

FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO EM VIGAS – UMA ABORDAGEM DIDÁTICA ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Mauro J. V. Junior – mauro_valcanaia@hotmail.com

Eduardo H. Olivo – eduardoheisolivo@gmail.com

Emerson M. Boldo – emerson.boldo@unioeste.br

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE

Departamento de Engenharia Civil – CCET

Rua Universitária, 1.619 - Caixa Postal 701

85819-110 – Cascavel – Paraná

Resumo: *As simulações computacionais são instrumentos didáticos importantes porque expandem e consolidam os conhecimentos adquiridos em sala de aula, principalmente quando se abordam problemas que exigem dos alunos o desenvolvimento de certo grau de abstração para perceber a evolução temporal do evento em estudo. Porém, se o computador for usado somente como um recurso multimídia, sem a interação do aluno com o modelo matemático que descreve o fenômeno físico, esta ferramenta não estará contribuindo efetivamente para a construção do conhecimento. Este trabalho visa o estudo teórico, por meio da simulação computacional, dos modos normais de vibração de vigas bi-engastadas, inicialmente caracterizadas por uma vibração livre e não amortecida. A teoria foi desenvolvida considerando-se um modelo discreto com dois graus de liberdade. Verificou-se que as frequências naturais de oscilação encontradas são características exclusivas da estrutura e independentes de um eventual carregamento externo aplicado, possibilitando o desacoplamento das equações integrantes do sistema dinâmico. Após a formulação do modelo teórico, com o auxílio da modelagem computacional e do programa Modellus, foi construída uma simulação para auxiliar na transmissão de conhecimento desse tipo de fenômeno. Espera-se contribuir com alternativas didáticas interessantes que colaborem de maneira efetiva para a melhoria do ensino da Engenharia na universidade.*

Palavras-chave: *Simulação computacional, Modos normais de oscilação, Modellus, Vigas.*

1. INTRODUÇÃO

A questão da utilização de novas tecnologias no contexto educacional tem sido discutida tanto em nível nacional como internacional, visando desenvolvimento de técnicas pedagógicas que busquem facilitar o ensino e aprendizagem (ARAÚJO *et al.*, 2004). Apesar do avanço tecnológico e consequente barateamento dos equipamentos de informática e afins, a maioria das aulas nos cursos universitários de ciências exatas no Brasil são ministradas somente com o auxílio de giz e quadro negro. Além disso, o modelo pedagógico vigente no



país, ainda segue os padrões do instrucionismo focado principalmente no conhecimento homogêneo e padronizado (NETO *et al.*, 2012). Dentro desta metodologia o professor transmite o máximo de informações incluídas num engessado currículo pré-estabelecido e o aluno recebe de forma passiva esta grande quantidade de instruções, sem participar ativamente do processo. Priorizando somente o acúmulo de conhecimento este modelo de ensino não estimula o crescimento intelectual do aluno, o que possibilitaria que o mesmo construísse o próprio conhecimento a partir de suas reflexões em relação ao que está sendo estudado. Quando isso acontece temos o aprendizado construtivo, no qual, em relação ao processo de desenvolvimento cognitivo, o aluno participa ativamente na construção e reconstrução do conhecimento, refletindo sobre suas ações e fazendo reflexões a partir dos fatos observados, deixando de lado o conteúdo imediato ou aquele proveniente da aprendizagem mecânica (MANZINI, 2012).

Uma das formas de estimular o aprendizado construtivo em sala de aula é com a utilização de simulações e modelagem computacional. Um ambiente de modelagem computacional é um software que, no contexto desse trabalho, recebe essa denominação porque permite uma proposta pedagógica subjacente à sua utilização, ou seja, ele é visto como um ambiente de aprendizagem. Deste modo sua utilização não apenas ajuda o aluno a encontrar respostas para um determinado problema, mas além disso, estimula sua capacidade de elaborar perguntas, favorecendo desta forma o aprendizado construtivo.

O uso de recursos multimídia e simulações como ferramenta didática, em especial no ensino de Engenharia, já vem sendo empregado com certo êxito no Brasil (ASSIS *et al.*, 2003; NORONHA *et al.*, 2000; VENTRI & LINDENBERG NETO, 2002). Existem também programas para o cálculo de vigas e estruturas com um enfoque mais didático (VERÍSSIMO *et al.*, 2002; MARTHA, 2013). Apesar de serem excelentes iniciativas, consideramos que o usuário ainda não participa ativamente da construção do modelo físico que descreve o fenômeno em estudo. Com isso, a relação ensino/aprendizagem da proposta é prejudicada, já que o aluno obtém os resultados, mas como não interage com o conjunto de equações do modelo, não fica claro como eles são originados.

Como alternativa dentre as ferramentas que possuem potencial para o apoio às atividades de modelagem computacional e que podem contribuir para a construção e exploração de modelos físicos na Engenharia, temos o *software* Modellus (TEODORO, 2002). Este trabalho teve como objetivo investigar as potencialidades do Modellus como ferramenta para a modelagem computacional teórica dos modos normais de vibração de uma viga bi-engastada. Este estudo é importante para se entender como as frequências naturais de oscilação podem ser afetadas por carregamentos dinâmicos aplicados nas vigas. Acreditamos que com o auxílio da modelagem computacional em conjunto com simulações interativas, podemos apresentar um método onde o aprendizado dos modelos estudados e do formalismo utilizado seja bastante intuitivo.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

2.1. O Modellus

Desenvolvido deste 2002 por um grupo de pesquisadores na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa o Modellus é distribuído gratuitamente para fins educacionais (UNL, 2013). O programa é utilizado pelo usuário praticamente sem recorrer a

linguagens de programação. Utiliza, ao contrário, processos de representação muito mais próximos da escrita normal, o que se revela fundamental na medida em que não exige o conhecimento de uma nova sintaxe. Basta que o usuário conheça o simbolismo matemático e mesmo que ele não domine totalmente a linguagem matemática, o programa poderá auxiliá-lo na sua compreensão. O programa permite, de forma rápida e fácil, construir gráficos e tabelas que descrevem o comportamento do modelo, possibilitando a avaliação da qualidade do mesmo pela descrição dos dados experimentais resultantes do fenômeno em estudo. Além das características apresentadas, o programa permite a criação de "janelas de animação" (Figura 1) cuja importância está relacionada não só com questões de ordem lúdica, como também para a melhor compreensão teórica do assunto abordado, ao passo que permite efetuar simulações.

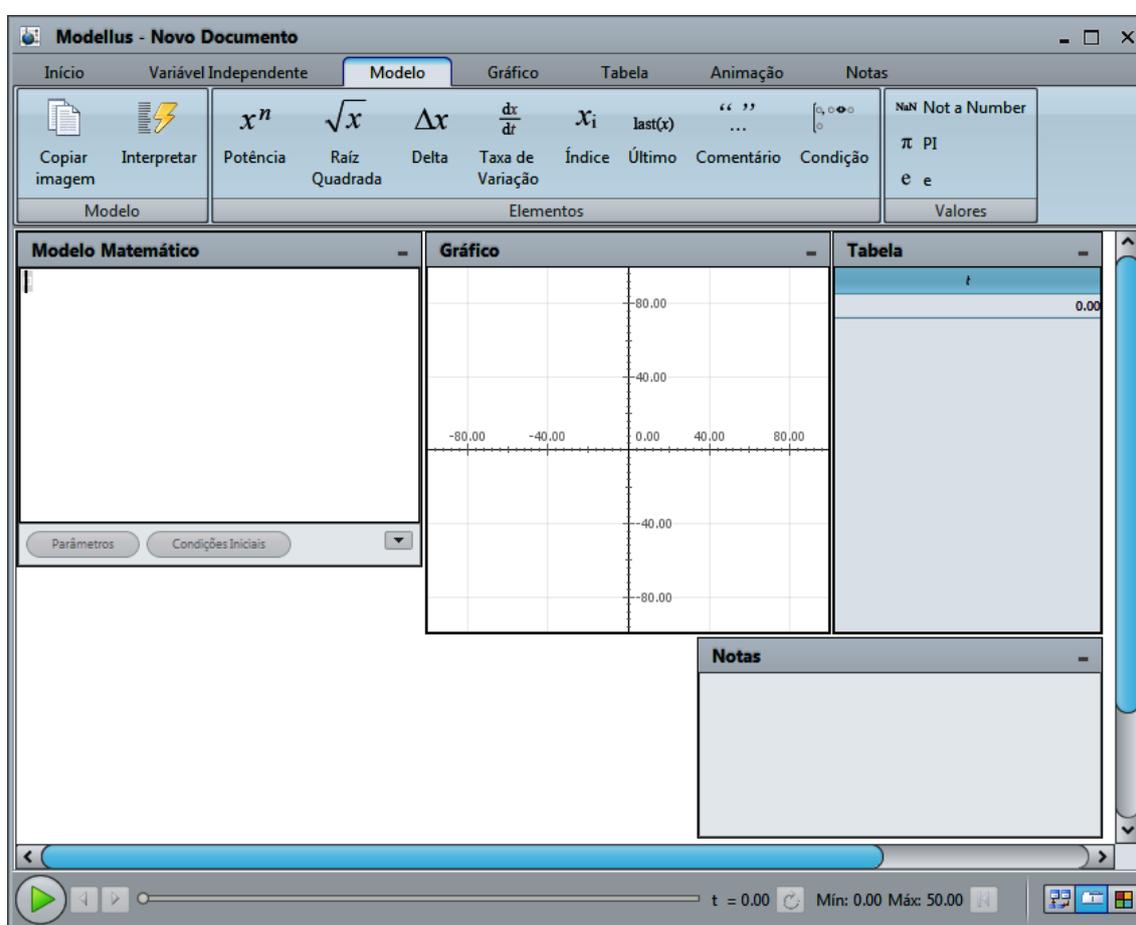


Figura 1 – Área principal de trabalho do Modellus mostrando as janelas de inserção do modelo matemático, gráfico, tabela, notas e a área de animação.

2.2. O modelo da viga bi-engastada

Para a modelagem dos modos normais de vibração de uma viga bi-engastada de massa M (Figura 2) utilizou-se um modelo analítico simplificado formado por duas massas $M/2$ vinculadas à parede e entre si por molas ideais com constante de elasticidade K (Figura 3). Este modelo constitui um sistema de dois graus de liberdade, não-amortecido, onde a energia

cinética é devida ao movimento das massas e a energia potencial está associada a força elástica das molas.

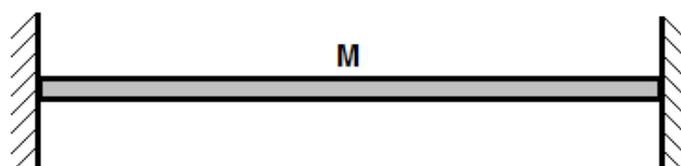


Figura 2 – Viga bi-engastada de massa M.

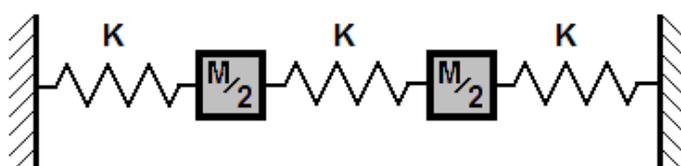


Figura 3 – Sistema massa mola com dois graus de liberdade.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma das formas de se obter as equações de movimento para o modelo de viga proposto neste trabalho é através das equações de Lagrange. A Lagrangiana do sistema massa mola com dois graus de liberdade é obtida a partir da energia cinética do sistema, associada ao movimento das massas, e do potencial elástico, associado à energia elástica armazenada nas molas quando o sistema oscila. Resolvendo a equação de Lagrange para um sistema conservativo, determina-se as equações do movimento escritas na notação matricial como segue:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (1)$$

onde: $[M]$ é a matriz de inércia e $[K]$ é a matriz de rigidez.

As frequências naturais de oscilação ω_1 e ω_2 são obtidas através da equação característica e apresentaram dependência de K e M (respectivamente, constante elástica e massa) como era esperado.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6K}{m}} \quad (2)$$

As frequências ω_1 e ω_2 representam os modos normais de vibração para o movimento desse sistema oscilante. Qualquer outro movimento pode ser descrito como uma combinação linear desses modos. Como o sistema não é amortecido nem forçado, os modos normais de vibração são caracterizados exclusivamente pelo tipo estrutura da viga. Isso leva a um problema de autovalor e autovetor possibilitando o desacoplamento das equações de movimento que descrevem o comportamento dinâmico do sistema (GRANDINETTI & FILHO, 2004).

No entanto, para implementar as equações do modelo no Modellus, precisamos somente daquelas que descrevem o movimento, visto que o próprio programa se encarrega de resolver de forma numérica as equações diferenciais. Isso é importante porque a maioria dos alunos dos períodos iniciais dos cursos de Engenharia ainda não estão familiarizados com problemas envolvendo esse tipo de equação. Isso permite que o programa possa ser utilizado já no início do curso sendo requerido, no caso deste trabalho, somente o conhecimento de derivadas, conteúdo esse ministrado já nas disciplinas introdutórias de Cálculo.

As equações de movimento para as duas massas $M/2$ vinculadas à parede e entre si por molas ideais são dadas por:

$$\frac{m}{2} a_1 = -Kx_1 - K(x_1 - x_2) \quad (3)$$

$$\frac{m}{2} a_2 = -Kx_2 - K(x_2 - x_1) \quad (4)$$

onde: a_1 , a_2 , x_1 e x_2 são as acelerações e deslocamentos das massas 1 e 2 respectivamente.

O Modellus também exige que cada derivada em relação as variáveis velocidade e posição sejam definidas como segue:

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1 \quad (5)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = a_2 \quad (6)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \quad (7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 \quad (8)$$

onde: v_1 e v_2 são as velocidades das massas 1 e 2 respectivamente.

Vale ressaltar novamente que a entrada desses dados na janela do modelo matemático no ambiente de trabalho do Modellus é feita de maneira direta da mesma forma da escrita normal, sem a necessidade do uso de uma sintaxe específica.

Na figura 4 está representada a área de trabalho do Modellus já com as equações implementadas e a simulação ativa. O caso estudado corresponde à situação em que as duas massas deslocam-se no mesmo sentido com deslocamentos iniciais iguais o qual corresponde a um dos modos normais, este denominado de simétrico. Pelo gráfico que representa a posição x_1 e x_2 das massas e a tabela que mostra o valor da força elástica de cada mola em função do tempo, fica claro a condição periódica do movimento. As duas massas não apenas oscilam com a mesma frequência ω_1 e a mesma fase, mas também possuem a mesma amplitude. Esse fato geralmente surpreende os alunos, que mesmo após solucionar o problema e obterem equações de movimento iguais para as duas massas com essas condições

de contorno, ainda assim esperavam um movimento mais “caótico” da configuração de massas e molas apresentada.

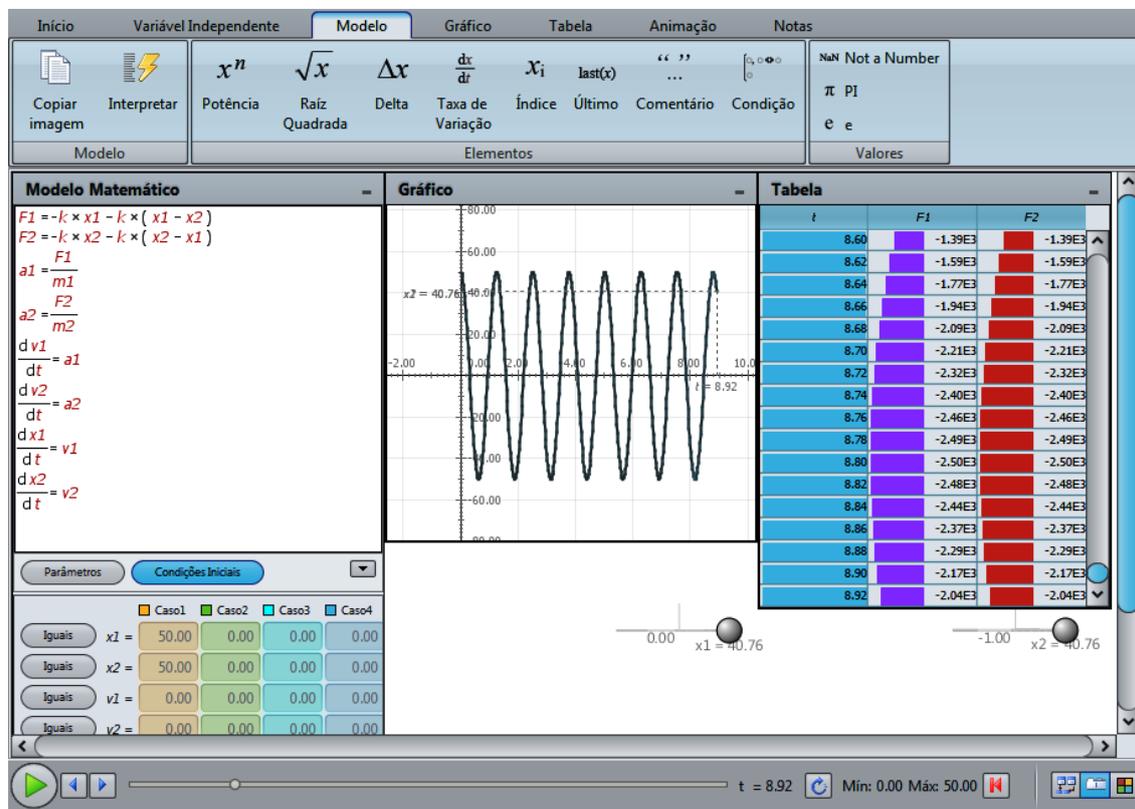


Figura 4 – Modelo do sistema massa mola com dois graus de liberdade mostrando o caso do modo normal de vibração acoplada com deslocamento simétrico.

A figura 5 mostra o modo normal antissimétrico, no qual as massas se deslocam em oposição de fase mas com amplitudes iguais. O movimento continua oscilatório e harmônico, porém agora a frequência ω_2 é maior visto que neste caso a mola central é distendida e comprimida, o que contribui para aumentar a constante elástica de cada oscilador. As duas massas passam, simultaneamente, pelas respectivas posições de equilíbrio e alcançam, também simultaneamente, os respectivos deslocamentos máximos.

Em ambos os casos estudados, pode-se calcular as frequências dos modos normais de vibração diretamente dos valores de período lidos do gráfico da posição *versus* tempo.

Na janela do modelo matemático no Modellus, há a possibilidade de facilmente alterar as condições iniciais de contorno e os valores dos parâmetros e variáveis presentes no exemplo. Até dez casos podem ser estudados simultaneamente com variação individual desses valores. Assim outras configurações dependentes das condições de contorno como, por exemplo, oscilações não harmônicas e o caso dos batimentos, podem ser facilmente analisadas possibilitando ao aluno uma maneira intuitiva de desenvolvimento cognitivo e de aprendizado construtivo.

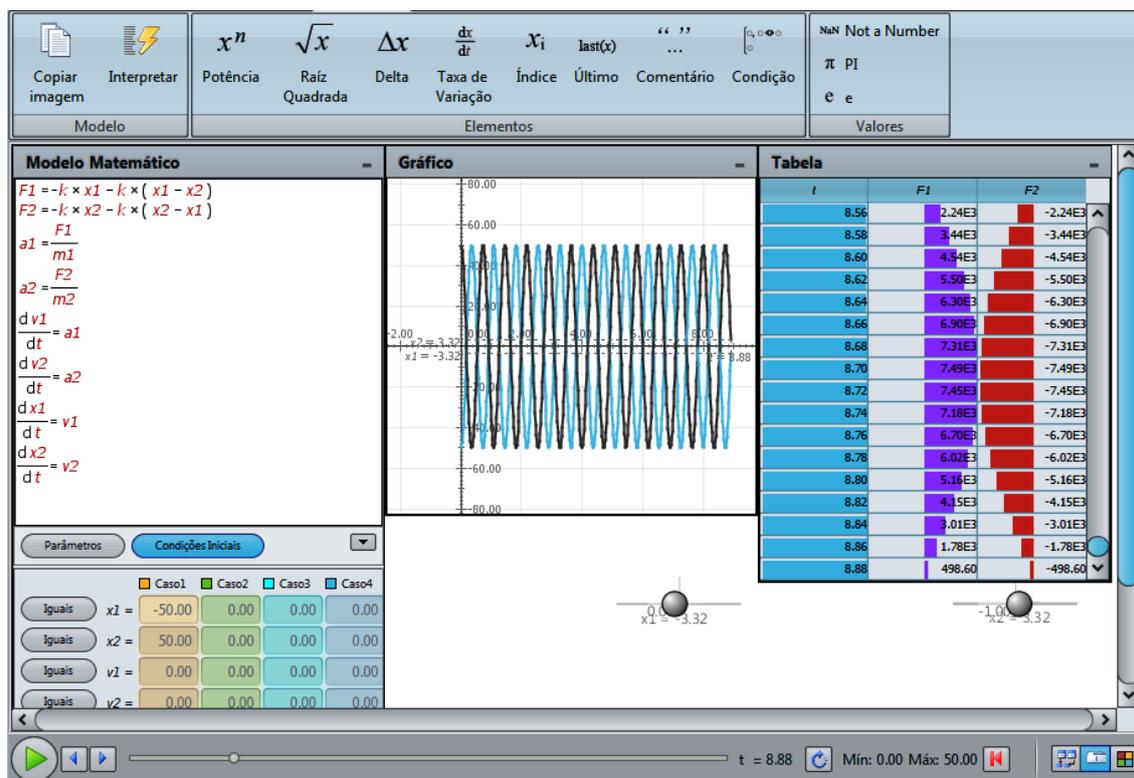


Figura 5 – Modelo do sistema massa mola com dois graus de liberdade mostrando o caso do modo normal de vibração acoplada com deslocamento antissimétrico.

4. CONCLUSÕES

O desenvolvimento deste trabalho teve como finalidade motivar tanto professores quanto alunos a utilizarem o programa Modellus, como ferramenta pedagógica de auxílio cursos técnicos e também os de engenharias. Obtivemos as frequências naturais de vibração de uma viga bi-engastada representada através de um modelo teórico simplificado de dois graus de liberdade. As frequências obtidas são dependentes somente dos parâmetros estruturais da viga. O entendimento desse modelo simples, futuramente nos permite avançar no estudo de sistemas com n graus de liberdade e contínuos, submetidos a diversas formas de carregamento.

O programa Modellus mostrou-se adequado para a modelagem do comportamento dinâmico do sistema. Sua utilização é fácil e suas possibilidades visuais, com os gráficos e animações, favorecem a exploração didática do modelo matemático. Somando-se à estas qualidades o fato de ser um programa livre, que é distribuído gratuitamente para fins educacionais, o Modellus se configura como uma ferramenta pedagógica vantajosa em relação às alternativas pagas e linguagens de programação.

Agradecimentos

Os autores desse trabalho gostariam de agradecer a Fundação Araucária e a Pró Reitoria de Pesquisa e Pós Graduação da UNIOESTE pelo apoio financeiro para realização dessa pesquisa.



5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A.; MOREIRA, M. A. Uma revisão da literatura sobre estudos relativos a tecnologias computacionais no ensino de física. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, v.4, n.3, p. 5-18, 2004.

ASSIS, W. S.; BITTENCOURT, T. N. e NORONHA, M. Desenvolvimento de recursos multimídia para o ensino de estruturas de concreto. *Revista IBRACON de Estruturas*, São Paulo, v. 32, p. 41-51, 2003.

GRANDINETTI, F. J.; FILHO, E. A. Comparação dos modos de vibrações teórico e experimental em vigas com trincas. *Rev. Ciências. Exatas*, Taubaté, v. 9/10, n. 1-2, p. 61-67, 2004.

MANZINI, N. I. J. Webapoio de física – uma possibilidade de apoio à aprendizagem. *Anais: XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. Belém - PA, 2012.

MARTHA, L. F. FTOOL - um programa gráfico-interativo para ensino de comportamento de estruturas. Manual do usuário. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002. 33 f. Disponível em: <<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/>>. Acesso em: março de 2013.

NETO, G. F.; ESTEVES, B. L.; PEREIRA, R. R.; JÚNIOR, L. O. A. Utilização do kit lego mindstorm nxt no ensino de controle de processos. *Anais: XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. Belém - PA, 2012.

NORONHA, M.; *et al.* Multimedia-based environment in structural engineering education. *Anais: International Conference on Engineering and Computer Education - ICECE 2000*, São Paulo, 2000.

TEODORO, V. D. UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA, Faculdade de Ciências e Tecnologia. *Modellus: Learning physics with mathematical modelling*, 2002. 248p, il. Tese (Doutorado).

UNL - UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA. Faculdade de Ciências e Tecnologia. *Modellus Web Page*. Disponível em: <<http://modellus.fct.unl.pt/>>. Acesso em: março de 2013.

VENTRI, D. A. B. e LINDENBERG NETO, H. O uso de animações para introduzir conceitos fundamentais da mecânica das estruturas: relato e avaliação da experiência. *Anais: XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, 2002, Piracicaba, 2002.

VERÍSSIMO, G. S.; RIBEIRO, J. C. L. e PAES, J. R. L. Software para cálculo de vigas mistas - VIGAMIX. *Anais: II Congresso Internacional da Construção Metálica - II CICOM*, São Paulo, 2002.



NATURAL FREQUENCY OF VIBRATION IN BEAMS - A DIDACTIC APPROACH BY COMPUTATIONAL SIMULATION

Abstract: *Computational simulations are important teaching tools because they expand and consolidate the knowledge acquired in the classroom, especially when dealing with problems, which require from the students to develop a degree of abstraction to realize the temporal evolution of the event being studied. However, if the computer is used only as a multimedia resource, without the student interaction with the mathematical model describing the physical phenomenon, this tool will not contributing effectively to the knowledge construction. This paper presents a theoretical study, by computational simulation, of the normal modes of vibration of bi-restrained beams, initially characterized by undamped free vibration. The theory was developed considering a discrete with two degrees of freedom model. It was verified that the natural frequencies of oscillation found, are unique characteristics of the structure and independent of any applied external loading, allowing decoupling of the members of the dynamic system equations. After the formulation of the theoretical model, with the aid of computational modeling and Modellus program, a simulation was constructed to assist in the transmission of knowledge of this type of phenomenon. We expect to contribute with interesting educational alternatives that collaborate effectively to improve teaching of the engineering at the university.*

Key-words: *Computer simulation, Natural oscillation frequency, Modellus, Beams.*