UM OLHAR SOBRE OS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA GEOMETRIA E ÁlGEBRA LINEAR NA SOLUÇÃO DE UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Catia Maria dos Santos Machado – catiamachado@furg.br; **Diana Francisca Adamatti** – dianaada@gmail.com
Universidade Federal do Rio Grande, Instituto de Matemática Estatística e Física e Centro de Ciências Computacionais, Avenida Itália, Km8 CEP – Rio Grande – RS.

Luana Raquel Meinerz – luana.meinerz@gmail.com; **Giulia Saquetti Pereira de Carvalho** – giuliacarvalh@gmail.com
Universidade Federal do Rio Grande, Instituto de Matemática Estatística e Física Avenida Itália, Km8 CEP – Rio Grande – RS.

Resumo: *Este trabalho faz parte de um projeto que visa o incentivo de jovens, que possuem afinidade com matemática, a carreira das Ciências Exatas e tenta combater a evasão dos estudantes do primeiro ano das Escolas de Engenharia. A partir de um problema contextualizado, abordando conceitos da Geometria e da Álgebra Linear, é possível fazer o estudante enxergar o benefício do aprendizado. O problema é acessível e oportuno, aplica o conhecimento teórico adquirido, introduz novos conceitos, desencadeia discussões como limitações computacionais e potencialidades. O trabalho tem como objetivo articular conteúdos do ciclo básico do curso profissionalizante com conteúdos da Pesquisa Operacional fazendo a transição entre o ensino médio, a formação básica e a formação profissional para quem quer seguir na carreira das exatas, verdadeiramente multidisciplinar.*

Palavras-chave: *Modelagem, Programação Linear, Geometria, Álgebra Linear.*

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho faz parte de um projeto que visa o incentivo de jovens, que possuem afinidade com matemática, a carreira das Ciências Exatas e no combate a evasão dos estudantes do primeiro ano das Escolas de Engenharia. Segundo (Mello, 2013) é comum colocar a culpa da excessiva reprovação no primeiro ano dos cursos de Engenharia pela falta de conhecimentos que os estudantes deveriam ter adquirido no ensino médio, assim como no ciclo profissional em que a reprovação decorre do excessivo rigor dos professores dos primeiros anos do curso, que ensinam o que não interessa. Concordamos que é provável que ambos os lados estejam corretos, nem os professores dos primeiros períodos do curso conhecem a sequência e ensinam o que acham que seja interessante, nem os professores do ciclo profissional sabem fazer uso correto das ferramentas que os alunos desenvolveram nos primeiros períodos. Uma das formas de contornar o problema está na utilização de mecanismos alternativos de ensino como a modelagem de problemas reais, o trabalho em equipe e o computador. Nessa perspectiva, apresentamos um modelo de Programação linear para o Problema de Transporte, fazendo uma abordagem sobre os fundamentos matemáticos da Geometria e da Álgebra Linear que são utilizados na técnica de resolução do problema. O problema é acessível e oportuno, aplica conhecimentos teóricos adquiridos, introduz novos conceitos, desencadeia discussões como limitações computacionais e potencialidades. O trabalho tem como objetivo articular conteúdos da matemática com conteúdos da Pesquisa Operacional fazendo a transição entre o ensino médio, a formação básica e a formação profissional para quem quer seguir na carreira das exatas, verdadeiramente multidisciplinar.

2. O PROBLEMA DE TRANSPORTE E SUA REPRESENTAÇÃO VISUAL

Segundo, (Ausubel et ali 1980) são identificadas três condições básicas para proporcionar uma aprendizagem significativa, a utilização de um material potencialmente significativo nas atividades de ensino; a existência, na estrutura cognitiva do aluno, de conhecimentos prévios que permitam o relacionamento do que o aluno já sabe com os conhecimentos novos, e a predisposição positiva do aluno para aprender significativamente. Embora os desafios sejam muitos, um ensino contextualizado em que aborda questões importantes, reais e interdisciplinares pode motivar o estudante fazendo com que enxergue o benefício do aprendizado. Além do mais evita a negligência com a formação de estudantes talentosos, dando-lhes a oportunidade de avançar no conhecimento matemático. Nesse contexto, o material potencialmente significativo será a descrição do problema através da representação visual que trará vantagens na construção do modelo matemático com vista a resolução do problema de programação linear. Baseados na simples ideia de pontos interligados por linhas, o problema de transporte de um produto pode ser representado, o termo rede pode ser utilizado e características quantitativas podem ser concedidas aos pontos (denominados de nós) e linhas (denominada de arcos). O problema consiste em efetuar o transporte de produtos (matéria-prima, produtos fabricados, etc.) que se encontra em “uma” origem (armazém, fábrica, porto, etc.) para “um” destino distinto (mercados, consumidores finais, etc.). Conhecido o custo de transporte de uma unidade de produto associado a cada percurso origem/destino, pretendemos determinar o plano de distribuição dos produtos de forma a minimizar o custo total de transporte.

O fluxo de produtos em redes é uma atribuição de valor de fluxo para as linhas da rede. A soma dos fluxos dos arcos que chegam a um nó de passagem (ou transbordo) deve ser igual à soma dos fluxos dos arcos que deixam esse mesmo nó (conservação de fluxo), exceção feita ao nó produtor (ou fonte) e consumidor (ou sumidouro), que são capazes de produzir ou consumir fluxo, respectivamente. A Figura 1 representa a rede, onde 5 unidades de um produto deverá fluir, a partir do nó de origem 1 até o nó de destino 3, tendo um nó de transbordo representado pelo nó 2.

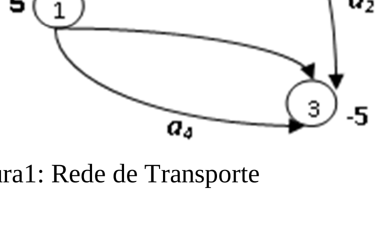

Figura1: Rede de Transporte

Nome do Arco	Custos nos arcos
a_1	5
a_2	1
a_3	1
a_4	3

Tabela1: Custo de Transporte nos Arcos

O termo "grafo dirigido" é utilizado para representar uma estrutura que é constituída por um conjunto V de nós (vértices) e por um conjunto E de arcos. Formalmente uma rede pode ser representada por um grafo $G = (V,E,C)$ em que (V,E) é um grafo e C é um conjunto de valores numéricos associados aos arcos. Então o grafo da Figura 1, possui um conjunto $V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $C = \{5,1,1,3\}$.
Uma rede $G = (V,E,C)$, pode ser representada por uma matriz de incidência nó-arco, onde cada elemento dessa matriz assume um dos seguintes valores: 1 se o arco sai do nó i, -1 se o arco chega no nó i ou 0 (nos casos restantes).
A matriz de incidência nó-arco para o grafo da Figura 1 é:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Algumas observações sobre o problema de programação linear deverão ser consideradas.
- O problema admite mais de uma solução, mas tem como objetivo (meta) encontrar a solução de menor custo.
- A quantidade de oferta deverá ser igual à quantidade de demanda.
- O fluxo do produto ou itens a serem transportados ao longo da rede serão quantidades positivas e inteiras.
- A terminologia grafo não está totalmente padronizada e a representação da rede pode ser referenciada como multigrafo por permitir arcos paralelos.
- os arcos paralelos fisicamente são diferentes, podendo representar, por exemplo, uma ferrovia e uma rodovia.

Sobre os conceitos e as questões apresentadas, o professor tem a possibilidade de discussão, interpretação e análise, fornecendo conhecimentos sobre a natureza do problema e soluções possíveis, equilíbrio de mercado, processos produtivos, e como os fundamentos matemáticos aliados a tecnologia tem lidado com problemas reais.

2.1 Formulação Matemática do Problema de Transporte

O problema enunciado anteriormente pode ser formulado matematicamente e consiste na determinação de valores inteiros não negativos (quantidade de fluxo nos arcos) para n variáveis $(x_1, x_2,....,x_n)$ de modo a satisfazer um sistema de m equações lineares que minimiza uma função linear Z (real) dessas variáveis.

Minimizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (1)
sujeito a: (restrições)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{m3}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

$x_1\ x_2,....,x_n \geq 0$ e inteiros (restrição de não negatividade e integralidade) (3)

onde: Z denota a função objetivo (função critério), x_j as variáveis de decisão (variáveis principais), a_{ij} os coeficientes das variáveis, b_i os termos independentes e c_j os coeficientes da função objetivo.
O sistema linear acima pode ser representado na forma matricial $Ax = b$, considerando $A = [a_{ij}]_{mxn}$ como a matriz dos coeficientes, $b = [b_1, b_2,..., b_m]^T_{mx1}$ como vetor de sua mão-direita e $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T_{nx1}$ como o vetor das variáveis.
O problema apresentado é então formulado matematicamente como:

$Min\ \ Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$
sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 5 \quad \text{(restrição para o nó de oferta 1)} \\ -x_1 + x_2 = 0 \quad \text{(restrição para o nó detransbordo 2)} \\ -x_2 - x_3 - x_4 = -5 \quad \text{(restrição para o nó de demanda 3)} \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ e inteiros (restrições de não negatividade e integralidade)

No entanto, é importante salientar que a matriz A pode ser escrita através de seus vetores colunas (arcos), $A = [a_1, a_2, ... , a_n]$ ou, podendo representar também um sistema linear através de uma combinação linear
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b.$ (4)

Então, a formulação matemática do problema poderá ser escrita de outra forma como:

$Min\ \ Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4$
sujeito a
$(5,0,-5) = (1,-1,0)x_1 + (0,1,-1)x_2 + (1,0,-1)x_3 + (1,0,-1)x_4$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ e inteiros (restrições de não negatividade e integralidade).

A forma de representação da formulação matemática por meio da combinação linear é interessante, pois ela permite fazer a ponte entre a teoria e aplicação. Gradualmente, alguns conhecimentos de Geometria e Álgebra Linear adquiridos no primeiro ano dos cursos vão sendo resgatados, assim como outros vão sendo introduzidos informalmente sem grandes provas formais. Certamente, os estudantes das ciências exatas com predisposição de aprender terão interesse nos fundamentos matemáticos e na técnica numérica de resolução do problema. A seguir, por meio da resolução do sistema linear indeterminado, algumas soluções possíveis para o problema são apresentadas.

3. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS NA UTILIZAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um sistema de equações lineares com n variáveis e m equações é possível indeterminado quando $m < n$, isto significa que o sistema admite infinitas soluções. Em particular, o interesse está nas soluções básicas de tais sistemas, por motivos que serão justificados mais adiante.
Em relação ao problema proposto, o sistema linear indeterminado pode ser resolvido utilizando o Método de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right] \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right] \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Obtendo como solução geral, $x_1 = 5 - x_3 - x_4$ e $x_2 = 5 - x_3 - x_4$, com duas variáveis livres x_3 e x_4. Então, a partir da atribuição de valores inteiros e positivos as variáveis livres do sistema linear, algumas soluções particulares do problema são apresentadas:

se $x_3 = x_4 = 0$, obtemos a solução particular P_1 (5,5,0,0), com Z = 30u.m;
se $x_3 = 3$ $x_4 = 0$, obtemos a solução particular P(2,2,3,0); com Z = 15u.m;
se $x_3 = 5$ $x_4 = 0$, obtemos a solução particular P_2 (0,0,5,0); com Z = 5u.m.

É interessante fazer uma analogia com o ponto $P \in \mathrm{R}^2$ que divide o segmento de reta $\overline{P_1P_2}$ em uma razão dada, pois com relação aos pontos pertencentes R^4 referentes às soluções particulares P_1 (5,5,0,0), P (2,2,3,0) e P_2 (0,0,5,0) podemos dizer que:

$\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{P_1P_2}} = \lambda$, onde PP_2 = (-2,-2,2,0), P_1P_2 = (-5,-5,5,0) e portanto λ $= \dfrac{2}{5}$. Observando que o ponto P pode ser escrito como, $P = \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$, com P_1 e P_2 pontos extremos.

O exposto acima exige um conhecimento prévio do estudante. A partir desses conhecimentos, sem grandes formalismos matemáticos, naturalmente novos conceitos e definições podem ser introduzidos. O interesse está em estabelecer o relacionamento entre o conceito de ***ponto extremo*** e ***solução básica*** de um sistema linear.

3.1 Conceitos de Geometria

Definição 1: Uma combinação convexa dos vetores (ou pontos) $P_1, P_2 \in \mathrm{R}^n$ é o vetor (ou ponto) $P = \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$ para algum $\lambda \in [0,1]$. Os pontos P_1 e P_2 são chamados de extremos. Uma combinação convexa no R^2 é um ponto P situado entre os pontos P_1 e P_2, sobre o segmento de reta que une estes dois pontos. Em particular, se λ = 1, então $P = P_1$ e se λ = 0, então $P = P_2$.

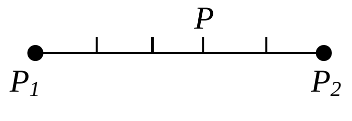

Figura 2: Representação do ponto P situado no terceiro quinto do segmento de reta de extremos P_1 e P_2.

Se considerarmos P_1, $P_2 \in \mathrm{R}^n$. Podemos dizer que o segmento de reta $\overline{P_1P_2}$ é o conjunto de todas as combinações convexas, isto é: $\overline{P_1P_2} = \{\lambda P1 + (1-\lambda)P2 \mid \lambda \in [0,1]\}$. Estendemos assim, o conceito geométrico de segmento de reta $\overline{P_1P_2}$, um conceito familiar do estudo do plano e do espaço, para o espaço métrico R^n (um conjunto munido de uma medida, como por exemplo a distância entre dois pontos). Dentro desse contexto, passamos a definir conjunto convexo.

<u>Definição 2</u>: Um conjunto X é convexo somente quando, dado dois pontos quaisquer $P_1, P_2 \in X$, o segmento de reta que tem estes pontos como pontos extremos for um subconjunto de X.

Um ponto P_1 de um conjunto convexo X é extremo se é impossível que ele esteja sobre qualquer semento $\overline{P_1 P_2}$ contido em X, e entre P_1 e P_2.

Um resultado importante é que todo ponto extremo de um conjunto é ponto fronteira deste conjunto. No entanto, a recíproca não é verdadeira.

A Figura 3 mostra um conjunto convexo e não convexo. A Figura 4 representa, no conjunto convexo X, o ponto Q como ponto interior, o ponto P como ponto de fronteira, mas nenhum dos dois pontos (P e Q) como ponto extremo do conjunto X. O ponto P_1 é ponto extremo do conjunto X. No R^2, se considerarmos X um polígono, seus pontos de fronteira correspondem à sua linha poligonal (arestas) e seus pontos extremos são os vértices do pentágono.

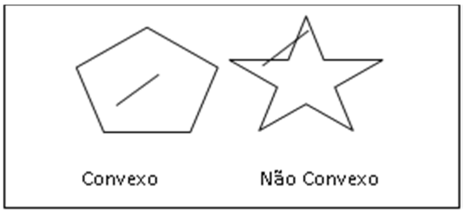

Figura 3: Representação dos Conjuntos

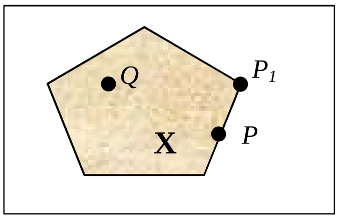

Figura 4: Representação dos Pontos em X.

<u>Definição 3</u>: Sejam $a \in R^n$ e $b \in R$. O hiperplano $a^T x = b$ é o conjunto $H = \{x \in R^n | a^T x = b\}$.

Essa definição generaliza o conceito da reta no R^2 e de plano no R^3 para hiperplanos em R^n, representada também através da equação $\sum a_i x_i = b$. Então, é compreensível que as restrições do problema apresentado são hiperplanos que dividem o espaço em dois semi-espaços em R^n. Esses hiperplanos correspondem à fronteira dos semi-espaços. Intuitivamente é simples entender que a intersecção de uma família de hiperplanos é um conjunto convexo e que os pontos de fronteira estão sobre esse hiperplano. Além disso, o conjunto de soluções compatíveis do problema é um conjunto convexo fechado e limitado inferiormente por $x \geq 0$ (restrições de não negatividade).

<u>Definição 4</u>: Se P_1 é um ponto de fronteira de um conjunto convexo X. Então $c^T x = z$ será chamado de hiperplano suporte de P_1, se $c^T P_1 = z$.

As soluções compatíveis do problema é um conjunto convexo fechado e a função a ser otimizada é um hiperplano suporte. A Figura 5, mostra que pode haver mais de um hiperplano suporte que passa por um ponto de fronteira, e isto ocorre quando o ponto é extremo. A Figura 6 mostra quando o hiperplano é deslocado paralelamente a si mesmo na direção do vetor gradiente (vetor dos custos) enquanto ainda mantiver algum ponto do conjunto de soluções compatíveis ao problema. Admitindo que o conjunto de soluções compatíveis é limitado nessa direção, haverá um momento em que o hiperplano da função objetivo se torna um hiperplano suporte a pelo menos algum dos pontos de fronteira, nesse ponto é atingido o ótimo.

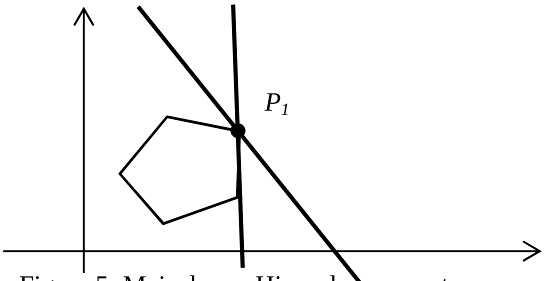

Figura 5: Mais de um Hiperplano suporte

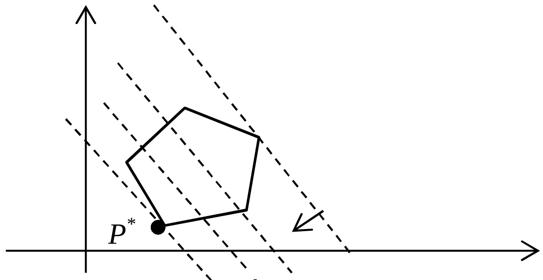

Figura 6: Ponto ótimo

Teorema 1: Um conjunto convexo fechado que seja limitado inferiormente tem um ponto extremo pertencente a cada hiperplano suporte.

A solução ótima do problema, se existe, é um ponto de fronteira. Então, pela definição 4 existe um hiperplano suporte $c^T x = z$ para esse ponto. O teorema garante a existência de um ponto extremo P^* do conjunto de soluções compatíveis pertencentes a esse hiperplano suporte $c^T x = z$, ou seja, fornecendo a solução ótima $c^T P^* = z^*$. Assim, se houver solução ótima, pelo menos um ponto extremo do conjunto de soluções compatíveis fornece a solução ótima.

Chamamos atenção para o P(2,2,3,0), obtido quando atribuídos os valores $x_3 = 3$ e $x_4 = 0$, na solução geral do sistema linear. Ele não é ponto extremo, portanto não é candidato a solução ótima. O espaço de soluções candidatas à solução ótima tornar-se-á mais restrito com a exclusão dos pontos fronteiras que não são pontos extremos.

Definição 5: Consideremos um sistema de equações lineares simultâneas com n variáveis, $Ax = b$, com $m < n$ e posto p(A) = m. Se m variáveis são escolhidas de A, as quais chamaremos de variáveis básicas, e se as demais m-n variáveis não-associadas à matriz são igualadas a zero, as quais chamaremos de variáveis não básicas, então a solução do sistema linear formado pelas colunas correspondentes às variáveis básicas é chamada de solução básica.

O relacionamento com pontos extremos do conjunto de soluções compatíveis do problema com soluções básicas é esclarecido pelo seguinte teorema.

Teorema 2: Toda solução compatível básica é um ponto extremo do conjunto de soluções compatíveis de um problema de programação linear e todo ponto extremo é uma solução compatível básica.

Já vimos que o ponto P(2,2,3,0), não é ponto extremo e de acordo com o *Teorema 2* e também não é solução básica. Então, a solução ótima do problema, se existe, consiste em encontrar todas as soluções compatíveis básicas.
Nesse momento, o estudante compreende que todas as soluções compatíveis básicas são pontos extremos e, portanto existe um conjunto finito de soluções candidatas a solução ótima. Assim, poderia se pensar sobre o desenvolvimento de um algoritmo que medisse o valor da função objetivo a partir da enumeração de todas as soluções compatíveis básicas. Como

poderia uma máquina previamente programada obter todos os pontos extremos ou todas as soluções básicas? A seguir será mostrado como esses pontos extremos podem ser obtidos.

3.2. Conceitos de Álgebra Linear

A definição de solução básica remete a encontrar uma base para o espaço solução do sistema linear. Assim, em relação ao sistema linear do problema apresentado temos que:

O conjunto de vetores A = {(1,-1,0), (0,1,-1),(1,0,-1),(1,0,-1)} é linearmente dependente, visto que o sistema linear homogêneo associado (0,0,0) = (1,-1,0)x_1 + (0,1,-1)x_2 + (1,0,-1)x_3 + (1,0,-1)x_4 admite infinitas soluções.
Se retirarmos do conjunto A os dois vetores paralelos (1,0,-1), o novo conjunto A' = {(1,-1,0), (0,1,-1)} tornar-se-á linearmente independente mas não constituirá uma base para o espaço vetorial R^3, visto que sua dimensão é 2. No entanto, pela adição de um vetor canônico, o conjunto A' poderá ser estendido a um conjunto $B = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$, linearmente independente e de dimensão 3.
A seguir a representação da rede através da matriz de incidência nó-arco com a inclusão do vetor canônico (0,0,1).

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e} & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

Os grafos na Figura 7 mostram: (a) o vetor canônico e = (0,0,1) como um arco que sai do nó 3. O nó 3 é referenciado como um nó raiz, (b) os vetores (arcos) básicos e (c) os vetores não básicos.

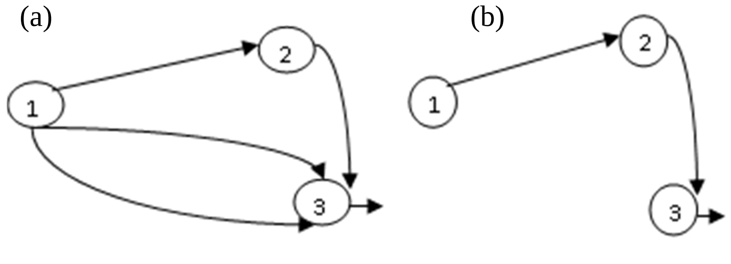

Figura 7: Grafos

Observe que a inclusão do vetor canônico permite rearranjar as colunas da matriz de incidência nó-arco de forma que a primeira partição corresponda aos vetores básicos e a segunda partição aos vetores não básicos, como:

$$A = [B \mid N] \tag{5}$$

Analogamente, a partição da matriz correspondente as variáveis básicas e não básicas, como:

$$\left[\frac{x_B}{x_N}\right] \tag{6}$$

O produto matricial $\begin{bmatrix} B \mid N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{x_B}{x_N} \end{bmatrix}$ é sempre possível, desde que o número de vetores linearmente independentes da matriz B seja igual ao número de variáveis básicas. Isso implica em adicionarmos uma variável básica x_r. Logo, o sistema linear pode ser representado como: $\begin{bmatrix} B \mid N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{x_B}{x_N} \end{bmatrix} = b$
ou ainda

$$Bx_B + Nx_N = b \tag{7}$$
$$B^{-1}(Bx_B + Nx_N) = B^{-1}b$$
$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) \tag{8}$$

De acordo com a definição 5, estamos interessados nas soluções básicas do sistema linear.
Fazendo $x_N = 0$, temos $x_B = B^{-1}b$. (9)
A razão dessa forma de representação é devido a sua utilização no desenvolvimento do algoritmo de resolução.

Em um sistema linear com $m < n$, podem ser encontradas muitas soluções básicas, dependendo da escolha das variáveis básicas. Então, o número de combinações destas n colunas tomadas à taxa m, não excede a $n!/(m!\ (n-m)!)$. Deve ser observado que o vetor canônico sempre estará na base, com $x_r = 0$, caso contrário a matriz B não teria posto completo.
Com relação ao problema apresentado teríamos no máximo 6 possibilidades, $n = 4$ variáveis e $m = 2$ variáveis livres. No entanto, em relação ao problema temos 5 possibilidades, visto que o sistema linear não constitui uma base quando anulamos as variáveis x_1 e x_2. As soluções compatíveis básicas encontradas são:

(a) Quando $x_3 = x_4 = 0$, temos $B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_r \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ e a solução do sistema linear é:

$x_1 = 5$, $x_2 = 5$ e $x_r = 0$, com $Z = 30$.

(b) Quando $x_2 = x_4 = 0$, temos $B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_r \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ e a solução do sistema linear é: $x_1 = 0$, $x_3 = 5$ e $x_r = 0$, com $Z = 5$. Essa mesma solução também é obtida quando $x_1 = x_4 = 0$

(c) Quando $x_2 = x_3 = 0$, temos $B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 & x_r \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ a solução do sistema linear é: $x_1 = 0$, $x_4 = 5$ e $x_r = 0$, com $Z = 15$. Essa mesma solução também é obtida quando $x_1 = x_3 = 0$.

Como complementação, quando na resolução do sistema linear uma ou mais variáveis básicas se anulam (exceto x_r), temos um problema com soluções básicas degeneradas. No entanto, o que importa é que a solução ótima do problema se restrinja a pesquisa das soluções compatíveis básicas. Logo a solução ótima para o problema é $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = 5$ e $x_r = 0$, com $Z = 5$.
O método apresentado consiste na busca da solução ótima por exaustão, ou seja, a solução ótima é selecionada entre todas as soluções compatíveis básicas. O método torna-se ineficiente na medida em que o número de restrições e variáveis aumentam. A enumeração de todas as soluções básicas é computacionalmente inviável para encontrar a solução ótima, tornando necessário um "algoritmo mais inteligente".

O "algoritmo inteligente" não precisa enumerar todas as soluções básicas, mas precisa analisar a solução básica para encontrar a solução ótima. O entendimento dessa análise é simples e será mostrado sobre o problema considerado.

Parte-se de uma solução compatível básica qualquer, um ponto extremo. Por exemplo, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $x_r = 0$ (variáveis básicas) e $x_3 = x_4 = 0$ (variáveis não básicas).
De acordo com (8), isolando as variáveis básicas em função das variáveis não básicas temos:
$x_1 = 5 - x_3 - x_4$
$x_2 = 5 - x_3 - x_4$
Substituindo as variáveis básicas isoladas na função objetivo $z = C_B^T x_B + C_N^T x_N$ temos:
$z = 5(5 - x_3 - x_4) + 5 - x_3 - x_4 + x_3 + 3x_4 = 30 - 5x_3 - 3x_4$.
E, portanto quando $x_3 = x_4 = 0$, obtemos $z = 30$.

A questão é: Como saber se estamos diante da "solução ótima do problema". Caso não estejamos, como encontrar uma solução melhor que a solução corrente.
Então sobre a igualdade: $z = 30 - 5x_3 - 3x_4$. Fazemos o seguinte raciocínio: Se fixarmos o valor de $x_4 = 0$ e aumentarmos em uma unidade a quantidade de fluxo no arco a_3, a função objetivo tende a diminuir mais, ou seja, z = 30 – 5.(1) – 3.(0) = 25.
Da mesma forma, se fixarmos o valor de $x_3 = 0$ e aumentarmos em uma unidade a quantidade de fluxo no arco a_4, teremos z = 30 – 5.(0) – 3.(1) = 27. Isso quer dizer que não estamos diante da solução ótima. Façamos a escolha sobre a quantidade de fluxo no arco o qual diminui mais a função objetivo, o arco a_3. No entanto, deve ser observado que o aumento de fluxo no arco a_3 faz com que ele deixe de ser um arco não básico.
Assim, o aumento da quantidade de fluxo no arco a_3 deverá ser tal que algum arco básico atinja o limite inferior zero, tornando-se um arco não básico. Essa troca de variáveis na matriz básica é chamada de pivoteamento. Nesse caso, quando $x_3 = 5$, as quantidades x_1 e x_2 atingem o zero (solução degenerada). Dessa forma, a escolha para o arco que sai da base é feita sobre o arco a_2. A Figura 8 mostra a quantidade $\Delta = 5$, fazendo com que o arco a_3 deixe de ser um arco não básico.
A Figura 9 mostra a saída do arco a_2 que deixa de ser um arco básico. As matrizes básicas das soluções (a) e (b) correspondem à troca da variável x_2 pela x_3.

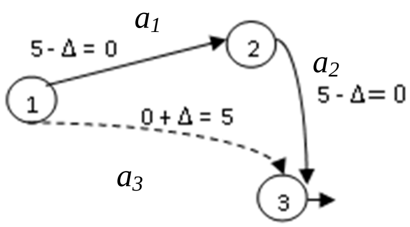

Figura 8: Entra arco a_3

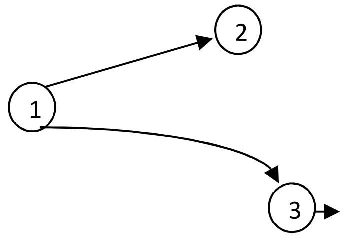

Figura 9: Sai o arco a_2

A nova solução é então $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$ e $x_r = 0$; com $z = 5$. Será a solução ótima? Então novamente, de acordo com (8), isolando as variáveis básicas em função das variáveis não básicas temos:

$x_1 = x_2$

$x_3 = 5 - x_2 - x_4$

Substituindo na função objetivo temos:

$Z = 5x_2 + x_2 + 5 - x_2 - x_4 + 3x_4 = 5 + 6x_2 + 2x_4$. Concluímos que estamos na solução ótima, pois qualquer aumento nas quantidades x_2 e x_4 não são capazes de diminuir a função objetivo. Logo o custo ótimo é $z = 5$, com $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$ e $x_r = 0$ a solução ótima.

O algoritmo através da análise da solução corrente é bastante eficiente e resolve problemas com muitas variáveis e equações. Basicamente, o “algoritmo inteligente” percorre de vértice em vértice (intersecção dos hiperplanos) até encontrar a solução ótima. O valor da função objetivo na iteração (i+1) é sempre menor ou igual ao valor da função objetivo na iteração i. Quanto melhor a solução inicial mais rápido é a convergência do algoritmo.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho aponta na direção do conhecimento matemático necessário para o desenvolvimento de algoritmos eficientes, de que forma teoremas e métodos, na busca da solução ótima, interferem no modo de um computador trabalhar. A resolução do modelo de programação linear utiliza noções de geometria, espaço vetorial, base de um espaço vetorial, dependência e independência linear, dimensão de um espaço, partição de matrizes, que precisam ser mergulhadas sobre as implementações computacionais a fim de resolver problemas, que ocorrem em situações reais ou pelo menos próximo à realidade. Além disso, o trabalho propõe um formato de aprendizado através do raciocínio lógico-matemático sem a utilização de métodos decorados. A ideia é insistir para que o estudante enxergue o benefício do aprendizado no ciclo básico do curso profissional é contribuir para um ensino contextualizado permitindo entender os conceitos básicos matemáticos que um profissional da área utilizaria na resolução de um problema real.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro, Chamada Pública MCTI/CNPq/SPM-PR/Petrobras nº 18/2013 e a participação voluntária das alunas do curso de Engenharia Civil, Debora Mourão Pereira e Estefania Duarte Fagundes que auxiliam na realização de trabalhos com a Pesquisa Operacional no Ensino Médio na Escola Silva Gama.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D. e HANESIAN, H. Psicologia Educacional. Trad. de Eva Nick. 2 ed. Rio de Janeiro, Interamericana, 1980.

BORSSOI, A. H. e ALMEIDA, L.M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: Uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/4689/3258> Acesso em: fevereiro de 2014.

JUNIOR, I. M. Grafos & Algoritmos: Conceitos, Aplicações e Experiências no Ensino Médio. Colégio Pedro II, Faetec & Colégio Zaccaria. CEFET, Rio de Janeiro.

KENNINGTON, J.L.”Algorithm for Network Programming”, New York, John Willey & Sons, 1980.

LOECH, C. e HEIN, N. Pesquisa Operacional: Fundamentos e Modelos, Blumenau, editora da FURB, 1999.

MELLO, J.C. e MELLHO, M.H. Integração entre o Ensino de Cálculo e o de Pesquisa Operacional. Disponível em:<www.producao.uff.br/conteudo/rpep/volume32002/relpesq_303-10.doc> Acesso em: outubro de 2013.

Abstract: *This research work is part of a project which aims to encourage young people who have an affinity for mathematics, the career of Exact Sciences and attempts to combat evasion of first-year students of the Schools of Engineering. From a contextualized problem, addressing concepts of geometry and Linear Algebra, it is possible to make students see the benefit of learning. The problem is accessible and appropriate, applies the acquired theoretical knowledge, introduces new concepts, triggers discussions as computational limitations and potentials. The work aims to articulate the content of the basic cycle vocational course with contents of Operational Research transitioning between high school, basic education and vocational training for those who want to follow the career of accurate, truly multidisciplinary.*

Key-words: Modeling, Linear Programming, Geometry, Linear Algebra.