. As frequências obtidas são dependentes somente dos parâmetros estruturais da viga. No entanto foram encontrados valores maiores comparados com as frequências de uma viga sem falha. O entendimento desse modelo simples, nos permitirá avançar no estudo de sistemas com *n* graus de liberdade e contínuos, submetidos a diversas formas de carregamento que levam à formação de trincas e, em casos extremos, ao colapso da estrutura.

O programa Modellus, através da simulação computacional, facilitou a visualização do comportamento dinâmico do sistema e dos modos normais de vibração encontrados. Sua utilização é fácil e suas possibilidades visuais, com os gráficos e animações, favorecem a exploração didática do modelo matemático. Vale destacar também, que o Modellus é um *software* livre, distribuído sem custos para fins educacionais e possui uma versão traduzida para o português, o que o torna um instrumento pedagógico interessante para os professores dos cursos de Engenharia que podem utilizá-lo em conjunto com as técnicas tradicionais de ensino.

***Agradecimentos***

Os autores desse trabalho gostariam de agradecer a Fundação Araucária e a Pró Reitoria de Pesquisa e Pós Graduação da UNIOESTE pelo apoio financeiro para realização dessa pesquisa.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSIS, W. S.; BITTENCOURT, T. N. e NORONHA, M. Desenvolvimento de recursos multimídia para o ensino de estruturas de concreto. Revista IBRACON de Estruturas, São Paulo, v.32, p.41-51, 2003.

BARCELOS NETO, J. Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana. 1° Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. 431p.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Mecânica vetorial para engenheiros. 5° ed. São Paulo: Makron Books, 1994. 793p.

BENTO, J. G. V.; BRITO, P. C.; MIRANDA, R. F. UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA, Faculdade de Engenharia, Arquitetura e Urbanismo. Fissuras em elementos de concreto armado: características, causas e recuperações, 2002. 86p, il. TCC.

GRANDINETTI, F. J.; FILHO, E. A. Comparação dos modos de vibrações teórico e experimental em vigas com trincas. Rev. Ciências. Exatas, Taubaté, v. 9/10, n. 1-2, p. 61-67, 2004.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. Science Education, v.86, p.106-121, 2002.

NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. Linear and nonlinear structural mechanics. New York: Wiley & Sons, 2004. 746p.

NORONHA, M.; *et a*l. Multimedia-based environment in structural engineering education. Anais: International Conference on Engineering and Computer Education - ICECE 2000, São Paulo, 2000.

TEODORO, V. D. UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA, Faculdade de Ciências e Tecnologia. Modellus: Learning physics with mathematical modelling, 2002. 248p, il. Tese (Doutorado).

UNL - UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Modellus Web Page. Disponível em: <http://modellus.fct.unl.pt/>. Acesso em: março de 2013.

VENTRI, D. A. B. e LINDENBERG NETO, H. O uso de animações para introduzir conceitos fundamentais da mecânica das estruturas: relato e avaliação da experiência. Anais: XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2002.

COBENGE 2014 ENGENHARIA: Múltiplos saberes e atuações
16 a 19 de setembro | Juiz de Fora - MG

# MODELING THE NORMAL MODES OF OSCILLATION OF THE BEAM WITH CRACKS USING MODELLUS

***Abstract:*** *Beams are a type of structure that are routinely encountered in engineering works. In many projects, there is concern about the behavior of these structures under static loads only; assuming they are implemented slowly and structure remain in equilibrium after some time. Nevertheless, in many situations the beams can be subject to various forms of dynamic loads imposing a vibratory state on beams. Therefore, it is essential to understand the behavior of these structures when subjected to this kind of effort. This paper presents a theoretical study of the normal modes of vibration of bi-restrained with cracks, which lead to the depreciation of their mechanical characteristics. The problem was addressed by the Lagrangian formulation of classical mechanics with application of generalized coordinates. It has been found that the presence and position of the crack along the beam are factors that affect the natural frequencies of oscillation of the structure. Through computational modeling assisted by Modellus program, a simulation was built with the aim of presenting the studied subject in an interactive, ludic and more didactic way for engineering students.*

***Key-words:*** *Cracks, Lagrangian Mechanics, Modellus, Beams.*