AS FUNÇÕES ELEMENTARES, EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES UTILIZANDO O *SOFTWARE WINPLOT* - UMA ABORDAGEM INICIAL PARA A DISCIPLINA CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL I

Maria Cristina Bonomi Barufi- cristina@maua.br
Escola de Engenharia Mauá, Departamento Fundamental
Praça Mauá,1
09580-900 – São Caetano do Sul – SP
Eloiza Gomes - eloiza@maua.br
Escola de Engenharia Mauá, Departamento Fundamental
Praça Mauá,1
09580-900 – São Caetano do Sul – SP
Eduardo Satio Miura– emiura@maua.br
Escola de Engenharia Mauá, Departamento Fundamental
Praça Mauá,1
09580-900 – São Caetano do Sul – SP

Resumo. *No presente trabalho apresentamos uma possibilidade para iniciar o Cálculo Diferencial e Integral no curso noturno de Engenharia da Escola de Engenharia Mauá. O primeiro objetivo desta proposta é o estabelecimento de uma ponte com o Ensino Médio. Em segundo lugar, suprir uma necessidade sempre manifestada pelos professores de outras disciplinas, como Química e Física, no que diz respeito às dificuldades dos alunos na leitura e interpretação de gráficos. Partindo das funções elementares - primeiro e segundo grau, valor absoluto e inverso de um número real – em sua forma mais simples, a idéia é a de trabalhar com as funções do mesmo tipo, porém mais gerais, tornando visíveis as transformações ocorridas no plano, como translações, simetrias, reflexões. Finalmente, a solução de equações e/ou inequações envolvendo tais funções é observável no gráfico, sendo que as operações algébricas, que, por si só, seriam muitas vezes maçantes e desprovidas de sentido, adquirem relevância, ao ser explicitada sua necessidade e significado.*

Palavras-chave: *Ensino de Cálculo, Funções elementares, Cálculo no microcomputador, Gráficos.*

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta uma possível abordagem para iniciar o curso de Cálculo Diferencial e Integral, estabelecendo uma ponte com o Ensino Médio, onde a matemática estudada pelos alunos apresenta-se fragmentada, com diversas lacunas e ausência de significado em vários tópicos. No contexto do curso inicial de Cálculo, já pensando nas idéias e conceitos que serão trabalhados, aparece a grande importância do estudo das funções elementares, não como uma simples repetição do que já foi feito, mas segundo uma nova ótica e utilizando o microcomputador.

O projeto foi desenvolvido com os alunos do primeiro ano do período noturno, do curso de Engenharia da Escola de Engenharia Mauá. A disciplina de Cálculo I faz parte do elenco das disciplinas obrigatórias para o primeiro ano e a carga horária semanal atribuída é de 2 horas-aula teóricas para grupos de 80 alunos e 2 horas-aula de exercícios para grupos de 40 alunos. Existem seis professores envolvidos com o trabalho, um deles exercendo a coordenação. A equipe dispôs-se a elaborar material apropriado, além de adotar o livro texto *Cálculo com Geometria Analítica*, volume 1, de George F. Simmons.

As aulas teóricas, por serem programadas para grandes grupos, continuaram com um enfoque bastante expositivo, buscando, no entanto, provocar ao máximo a discussão e a reflexão dos alunos.

As aulas de exercícios, por serem programadas para grupos menores, puderam ser planejadas de uma forma tal que os alunos passaram a ter uma interação mais eficaz, trabalhando em grupos de quatro ou cinco, e com o microcomputador, conectado ao canhão de projeção, sempre presente na sala de aula. Foi utilizado um programa gráfico – *Winplot* – que é *freeware*, disponível na *Internet* e, portanto, acessível a todos.

2. O DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

Nas aulas teóricas iniciamos o trabalho através de um texto que discorre sobre as idéias do Cálculo, trazendo um pouco da história relativa às descobertas de Newton e Leibniz. A seguir, começamos a estudar a questão da variação das funções, partindo do conceito físico de velocidade, visando o estabelecimento do conceito de derivada de uma função num ponto.

Nas aulas de exercícios, paralelamente, começamos o estudo das funções elementares. Aí sim, aconteceram as grandes modificações buscando o estabelecimento da ponte com o Ensino Médio.

A partir de exemplos do cotidiano, retirados de reportagens de jornais e de coleta de dados empíricos, trabalhamos os conceitos de par ordenado, variável independente e dependente, função e sua representação gráfica. Em seguida, passamos a trabalhar com as funções primeiro e segundo grau, inverso de um número real não nulo, modular, exponencial , logarítmica e trigonométricas.

2.1 A função do primeiro grau

Iniciando com a função $f(x) = x$, cujo gráfico, em geral não trazia problema para os alunos, começamos os questionamentos:

- Como é o gráfico de $f(x) = ax$, com $a > 0$, comparado com o de $f(x) = x$, no caso $a > 1$ e no caso $0 < a < 1$?

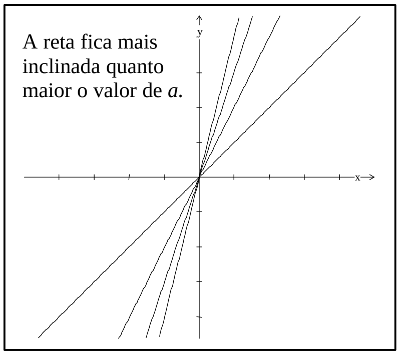

Figura 1 : O gráfico de *f(x)* = *x* e o gráfico de *f(x)* = *ax*, com *a* > 1.

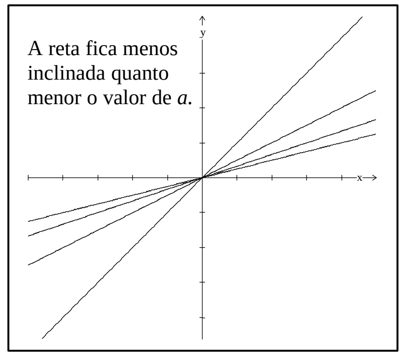

Figura 2 : O gráfico de *f(x)* = *x* e o gráfico de *f(x)* = *ax*, com *0* < *a* < 1.

- Como é o gráfico de $f(x) = -x$, comparado com o de $f(x) = x$?

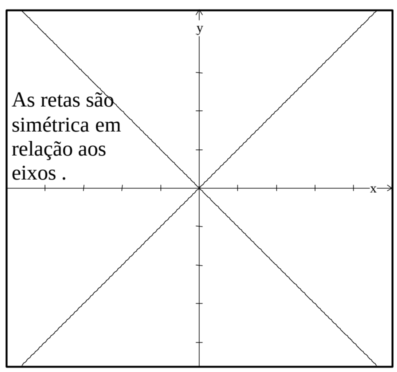

Figura 3 : O gráfico de *f(x)* = *x* e o gráfico de *f(x)* = - *x*.

- Como é o gráfico de $f(x) = ax$, com $a < 0$, comparado com o de $f(x) = -x$, no caso $a < -1$ e no caso $-1 < a < 0$?

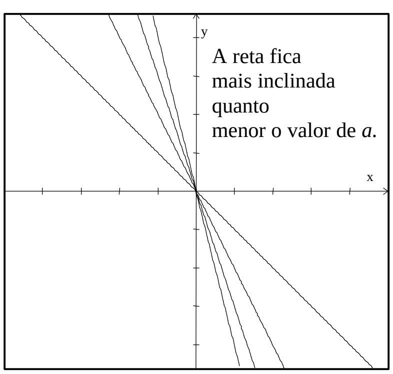

Figura 4 : O gráfico de *f(x)* = - *x* e o gráfico de *f(x)* = *ax*, com *a* < - 1.

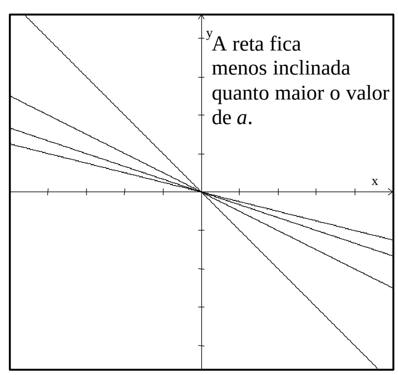

Figura 5 : O gráfico de *f(x)* = - *x* e o gráfico de *f(x)* = *a x*, com –1 < *a* < *0*.

A mudança de inclinação foi facilmente verificada na tela. As idéias de simetria se tornaram extremamente presentes.

A seguir, novas questões:

- Como é o gráfico de $f(x) = x + b$, com $b > 0$, em comparação ao de $f(x) = x$?

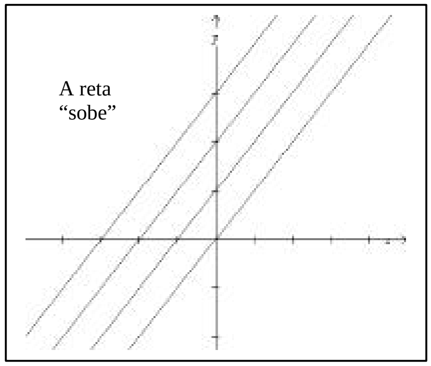

Figura 6 : O gráfico de *f(x)* = *x* e o gráfico de *f(x)* = *x* + *b*, com *b* > *0.*

- Como é o gráfico de $f(x) = x + b$, com $b < 0$, em comparação ao de $f(x) = x$?

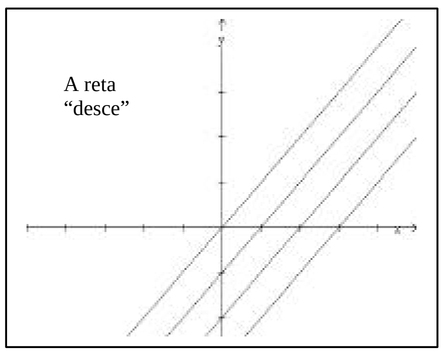

Figura 7 : O gráfico de *f(x)* = *x* e o gráfico de *f(x)* = *x* + *b*, com *b* < *0.*

Aqui a idéia de translação de um gráfico foi fortemente enfatizada.

Finalmente, para esboçar o gráfico de $f(x) = ax + b$, passaram a ser considerados os passos intermediários: esboçar o gráfico de $f(x) = x$, $f(x) = ax$, e depois $f(x) = ax + b$, observando haver ocorrido uma mudança de inclinação e posteriormente uma translação.

Ao longo desse processo de questionamentos, algumas inequações, envolvendo funções de primeiro grau, foram propostas e resolvidas pelos alunos, sempre com a realização dos gráficos das funções, para, em seguida, realizar cálculos algébricos cuja importância e necessidade era explícita a partir do gráfico.

Exemplo : Resolver a inequação $-2x+\frac{1}{2}\geq 5x-4$.

Solução :

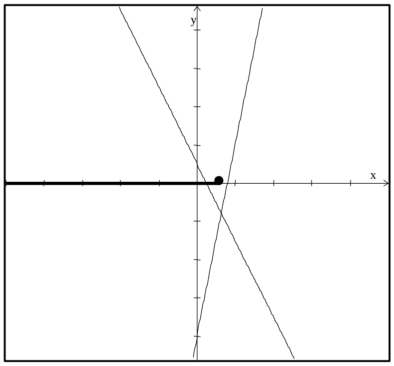

Figura 8 : A solução da inequação
é o intervalo assinalado.

Resolvemos a equação :

$$-2x+\frac{1}{2}=5x-4$$
$$\frac{9}{2}=7x$$
$$x=\frac{9}{14}$$

Assim, para $x=\frac{9}{14}$ ocorre a igualdade entre as duas funções envolvidas na inequação proposta. A partir do gráfico observamos que a função do primeiro membro é maior ou igual a do segundo membro, isto é, seu gráfico está acima ou coincide sempre que $x\leq\frac{9}{14}$. Logo, $S=\left\{x\in\Re\,/\,x\leq\frac{9}{14}\right\}=\left]-\infty,\frac{9}{14}\right]$.

Dessa forma, evitamos a resolução puramente algébrica de inequações onde, normalmente, os alunos se atrapalham ao lidar com o sinal de desigualdade, possuindo apenas algumas lembranças e nenhuma clareza a respeito de técnicas operatórias envolvendo desigualdades.

2.2 A função do segundo grau

Com a função do segundo grau, o encaminhamento foi semelhante. Partindo da função $f(x)=x^2$, os questionamentos foram os seguintes:

- Como é o gráfico de $f(x)=ax^2$, com $a>0$, em comparação ao gráfico de $f(x)=x^2$, nos casos $a>1$ e $0<a<1$?

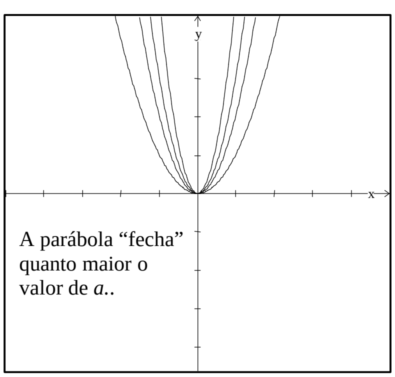

Figura 9 : O gráfico de
f(x) = x^2 e o gráfico de
f(x) = ax^2 , com $a>1$.

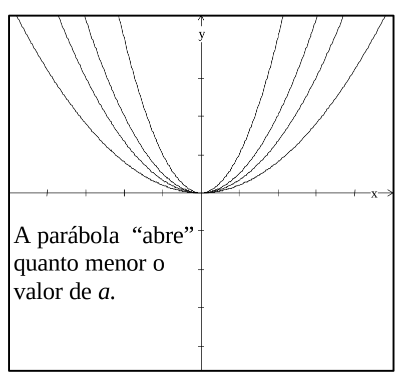

Figura 10 : O gráfico de
f(x) = x^2 e o gráfico de
f(x) = ax^2 , com $0<a<1$.

- Como é o gráfico de $f(x) = -x^2$ em comparação de $f(x) = x^2$?

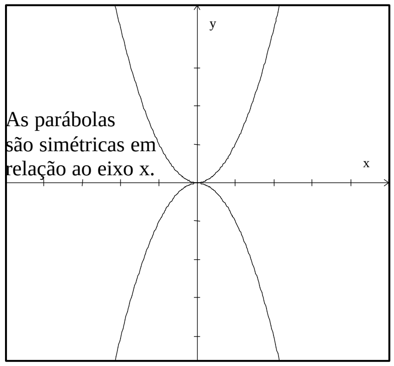

Figura 11 : O gráfico de *f(x)* = x^2
e o gráfico de *f(x)* = - x^2.

- Como é o gráfico de $f(x) = ax^2$, nos casos $a < -1$ e $-1 < a < 0$, em comparação ao de $f(x) = -x^2$?

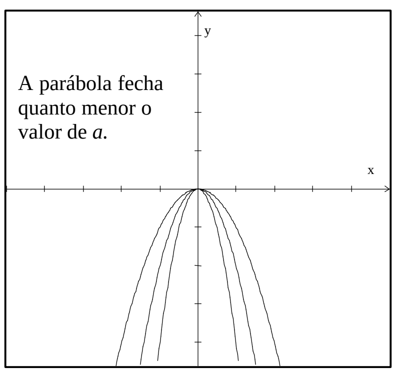

Figura 12 : O gráfico de *f(x)* = - x^2 e o gráfico de *f(x)* = $a\,x^2$, com $a < -1$.

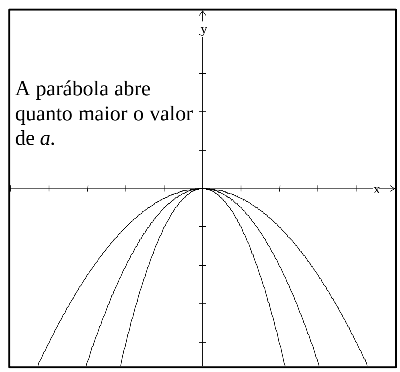

Figura 13 : O gráfico de *f(x)* = - x^2 e o gráfico de *f(x)* = $a\,x^2$, com $-1 < a < 0$.

A mudança de inclinação da curva foi naturalmente observada e novamente, a idéia de simetria foi enfatizada. A seguir, novas questões:

- Como é o gráfico de $f(x) = x^2 + c$, com $c > 0$ ou $c < 0$, em comparação ao de $f(x) = x^2$?

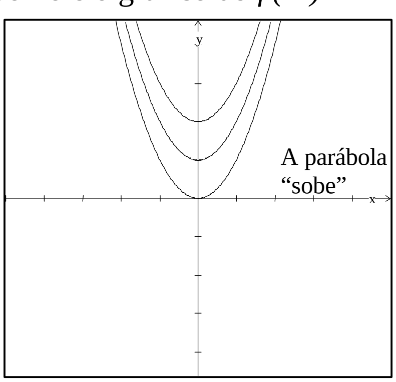

Figura 14 : O gráfico de *f(x)* = x^2 e o gráfico de *f(x)* = $x^2 + c$, com $c > 0$.

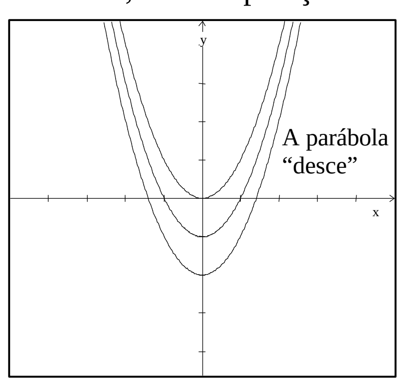

Figura 15 : O gráfico de *f(x)* = x^2 e o gráfico de *f(x)* = $x^2 + c$, com $c < 0$.

A idéia de translação já estava presente e, neste caso, a descoberta foi mais rápida.

- Como é o gráfico de $f(x)=(x+b)^2$, com $b>0$ ou $b<0$, em comparação ao de $f(x)=x^2$?

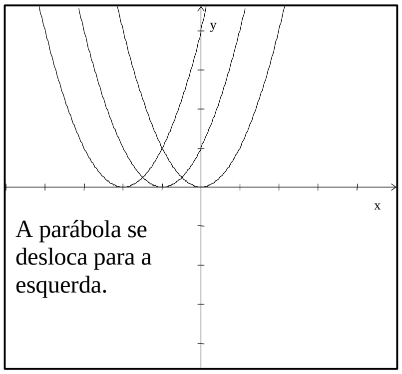

Figura 17 : O gráfico de $f(x) = x^2$ e o gráfico de $f(x) = (x + b)^2$, com $b > 0$.

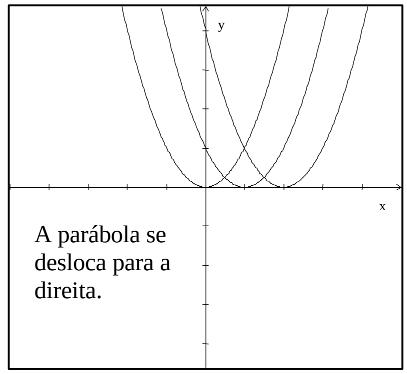

Figura 18 : O gráfico de $f(x) = x^2$ e o gráfico de $f(x) = (x + b)^2$, com $b < 0$.

Neste caso a questão era esclarecer que a adição de uma constante à variável independente provoca uma translação horizontal, uma vez que (-*b*), em $f(x)=(x+b)^2$, exerce o mesmo papel que 0 exercia na função inicial $f(x)=x^2$.

A partir, daí tudo ficou razoavelmente natural.

Partindo de casos particulares, a função do segundo grau foi trabalhada completando quadrados, para se chegar naquilo que, de modo geral, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a.\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Assim, o gráfico da função do segundo grau passou a ser obtido através de uma sucessão de gráficos intermediários: $f(x)=x^2$, uma translação horizontal, $f(x)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, seguida de uma mudança de inclinação $f(x)=a.\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, para, finalmente, com uma translação vertical, obter o gráfico de $f(x)=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$, como mostram as Figuras 19, 20, 21 e 22.

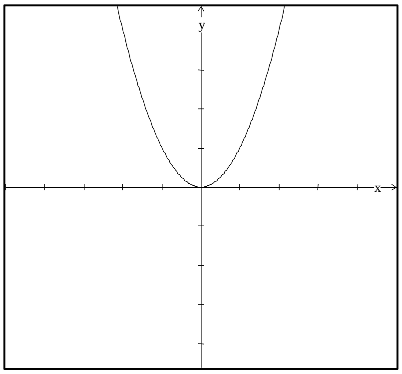

Figura 19 : O gráfico de $f(x) = x^2$.

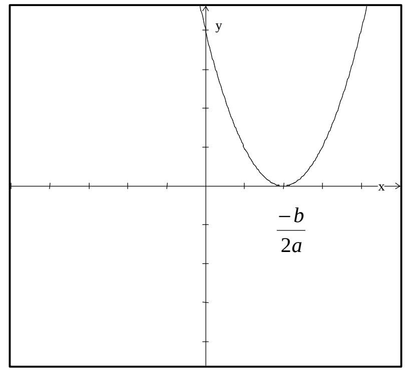

Figura 20 : O gráfico de $f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Ocorreu uma translação horizontal de $\frac{-b}{2a}$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$.

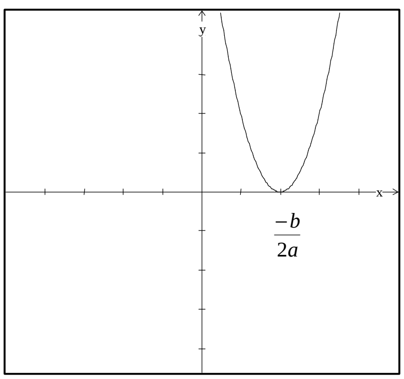

Figura 21 : O gráfico de $f(x) = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Ocorreu uma mudança de inclinação em comparação ao gráfico de $f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

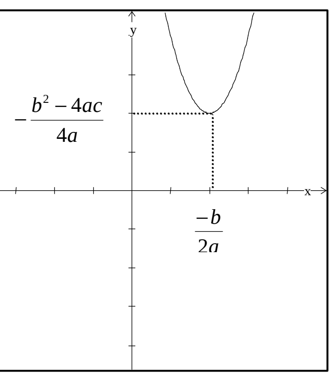

Figura 22 : O gráfico de $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Ocorreu uma translação vertical de $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ em relação ao gráfico de $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Neste instante, as idéias sobre movimentos no plano já estavam mais claras para os alunos; a maior dificuldade residiu em completar quadrados.

As inequações, envolvendo funções do segundo e/ou do primeiro grau, passaram a ser resolvidas sempre com o enfoque gráfico, além daquele algébrico, agora repleto de significado. Graves erros passaram a ser evitados.

3. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A abordagem apresentada e descrita nos casos da funções do primeiro e do segundo graus pode ser utilizada no âmbito das outras funções elementares. As idéias envolvidas são muito gerais e facilmente se transferem.

A manipulação puramente algébrica é sempre uma questão delicada e repleta de dificuldades para os alunos ingressantes na Universidade. Ela se sustenta, muitas vezes, em regras mal estabelecidas e, principalmente, desprovidas de significado.

O resultado do enfoque dado pode ser observado num outro contexto como o da resolução de equações diferenciais simples que foram colocadas nas aulas teóricas, durante o trabalho com derivação, antes de iniciar a integração. No caso de, por exemplo, $\frac{dy}{dx} = 2x$, os alunos não tiveram dificuldade alguma em verbalizar que a solução é uma família de funções $y(x) = x^2 + C,\ C \in \Re$. De fato, todas essas funções apresentam, para um dado x_0, a mesma inclinação, ou seja, as retas tangentes nos pontos $(x_0, x_0^2 + C),\ C \in \Re$, são todas paralelas.

4. REFERÊNCIAS

SIMMONS, G. (1987) *Cálculo com Geometria Analítica*. vol 1. Mc Graw-Hill. São Paulo

HUGHES-HALETT, D. et al. (1999) *Cálculo e Aplicações*. Edgrad Blüsher. São Paulo.

APOSTOL, T. M. (1985) *Calculus* . vol 1 . Ed. Reverté, S.A., Barcelona.

BARUFI, M.C.B. (1999) *A Construção / Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da USP. São Paulo.

Winplot em : http://www.ime.usp.br/lem