ALGORITMO DIDÁTICO PARA O MÉTODO DE GAUSS

Augusto M. Horiguti – augusto.horiguti@farroupilha.ifrs.edu.br
Juliane Donadel – juliane.donadel@farroupilha .ifrs.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Farroupilha
AV. São Vicente, 785, Bairro Cinquentenário
95180-000 – Farroupilha – RS

Resumo: *Diversos trabalhos nas áreas de educação e engenharia, junto dos altos índices de reprovação nas disciplinas básicas que envolvem matemática e física, constatam a grande lacuna na aprendizagem de conceitos matemáticos dos alunos ingressantes nos cursos superiores. Trata-se de uma deficiência na compreensão da teoria matemática, culminando na dificuldade de resolução de problemas. Nesse contexto, este trabalho visa mostrar um algoritmo didático baseado no método de Gauss para resolução de sistemas de equações lineares. O método é simples e de fácil compreensão, baseia-se no uso de tabelas para resolução do sistema. Afinal, a prática educativa necessita de constante renovação para contemplar de maneira simples e eficiente o processo de ensino-aprendizagem, nas mais diversas áreas do conhecimento.*

Palavras-chave: *Sistemas de Equações Lineares, Método de Gauss, Algoritmo Didático.*

1. INTRODUÇÃO

A prática educativa necessita de constante renovação, buscando alternativas diversas para que o paradigma do processo de aprendizagem seja contemplado de maneira eficiente. Atualmente, percebe-se uma grande lacuna na aprendizagem de conceitos matemáticos em alunos que ingressam em cursos técnicos pós-médios ou superiores, sendo que, essa defasagem culmina nas áreas das ciências exatas e engenharias. Dados de pesquisas de várias universidades nos cursos de engenharia indicaram uma concentração de reprovação nas disciplinas básicas, tais como cálculo e física, sendo que, 48% dos alunos que ingressaram em cursos de engenharia no país não se graduaram ao final do curso segundo dados do INEP/MEC (BRASIL, 2012; RAMOS *et al*., 2008).

Durante o ensino fundamental e médio, muitos alunos não conseguem adquirir habilidades para pensar logicamente e/ou aplicar ferramentas matemáticas para resolver problemas. Essa dificuldade é apontada por Pesquisas como as de Pedroso e Krupechacke (2009) e Cury e Bisognin (2006), as quais mostram o baixo nível de conhecimento de conceitos matemáticos básicos.

Com o intuito de minimizar esses problemas, as instituições de ensino superior estão implantando diversos tipos de projetos como disciplinas ou cursos preparatórios de matemática básica (COUTO, 2013), monitorias em turnos inversos aos da aula, métodos diferenciados de ensino baseados em projetos ou resolução de problemas práticos, (CAVALCANTE & EMBIRUÇU, 2013), entre outras (PERALTA *et al.*, 2013).

Pensando nessas dificuldades e na busca de alternativas para facilitar a compreensão e aplicação das ferramentas matemáticas tão importantes no desenvolvimento desses cursos, esse trabalho visa mostrar um método didático para a solução de sistemas de equações lineares, já que tanto a bibliografia de ensino básico como a de superior aborda essa parte da álgebra linear com métodos baseados no cálculo de determinantes ou na manipulação de matrizes. Porém, para resolução de sistemas de quarta ordem ou mais esses métodos tornam-se bastante trabalhosos, tornando-se cansativos e, consequentemente, elevando a probabilidade de erros. Sabe-se também que ferramentas computacionais são grandes aliadas nesses casos, no entanto, é preciso compreender o método para posteriormente, implementá-lo computacionalmente.

O objetivo do trabalho é mostrar um método de fácil manuseio e compreensão, baseado na Eliminação de Gauss para resolver sistemas de equações lineares. O método proposto utiliza tabelas como ferramenta de organização e algoritmo de cálculo.

2. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A resolução de sistemas de equações lineares e o cálculo de determinantes são exemplos de problemas fundamentais da álgebra linear que foram estudados desde longa data. Leibniz encontrou a fórmula para os determinantes em 1693 e, em 1750, Cramer apresentou um método para resolver sistemas lineares baseado no cálculo de determinantes, conhecida como Regra de Cramer. (LAMIN, 2000).

A solução de sistemas baseado em determinantes é a mais usada em nível médio e técnico, porém, esse método restringe-se a sistemas de terceira ordem, pois o cálculo de determinantes para matrizes de quarta ordem ou mais, torna-se extremamente trabalhoso. Outro método de resolução de sistemas baseado em escalonamento é conhecido por Eliminação de Gauss, porém, menos utilizado por envolver manipulação da matriz do sistema em questão.

A maioria dos livros de ensino médio aborda métodos de resolução de sistemas através de determinantes e escalonamento com matrizes de terceira ordem, no máximo. Sistema de ordem superior torna-se de difícil resolução a medida que necessitam de cálculo de determinantes e/ou manipulação das matrizes associadas. (PAIVA, 2005; DANTE, 2010). Já os livros de ensino superior abordam sistemas lineares de ordem n, em que a resolução dos mesmos se dá através de escalonamento. (STEINBRUCH & WINTERLE, 2010; BOLDRINI *et al.*,1986).

2.1. Método de Eliminação de Gauss

O método de Gauss para solução de sistemas de equações lineares é um método numérico direto, em que a solução do sistema é obtida com um número finito de operações. Com *(n-1)* passos o sistema linear $Ax = B$ é transformado num sistema triangular equivalente. (BARROSO *et al.*, 1987; RUGGIERO & LOPES, 2009).

Considera-se um sistema linear do tipo $Ax = B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

O objetivo do método de Gauss consiste em eliminar os elementos a_{ij} para $i > j$ para obter uma matriz triangular superior:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \dots \\ b'_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

A partir dessa matriz triangular, aplicam-se substituições sucessivas para obter-se a solução pretendida. O método de eliminação de Gauss consiste em *n-1* passos, em que os elementos a'_{ij} são obtidos a partir dos elementos a_{ij}. O elemento a_{kk} é chamado de pivô sendo que, para $k=1,\dots n-1$, se o pivô $a_{kk}= 0$ então tem-se que efetuar a troca de linhas. Por outro lado, se $a_{kk} \neq 0$, utiliza-se a seguinte rotina:

1º) Calcula-se o quociente m_{ik}: $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$, para $i = k+1, \dots, n$;

2º) Determinam-se os elementos a_{ij}^{k+1}: $a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - m_{ik}a_{kj}^k$, para $i,j = k+1, \dots,n$;

3º) Determinam-se os elementos b_i^{k+1}: $b_i^{k+1} = b_i^k - m_{ik}b_k^k$, para $i = k+1, \dots,n$.

De forma que, ao final dos *n-1* passos obtém-se o sistema triangular superior conforme a equação matricial acima.

2.2. Algoritmo didático para o método de Gauss

O Algoritmo a seguir mostra um método simplificado para resolver sistemas de equações lineares, baseado na Eliminação de Gauss. Inicialmente usa-se a matriz total do sistema, ou seja:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

O princípio básico deste algoritmo é o mesmo do método de eliminação de Gauss, com a diferença que não se usa o quociente m_{ik} para o cálculo dos novos elementos a_{ij}^{k+1}, mas sim a multiplicação cruzada de termos, isto é,

1º) Determinam-se os elementos a_{ij}^{k+1}: $a_{ij}^{k+1} = a_{kk}^{k} a_{ij}^{k} - a_{ik}^{k} a_{kj}^{k}$, para $i,j = k+1, ..., n$;

2º) Determinam-se os elementos b_i^{k+1}: $b_i^{k+1} = a_{kk}^{k} b_i^{k} - a_{ik}^{k} b_k^{k}$, para $i = k+1, ..., n$.

Cada vez que esta rotina é executada, eliminam-se uma linha e uma coluna da matriz total.

Para exemplificar, supõe-se um sistema linear solúvel e determinável com quatro incógnitas, dado pela Equação (4):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases} \qquad (4)$$

A matriz total do sistema será 4 x 5, conforme Equação (5):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Utiliza-se a forma tabular para facilitar a visualização, conforme Tabela 1:

Tabela 1 – Coeficientes da matriz 4 X 5.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4

A matriz resultante será 3 x 4, com os elementos da Tabela 2:

Tabela 2 – Coeficientes da matriz 3 X 4.

$a'_{22} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$	$a'_{23} = a_{11}a_{23}-a_{13}a_{31}$	$a'_{34} = a_{11}a_{24}-a_{14}a_{41}$	$b'_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}$

$a'_{32} = a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}$	$a'_{33} = a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$	$a'_{34} = a_{11}a_{34}-a_{14}a_{31}$	$b'_3 = a_{11}b_3-b_1a_{31}$
$a'_{42} = a_{11}a_{42}-a_{12}a_{41}$	$a'_{43} = a_{11}a_{43}-a_{13}a_{41}$	$a'_{44} = a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41}$	$b'_4 = a_{11}b_4-b_1a_{31}$

Repete-se esta rotina, obtendo-se como resultado uma matriz 2 x 3, de acordo com Tabela 3:

Tabela 3 – Coeficientes da matriz 2 X 3.

$a''_{33} = a'_{22}a'_{33} - a'_{32}a'_{23}$	$a''_{34} = a'_{22}a'_{34} - a'_{32}a'_{24}$	$b''_3 = a'_{22}b'_3 - a'_{32}b'_2$
$a''_{43} = a'_{22}a'_{43} - a'_{42}a'_{23}$	$a''_{44} = a'_{22}a'_{44} - a'_{42}a'_{24}$	$b''_4 = a'_{22}b'_4 - a'_{42}b'_2$

até obter uma matriz 1 x 2, como mostra Tabela 4:

Tabela 4 – Coeficientes da matriz 1 X 2.

$a'''_{44} = a''_{33}a''_{44} - a''_{34}a''_{43}$	$b'''_4 = a''_{33}b''_4 - a''_{43}b''_3$

fazendo com que a solução da quarta incógnita seja igual a:

$$x_4 = \frac{b'''_4}{a'''_{44}} \tag{6}$$

As demais incógnitas terão soluções dadas por:

$$x_3 = \frac{b''_3 - a''_{34}\, x_4}{a''_{33}} \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}\, x_3 - a'_{24}\, x_4}{a'_{22}} \tag{7}$$

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}\, x_2 - a'_{13}\, x_3 - a'_{14}\, x_4}{a'_{11}} \tag{8}$$

Porém, qualquer linha dessas matrizes poderá ser utilizada para a determinação das demais incógnitas.

Cabe lembrar que, assim como em qualquer sistema linear, é possível encontrar Sistemas Possíveis e Determináveis, que terão a solução proposta acima, assim como Sistemas Possíveis e Indetermináveis ou sistemas Impossíveis.

Através desse algoritmo, um Sistema Possível e Indeterminável ficará caracterizado quando pelo menos duas linhas da mesma matriz forem idênticas ou pelo menos uma delas tiver todos os elementos nulos ou ainda, na última etapa, for encontrada a linha conforme a Tabela 5:

Tabela 5 – Coeficientes da matriz 1 X 2 para sistema possível e indeterminado.

0	*0*

Já um Sistema Impossível é caracterizado principalmente na última etapa quando apenas o elemento da primeira coluna é nulo, conforme Tabela 6:

Tabela 6 – Coeficientes da matriz 1 X 2 para sistema impossível.

0	*Número ≠ 0*

2.3. Exemplo sobre o uso do algoritmo didático em sistemas lineares

Resolução de sistemas provenientes da análise de circuitos pelas Leis de Kirchoff. Suponha o seguinte circuito (a resistência R_4 está em curto-circuito, mas pretende-se apenas utilizar a configuração para ilustrar o método):

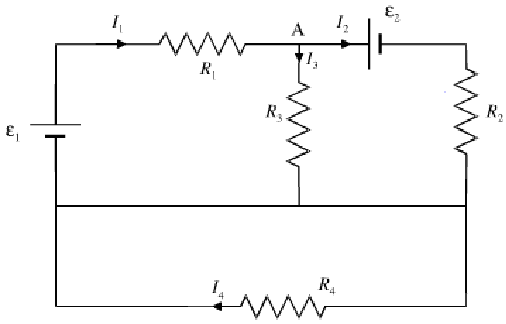

Figura 1: Circuito elétrico

Em que $\varepsilon_1 = 5$ V, $\varepsilon_2 = 1$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1\ \Omega$, de forma que obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 + I_3 = 5 \\ I_2 - I_3 = -1 \\ I_1 + I_2 + I_4 = 4 \end{cases} \tag{9}$$

A matriz total será neste caso a mostrada na Tabela 10:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{10}$$

O algoritmo é montando conforme a Tabela 7:

Tabela 7 – Coeficientes da matriz 4 X 5.

1	*-1*	*-1*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*0*	*5*
0	*1*	*-1*	*0*	*-1*
1	*1*	*0*	*1*	*4*

Na primeira etapa reduz-se para uma matriz 3 x 4:

Tabela 8 – Cálculo dos coeficientes da matriz 3 X 4.

1x0 - 1x(-1) = 1	*1x1 - 1x(-1) = 2*	*1x0 - 1x0 = 0*	*1x5 - 1x0 = 5*
1x1 - 0x(-1) = 1	*1x(-1) - 0x(-1) = -1*	*1x0 - 0x0 = 0*	*1x(-1) - 0x0 = -1*
1x1 - 1x(-1) = 2	*1x0 - 1x(-1) = 1*	*1x1 - 1x0 = 1*	*1x4- 1x0 = 4*

Ou seja,

Tabela 9 – Coeficientes da matriz 3 X 4.

1	*2*	*0*	*5*
1	*-1*	*0*	*-1*
2	*1*	*1*	*4*

Na próxima etapa a matriz anterior é reduzida a uma matriz 2 x 3:

Tabela 10 – Coeficientes da matriz 2 X 3.

-3	*0*	*-6*
-3	*1*	*-6*

Repetindo a rotina, obtém-se a matriz 1 x 2:

Tabela 11 – Coeficientes da matriz 1 X 2.

-3	*0*

Logo, a quarta incógnita (I_4) terá como solução:

$$I_4 = \frac{0}{-3} = 0A \tag{11}$$

Para a determinação das demais incógnitas, pode-se utilizar as linhas obtidas em cada um dos passos acima. Por exemplo, para calcular a terceira incógnita (I_3) pode-se usar a primeira linha da Tabela 9, a qual corresponde à Equação (11):

$$-3I_3 + 0I_4 = -6 \Rightarrow -3I_3 = -6 \Rightarrow I_3 = 2A \tag{11}$$

A determinação da segunda incógnita (I_2) utilizamos a terceira linha da Tabela 7 e obtém-se a Equação (12):

$$I_2 - I_3 = -1 \Rightarrow I_2 - 2 = -1 \Rightarrow I_2 = 1A \tag{12}$$

Finalmente, o valor de I1 é obtido pela primeira linha da Tabela 8, a qual fornece a Equação (13):

$$I_1 + I_3 = 5 \Rightarrow I_1 + 2 = 5 \Rightarrow I_1 = 3A. \tag{13}$$

Sendo assim, um sistema de quarta ordem é resolvido com poucas operações e de maneira simples e eficiente obtêm-se os valores das correntes elétricas.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É senso comum entre alunos e professores dos mais diversos níveis de ensino, que a matemática é uma das disciplinas em que os estudantes apresentam maior dificuldade de aprendizagem. Como mencionado anteriormente, diversos autores constaram esse fato que torna-se mais visível e preocupante nos cursos de Engenharia, em que a matemática é base para todo o curso, culminando em altos índices de reprovação. Desse problema, aliado a constante busca por renovação e aperfeiçoamento da prática de ensino surgiu a idéia da aplicação do método proposto. O algoritmo didático baseado no método de Gauss para resolução de sistemas mostrou-se eficiente por ser de fácil compreensão e manuseio, simplificando o número de operações necessárias para resolver sistemas lineares. O algoritmo usa tabelas como forma de organização e manutenção do método. Portanto, pode ser utilizado como ferramenta na resolução de problemas práticos como o exemplo mostrado. Além disso, o método teve uma boa aceitação por parte dos alunos, os quais resolveram sistemas de ordem maior que três de forma simples e eficiente.

Agradecimentos

Professor Celso Eduardo Pascholati, que forneceu subsídios para a aplicação do algoritmo didático.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, Leônidas Conceição. *et al.* Cálculo Numérico com aplicações. 2 ed. São Paulo: Harbra, 1987, 367p, Il.

BOLDRINI, José Luiz. *et al.* Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986, 407p, il.
BRASIL**. Relatório da Comissão Especial de Estudos sobre a Evasão nas Universidades Públicas Brasileiras. Diplomação, Retenção e Evasão nos Cursos de Graduação em Instituições de Ensino Superior Públicas. ANDIFES/ABRUEM/SESU/MEC**. Disponível em: <http://www.andifes.org.br/wpcontent/files_flutter/Diplomacao_Retencao_Evasao_Graduacao_em_IES_Publicas-1996.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2014.
CAVALCANTE, F.P.L; EMBIRUÇU, M.S. Aprendizado com base em problemas: como entusiasmar os alunos e reduzir a evasão nos cursos de graduação em Engenharia. Anais: XLI - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Gramado: UFRGS, 2013.
COUTO, R.G.M. et al. Avaliação do impacto do Cálculo Zero no desempenho de alunos ingressantes de cursos de Engenharia. Anais: XLI - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Gramado: UFRGS, 2013.
DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto e Aplicações. Vol único, 3 ed. São Paulo: Ática, 2010. 736p, il.
LAMIN, Maria Regina Nunes; UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA, Resolução de Problemas Modelados com Sistema de Equações Lineares, 2000. 91p, il. Monografia (Graduação).
PAIVA, Manoel. Matemática. Vol único, 1 ed. São Paulo: Moderna, 2005. 578p, il.
PEDROSO, C. M.; KRUPECHACKE, J. E. Análise de alternativas para recuperação de fundamentos de matemática no ensino de Cálculo em cursos de Engenharia. Anais: XXXVII – Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Recife. 2009.
PERALTA, V.A; BRESSAN, G.M.; VICENTE, J.P. Articulação entre a teoria matemática e a teoria de sinais para motivas alunos do ensino técnico a ingressarem na Engenharia. Anais: XLI - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Gramado: UFRGS, 2013.
RAMOS, M.O. *et al.* A reprovação por frequência nos cursos de engenharia da Universidade Federal do Vale do São Francisco: um olhar dos docentes e discentes. Anais: XXXVI - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. São Paulo: Escola Politécnica da USP, 2008.
REHFELDT, M.J.H. *et al*. Investigando os conhecimentos prévios dos alunos de Cálculo do Centro Universitário Univates. Revista de Ensino de Engenharia, v. 31, n.1, p. 24-30, 2012.
RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera L. da Rocha. Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Makron Books, 2009. 395p, il.
STEINBRUCH, Alfredo. WINTERLE, Paulo. Álgebra Linear. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 2010. 583p, il.

DIDACTIC ALGORITHM FOR GAUSS METHOD

Abstract: *Several papers in the areas of education and engineering, along the high failure rates in core subjects involving mathematics and physics, show the large gap in learning* *mathematical concepts of freshmen in university courses. This is a deficiency in the understanding of mathematical theory, culminating in the difficulty of solving problems. In this context, this work aims to show a didactic algorithm based on Gauss method for solving systems of linear equations. After all, the educational practice needs constant renovation to include a simple and efficient way the process of teaching and learning in diverse areas of knowledge.*

Key-words: *Systems of linear equations, Gauss method, Didactic Algorithm.*