



APLICAÇÃO DIDÁTICA DO FILTRO DE KALMAN USANDO UMA CÂMERA DIGITAL

Fernando da Luz Francisco – flf19@dsif.fee.unicamp.br

Gilmar Barreto – gbarreto@dsif.fee.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Av. Albert Einstein - 400

Campinas – São Paulo

CEP 13083-852

Resumo: *Este artigo sugere um experimento para laboratório com o objetivo de fortalecer o aprendizado do Filtro de Kalman. O objetivo é gravar a trajetória de uma pequena esfera lançada manualmente num certo ângulo para que a mesma realize um movimento balístico; após toda modelagem é realizada pelo aluno usando conceitos básicos de física geralmente aprendidos no primeiro ano de graduação e por último, o modelo desenvolvido é colocado no espaço de estados para então ser aplicado o Filtro de Kalman, para reproduzir a trajetória experimental. Além de simples de realizar e de não precisar de equipamentos sofisticados, o experimento requer todos os passos sejam realizados: preparação do experimento, coleta de dados, adequação do modelo para uma forma mais adequada para o propósito e por último a aplicação do Filtro de Kalman. Para auxiliar com a análise dos resultados e com o que é esperado durante sua execução, o experimento sugerido foi realizado e seus resultados também estão contidos no artigo.*

Palavras-chave: *Filtro de Kalman, Rastreamento, Ensino de Engenharia.*

1. INTRODUÇÃO

Em 1960 Rudolf Emil Kalman publicou seu famoso trabalho "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems" enquanto trabalhava no Research Institute for Advanced Studies, motivado principalmente pela corrida espacial, que até então era liderada pela União Soviética que já havia conseguido colocar em órbita o primeiro satélite artificial e já tinha testes avançadas para voos tripulados (GREWAL & ANDREWS, 2010.)

O Filtro de Kalman é um algoritmo que produz estimativas do estado de um sistema usando medidas ruidosas observadas ao longo do tempo. Ele opera recursivamente, ou seja, só precisa da medida no instante atual e do cálculo do estado do instante anterior. Além disso, nem sempre é possível ou desejável medir algumas variáveis de interesse para um determinado fim (e.g. controle) e o filtro de Kalman pode ser usado para inferir essas



variáveis através de medidas indiretas. O filtro também pode ser usado para prever o comportamento de sistemas que não são controlados pelo homem, como por exemplo o movimento de corpos celestes.

Dentre os motivos que tornaram o filtro tão popular nesses mais de 50 anos de existência estão:

- Facilidade em implementação em computadores digitais devido à sua recursividade.
- Pode ser utilizado sem conhecer exatamente o funcionamento 'interno' do filtro.
- Utiliza representação no espaço de estados.

O Filtro de Kalman pode ser aplicado nas mais diversas áreas do conhecimento, incluindo medicina, agricultura, ciências sociais, computação e etc. Com tal poder e inúmeras aplicações, o Filtro de Kalman é um dos temas mais recorrentes no ensino de Engenharia, que serve como tema deste trabalho, com o objetivo de unir a teoria com o aspecto prático, solidificando o aprendizado.

O experimento sugerido aqui para ilustrar o Filtro de Kalman é o rastreamento de uma esfera lançada manualmente em um movimento balístico, gravado por uma câmera digital comum, presente em vários aparelhos eletrônicos como, por exemplo, a de celular.

2. O FILTRO DE KALMAN

O Filtro de Kalman trata com o problema de estimar um estado x de um sistema dinâmico, linear, estocástico e discreto modelado no espaço de estados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t + 1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

onde $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor ruído da planta e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de ruído na observação (saída). Os ruídos \mathbf{w} e \mathbf{v} tem distribuição de probabilidade Gaussiana, com média zero e matrizes de covariância $\mathbf{Q}=\text{cov}(\mathbf{x},\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\mathbf{R}=\text{cov}(\mathbf{y},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, respectivamente.

O Filtro de Kalman geralmente é apresentado em duas fases: predição e atualização. A fase de predição usa a estimativa do estado no tempo anterior $t-1$ para obter uma estimativa do estado no tempo atual t , não incluindo ainda a informação vinda do estado atual. Já na fase de atualização a estimativa da fase de predição é combinada com a observação atual para melhorar a estimativa do estado. A Figura 1 ilustra a transição das fases e as equações pertinentes a cada uma:

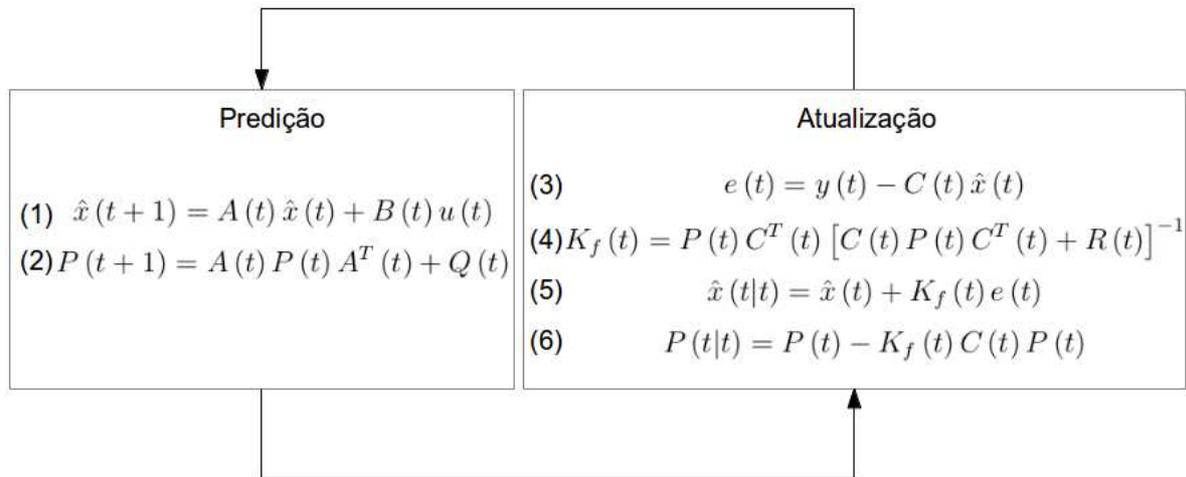


Figura 1 – Filtro de Kalman - Fases: Predição e Atualização

onde $\hat{x}(t+1)$ é a estimativa ótima (no sentido de mínimos quadrados) de um vetor $x(t+1)$ dada as informações até o instante t ; $\hat{x}(t)$ é a estimativa do vetor $x(t)$, que vem da fase anterior; $K_f(t)$ é o ganho do Filtro de Kalman, que serve para ponderar a informação nova adicionada através do processo de inovação $e(t)$; as matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $Q(t)$, $P(t)$ são as matrizes do modelo de espaço de estados já definidas anteriormente. Para mais detalhes sobre o Filtro de Kalman, fica como sugestão (KATAYAMA, 2005) e (GIBBS, 2011).

3. RASTREAMENTO DE UM OBJETO - MOVIMENTO BALÍSTICO

Antes de iniciar a aplicação em si, é preciso refletir sobre se é adequado aplicar o Filtro de Kalman em problemas de rastreamento.

Considere um radar que leva cerca de 10 segundos para completar uma volta em torno de seu próprio eixo. A Figura 2 mostra um plano para um certo ângulo em dois instantes diferentes; t_1 que detecta dois aviões com as suas respectivas distâncias até o radar a_1 e b_1 e, de forma semelhante, no instante t_2 o radar detecta dois aviões distantes de a_2 e b_2 . Uma das questões é se os dois aviões detectados em t_1 são os mesmos detectados em t_2 . Outra pergunta que alguém poderia fazer é se houve mudança na ordenação deles, por exemplo o avião B no segundo instante possivelmente pode ter tomado a frente em relação ao avião A, sendo que um erro desse tipo arruinaria a velocidade estimada dos dois aviões. As respostas para essas questões são importantes, por exemplo, para o controle de aviação civil poder gerenciar o espaço aéreo a fim de evitar colisões (BROOKNER, 1998).

Predições via filtro de Kalman são usadas em rastreamento para prover uma consistência entre os objetos rastreados em dois instantes diferentes, ou seja, resgata o caráter contínuo do movimento mesmo que a detecção seja feita em tempo discreto.

3.1. Metodologia

Em nosso experimento foi gravado um vídeo da trajetória de uma esfera com cerca de 4 cm de diâmetro arremessada manualmente com um certo ângulo, de modo que a trajetória se comporte como um movimento balístico. Para registrar o experimento foi



utilizada uma câmera digital capaz de capturar imagens com 1920x1080 pixels de resolução e 30 quadros por segundo, direcionada à um fundo de cor clara de tal forma que capturasse a imagem da esfera quando está já estava em movimento.

A Figura 3 ilustra um quadro da gravação em que a esfera estava em seu ponto mais alto. A falta de nitidez da Figura 3 é devido ao fato de que a camera utilizada não é adequada para imagens em movimento, no entanto o Filtro de Kalman lida bem com esse problema, como veremos adiante.

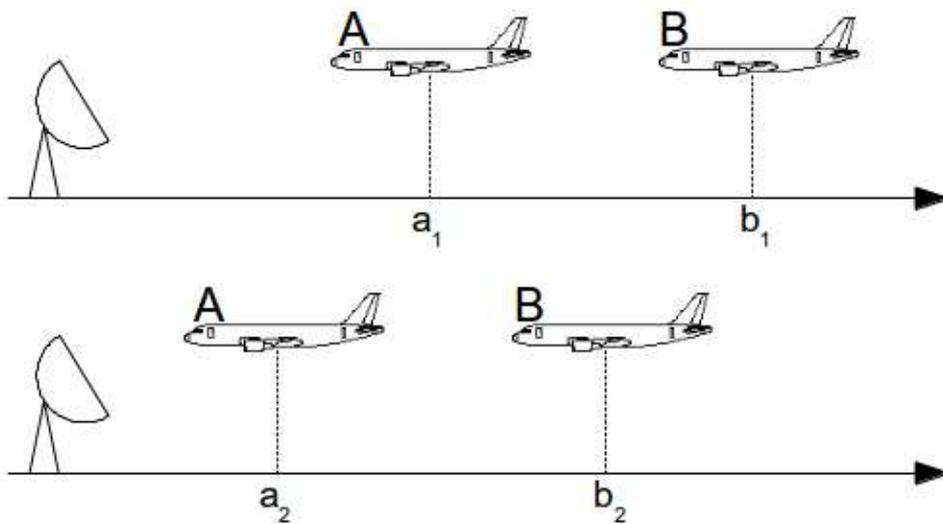


Figura 2 – Posições dos aviões em diferentes instantes.

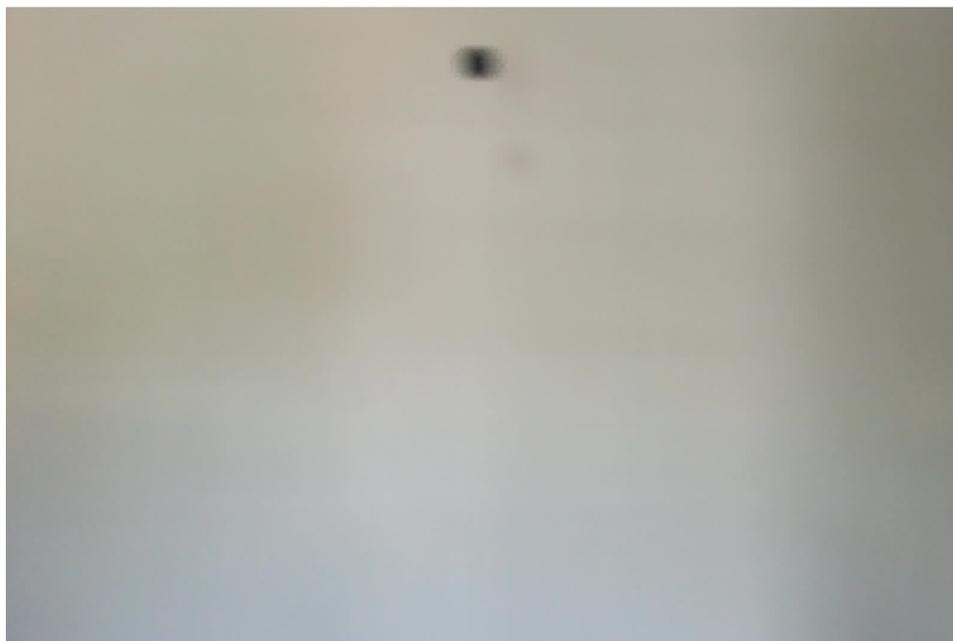


Figura 3 - A esfera no ponto mais alto da trajetória

3.2. Processamento do vídeo

Dada a natureza discreta do filtro de Kalman, é preciso converter o vídeo para uma sequência de imagens. Para tal fim, neste exemplo foi utilizado o software livre Ffmpeg, resultando em 28 quadros. Depois é preciso encontrar alguma forma de medir a posição do objeto em cada imagem. Uma das formas possíveis de se medir essa posição é usar uma técnica chamada de Limiar Preto/Branco (ou binarização) em 50%, ou seja, uma vez que a imagem foi convertida para uma escala de cinza, todos os pixels com valor maior ou igual a 127 foram redefinidos com o valor 255 (branco) e os pixels com valor menos que 127 foram redefinidos com o valor 0 (preto)(SZELISKI, 2010). A Figura 4 mostra o resultado dessa manipulação.

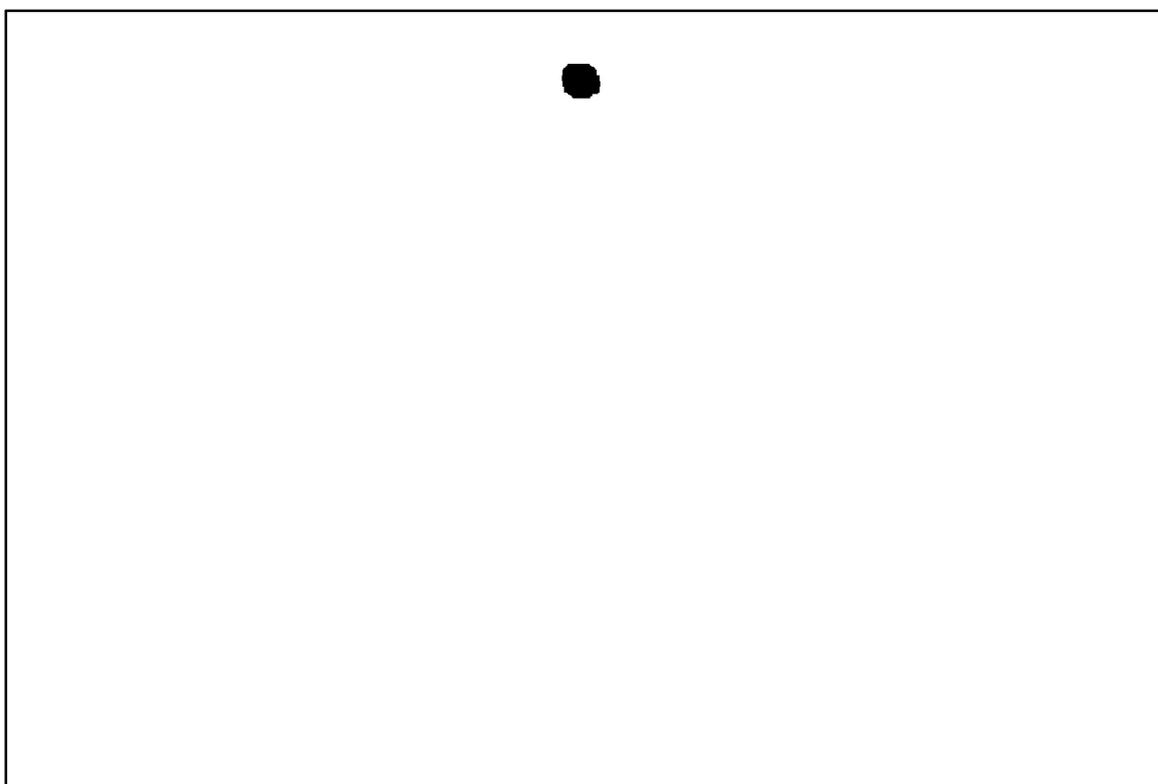


Figura 4 - Limiar aplicado à Figura 3

3.3. Modelagem do movimento

O movimento da esfera foi modelado usando equações da cinemática que relacionam posição, velocidade, aceleração e tempo. A modelagem fica muito mais simples analisando o movimento balístico separadamente em dois eixos, x e y , conforme a Figura 5. Cabe notar que essas equações são válidas se desprezarmos o efeito do ar e considerarmos a esfera como um objeto pontual, mas que mesmo assim formam um bom modelo para o propósito deste trabalho pois as velocidades envolvidas são baixas suficientes para que o arrasto devido ao ar e efeitos de rotação não alterem de forma significativa o movimento.

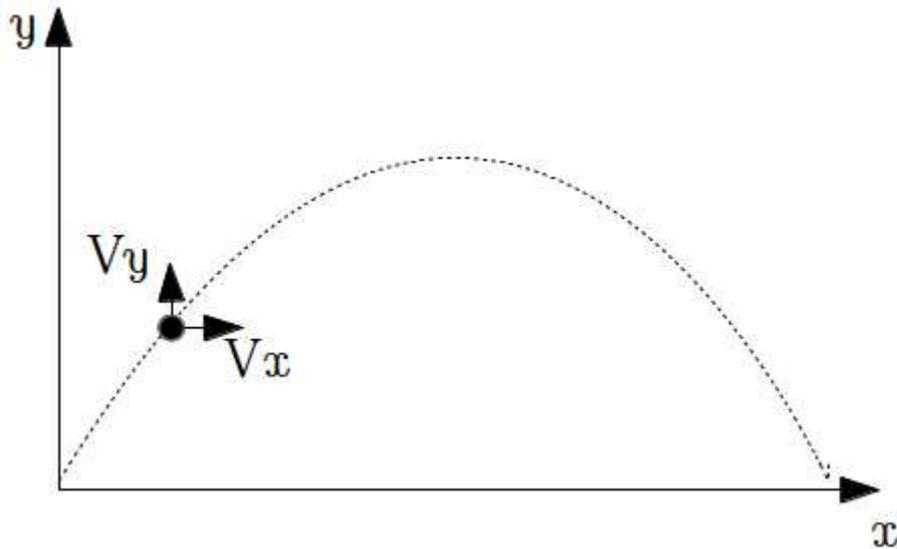


Figura 5 - Decomposição nos eixos x e y do movimento balístico

As equações de posição e velocidade para x e y são respectivamente:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + V_{0x}t \\V_x(t) &= V_{0x} \\y(t) &= y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2} g t^2 \\V_y &= V_{0y} - g t\end{aligned}$$

onde $x(t)$ é a posição no eixo x no instante t , $y(t)$ é a posição no eixo y no instante t , x_0 é a posição inicial no eixo x , y_0 é a posição inicial no eixo y , V_{0x} é a velocidade inicial no eixo x , V_{0y} é a velocidade inicial no eixo y e g é a aceleração da gravidade.

Como o Filtro de Kalman é discreto e recursivo reescrevemos as equações anteriores como:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t-1) + V_x(t-1)\Delta t \\V_x(t) &= V_x(t-1) \\y(t) &= y(t-1) + V_y(t-1)\Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2 \\V_y(t) &= V_y(t-1) - g \Delta t\end{aligned}$$

que podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ V_x(t) \\ y(t) \\ V_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t-1) & V_x(t-1)\Delta t \\ & V_x(t-1) \\ y(t-1) & V_y(t-1)\Delta t \\ & V_y(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ -g\Delta t \end{bmatrix}$$



Adequado a equação matricial anterior ao modelo no espaço de estados dado pela Equação (1) temos:

-Vetor de estados:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ V_x(t) \\ y(t) \\ V_y(t) \end{bmatrix}$$

-Matriz **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-Matriz **B**:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-Matriz **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-Vetor de entradas

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}g \Delta t^2 \\ -g \Delta t \end{bmatrix}$$

3.4. Implementação do Filtro de Kalman

As condições iniciais, posição e velocidade, podem ser obtidas dos primeiros quadro do vídeo de forma aproximada, de tal forma que a matriz de covariância do erro de estimação **P** seja escrita com os valores da sua diagonal próximos de 1 dada a certeza de uma boa estimativa inicial,

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 50 \\ 1200 \\ 50 \\ 3000 \end{bmatrix}$$



$$P(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Além disso as matrizes **Q** e **R** foram escolhidas respectivamente como:

$$Q(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$R(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Com a definição das matrizes, a implementação pode ser realizada e o programa ser escrito conforme o código a seguir:

```
Iteracoes = 28; %Alterar para o número de quadros capturados
x_atual = x0; %x0 é a primeiro par de coordenadas x e y
P_atual = P;
x_salvo = zeros(4,28);
for i=1:iteracoes,
    x_pred = A * x_atual + B * U;
    P_pred = A * P_atual * A' + Q;
    e=[ Y(i,1); Y(i,2); Y(i,3); Y(i,4) ] - C * x_pred; %Y é a matriz que contém os dados medidos
    S = C * P_pred * C' + R;
    K = P_pred * C' * inv(S);
    x_atual = x_pred + K * e;
    x_salvo(:, i) = x_atual;
    P_atual = (eye(4) - K*C) * P_pred;
end
```

Observe que é preciso respeitar a ordem nos vetores de estado, no caso seria: posição no eixo x , velocidade no eixo x , posição no eixo y e velocidade no eixo y . A velocidade pode ser estimada usando o valor anterior, assumindo velocidade constante entre um instante e outro (que é uma boa aproximação considerando o curto intervalo de tempo entre as amostras).

3.5. Resultado esperado

É esperado que o resultado seja próximo ao que obtido no exemplo feito para ilustrar esse trabalho. A Figura 6 ilustra a imagem com a esfera em seu ponto mais alto, a medida e a estimativa do filtro de Kalman.

Para comparação, a Figura 7 mostra o gráfico do movimento da esfera montado com os dados coletados, já a Figura 8 mostra o resultado da aplicação do filtro.

Houve uma nítida melhora no gráfico do movimento depois do filtro. Na Figura 7 é possível ver na ascensão e no topo da trajetória incoerências no movimento, causadas principalmente pelo ruído na imagem capturada e pelo método de detecção do objeto (limiar). Essa incoerência na trajetória foi filtrada graças à equação da fase de previsão, que só permite, por exemplo, movimentos no horizontal da esquerda para a direita.

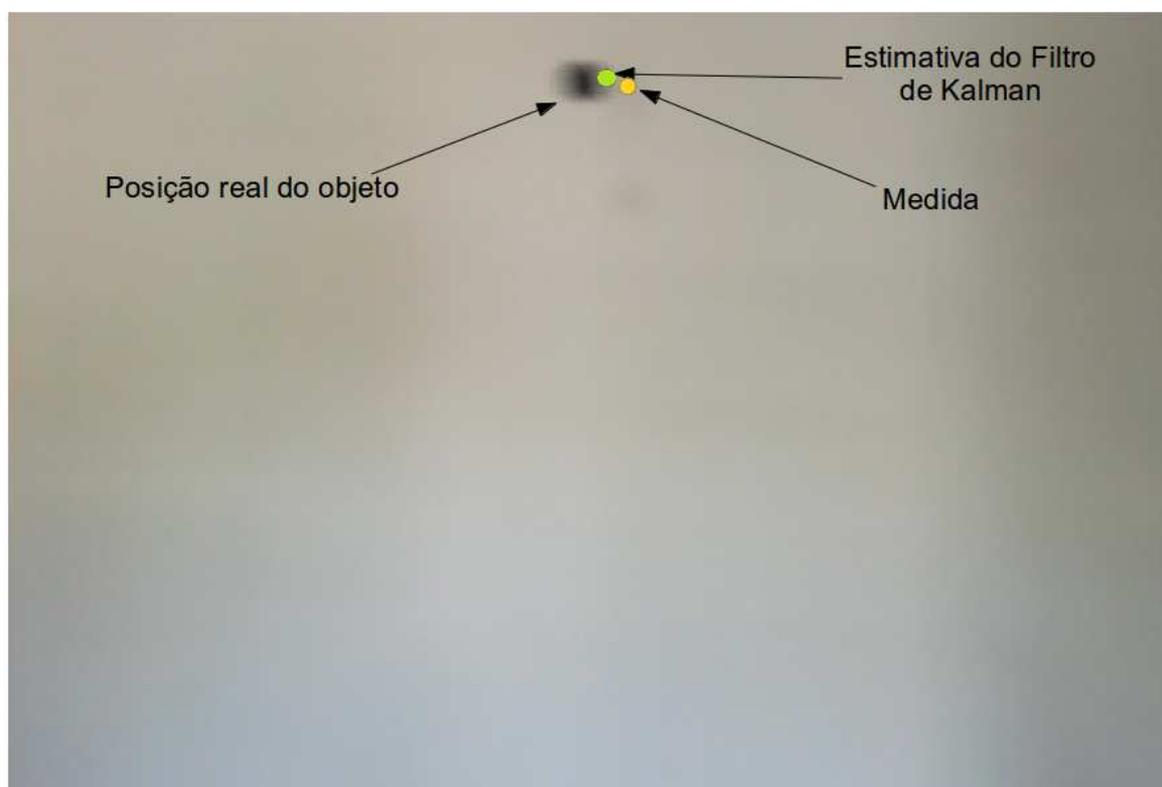


Figura 6 - Medida e estimativa do Filtro de Kalman

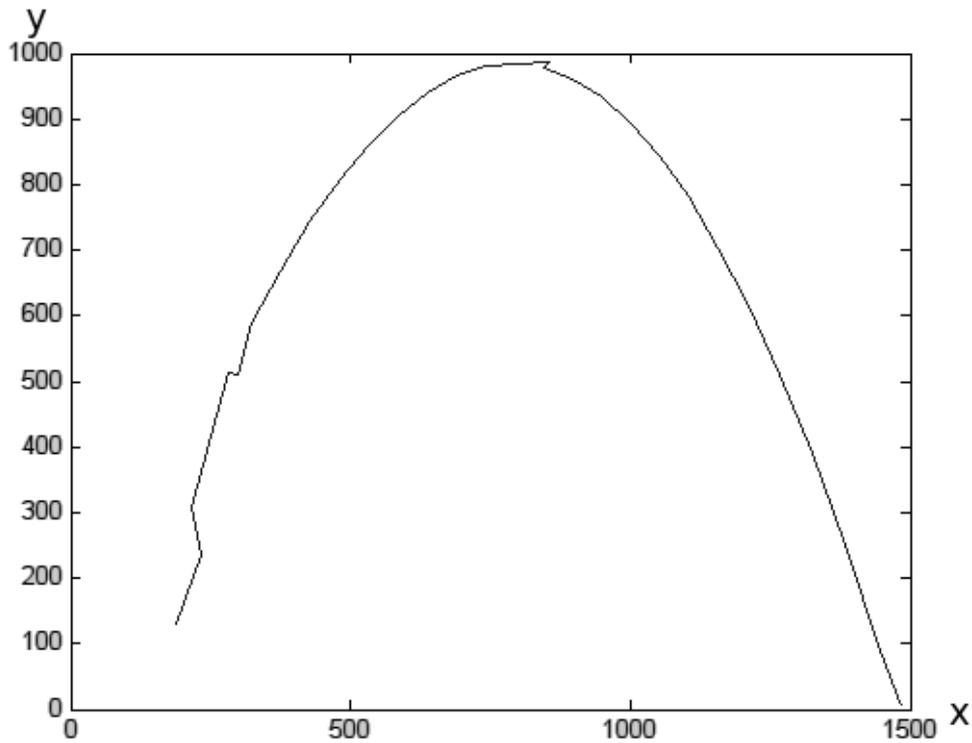


Figura 7 - Gráfico do Movimento balístico antes do Filtro (em pixels)

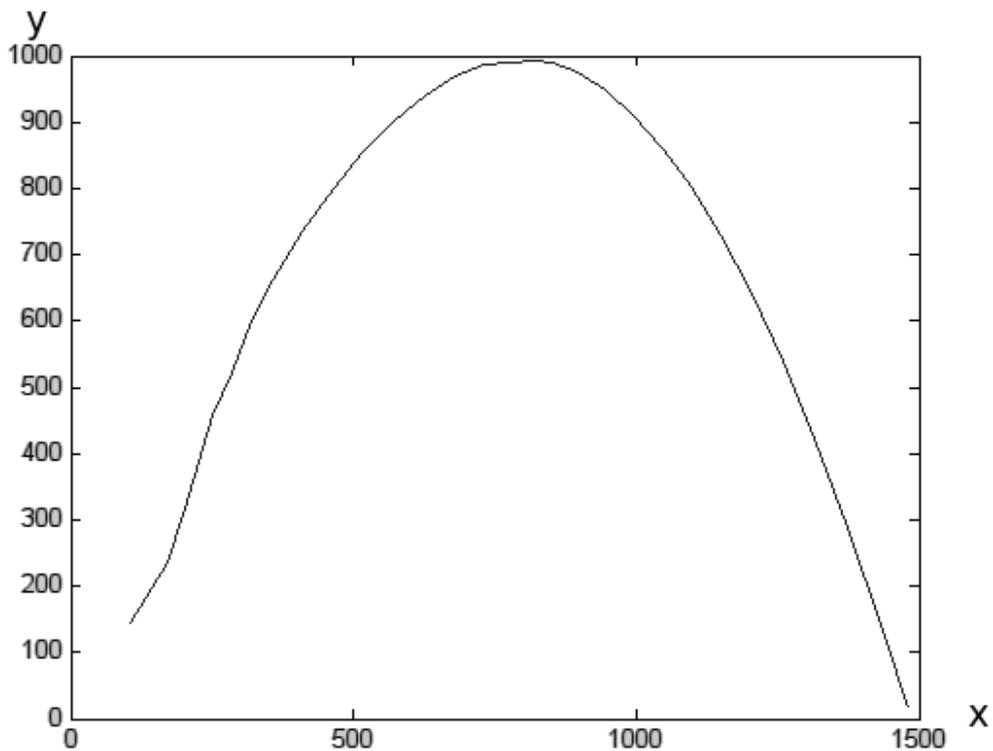


Figura 8 - Gráfico do Movimento balístico depois do Filtro (em pixels)



4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho teve como objetivo sugerir um experimento de fácil execução e que envolvesse todas as etapas da aplicação do Filtro de Kalman, indo desde a modelagem do sistema alvo até a aplicação do algoritmo no computador. Atividades dessa natureza tem grande validade educacional, incentivando o aluno à preparar o experimento e superar adversidades durante a execução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROOKNER, E. Tracking and Kalman Filtering Made Easy. John Wiley & Sons, Inc., 1998.

KATAYAMA, T. Subspace Methods for System Identification. Springer, 2005.

GIBBS, Bruce P. Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook. Wiley, 2011.

GREWAL, Mohinder S; ANDREWS, Angus P. Applications of Kalman Filtering in Aerospace 1960 to the Present. IEEE Control Systems Magazine, 2010.

SZELISKI, Richard. Computer Vision: Algorithms and Applications. Springer, 2010.

DIDACTIC APPLICATION OF THE KALMAN FILTER USING A DIGITAL CAMERA

***Abstract:** This paper suggests a laboratory experiment with the objective of consolidate the learning of Kalman Filter. The assignment is to record the trajectory of a small sphere launched with a certain angle in order to let it do a ballistic movement. Hereafter all the modelling is made by the student using basic concepts that is usually learned in the first year of the undergraduate level. Then, the model is set in the state space form so that the Kalman Filter can be applied. Besides being simples to execute and the fact of no sophisticated equipment is required, the student have to do all the steps of the experiment: the preparation itself, data collecting, model adequation to the required purpose and finally the application of the Kalman Filter. To help with the analysis of the results and with what we expect during the execution, the suggested experiment was made and its results is also contained in this paper.*

***Key-words:** Kalman Filter, Tracking, Enginnering Teaching.*